PROF. GINO LORIA
DELLA R. UNIVERSITÀ DI GENOVA

SCRITTI, CONFERENZE, DISCORSI

SULLA

STORIA DELLE MATEMATICHE

RACCOLTI PER INIZIATIVA
E
PUBBLICATI SOTTO GLI AUSPICI
DELLA
SEZIONE LIGURE DELLA SOCIETÀ "MATHESIS"

CEDAM
CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI
PADOVA 1937 - XV

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV. OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

UNIV. OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

PROF. GINO LORIA
DELLA R. UNIVERSITÀ DI GENOVA

UNIV. OF CALIFORNIA

SCRITTI, CONFERENZE, DISCORSI

SULLA

STORIA DELLE MATEMATICHE

RACCOLTI PER INIZIATIVA
E
PUBBLICATI SOTTO GLI AUSPICI
DELLA
SEZIONE LIGURE DELLA SOCIETÀ "MATHESIS,,

CEDAM
CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI
PADOVA 1937 - XV

Digitized by Google

I. A 21
1 · 15

PROPRIETÀ LETTERARIA

Printed in Italy

Gubbio - Sc. Tipografica "Oderisi,, 1936 - XIV.

Digitized by Google

Per effetto d'una recente disposizione di legge, il Prof. Gino Loria ha dovuto, nello scorso ottobre, lasciare la cattedra di Geometria Superiore, di cui, durante quasi 50 anni, era stato titolare in questa Università; non si è però distaccato dalla Scuola, che tanta parte è sempre della Sua vita, e che lo ha ancora Maestro desiderato e impareggiabile di Storia delle Matematiche. Colleghi e Discepoli esprimono l'augurio che questa nuova attività didattica, di cui, accogliendo prontamente l'affettuoso invito, Egli si è assunto l'incarico, possa continuare a lungo, accanto alla ininterrotta operosità scientifica ed accademica che è in Lui alimentata dall'inestinguibile amore del sapere e sorretta dalla grande e giovanile energia.

Non appena si ebbe notizia del provvedimento legislativo, sorse l'idea d'una manifestazione di affetto e di stima verso l'illustre Collega. Quest'idea, per iniziativa della Sezione Ligure della Società « Mathesis », di cui Egli è da tanti anni Presidente, assunse forma concreta nel proposito di riunire e ripubblicare un certo numero di Suoi scritti, conferenze, discorsi, non tutti oggi facilmente rintracciabili, e che, insieme presentati ed ordinati, meglio contribuiranno, accanto alle altre opere, ad illuminare la molteplice produzione dello Storico e del Matematico. Ecco la genesi di questo volume, al quale Colleghi, Ammiratori e Discepoli affidano l'espressione dei loro affettuosi devoti sentimenti.

Genova, ottobre 1936 Anno XIV.

IL COMITATO:

C. SEVERINI; E. NANNEI; E. G. TOGLIATTI;
G. BURNENGO; A. VENBACHER.

9773[illegible]5

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE

ESORDIO . . . . . Pag. IX
ELENCO DEGLI ADERENTI . . . . . » XIII

Per la storia e l'insegnamento delle matematiche.

I. La storia delle Scienze, è una Scienza? . . . . . » 3
II. Intorno allo stato attuale degli studi sulla storia delle matematiche . . . . . » 18
III. Di alcuni aspetti sotto cui presentansi le ricerche storiche nel campo matematico . . . . . » 33
IV. Considerazioni e notizie intorno alla storia delle matematiche » 41
V. Programmi del passato e programmi per l'avvenire . . » 49
VI. La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo . . » 62

Articoli storici.

VII. Contributi dati dai vari popoli allo sviluppo delle matematiche » 83
VIII. Psicologia dei matematici . . . . . » 103
IX. Matematici nella vita pubblica. Contributi storici alla psicologia dell'uomo di scienza . . . . . » 112

Biografie.

X. L'opera scientifica di Ettore Caporali . . . . . » 127
XI. Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati . » 155
XII. Vita e opere di Gaetano Giorgini . . . . . » 162
XIII. Eugenio Beltrami . . . . . » 169
XIV. E. De Jonquières . . . . . » 209
XV. Luigi Cremona . . . . . » 234
XVI. L'opera geometrica di A. Mannheim . . . . . » 258
XVII. G. L. Lagrange nella vita e nelle opere . . . . . » 293
XVIII. Commemorazione di Placido Tardy . . . . . » 333
XIX. Guglielmo Libri come storico della scienza . . . » 345

Digitized by Google

XX. Philip E. B. Jourdain, matematico e storico della scienza . Pag. 370
XXI. Due grandi storici delle matematiche: M. Cantor e H. G. Zeuthen . . . . . » 385
XXII. L'opera geometrica di Corrado Segre . . . . . » 397
XXIII. P. Tannery e la sua opera di storico . . . . . » 415

Discorsi e conferenze.

XXIV. Le trasfigurazioni di una scienza . . . . . » 429
XXV. Donne matematiche . . . . . » 447
XXVI. Le tradizioni matematiche dell'Italia . . . . . » 466
XXVII. Matematica e realtà . . . . . » 489
XXVIII. Le glorie matematiche della Granbretagna . . . . . » 502
XXIX. Eccentricità e misteri dei numeri . . . . . » 518
XXX. Leonardo da Vinci e la genialità latina . . . . . » 534
XXXI. Una massima di Abel . . . . . » 551
XXXII. La funzione sociale della scienza . . . . . » 564

Elenco delle pubblicazioni del Prof. Gino Loria. . . . . » 581

ERRATA - CORRIGE

Pag.	293	XXVII	va corretto in	XVII
»	415	XXXIII	»	» XXIII
»	466	XXXI	»	» XXVI
»	489	XXXII	»	» XXVII
»	502	XXIII	»	» XXVIII

Digitized by Google

ESORDIO

Indarno cerco parole adeguate per esprimere la mia riconoscenza verso i Soci della Sezione Ligure della «Mathesis», i quali, non badando che accordavano a me un onore ben superiore ai miei meriti, ma solo cedendo ad un sentimento d'affetto che io ben comprendo perchè condivido, vollero rendermi meno doloroso il distacco da una cattedra che occupavo da circa un mezzo secolo, col prendere l'iniziativa e tutelare la pubblicazione del presente volume. Tale deliberazione rappresenta l'unico episodio luminoso nel tragico anno che io vedo ora con gioia sprofondarsi nelle nebbie del passato.

La decisione presa dai miei diletti consoci potè tradursi in atto grazie al lusinghiero concorso di un grande numero di persone a cui pure mi corre l'obbligo di esprimere i sensi della mia più viva gratitudine. Quando chi presiede a questa commovente manifestazione mi fece noti i nomi di coloro che accettarono di parteciparvi, grande fu la mia commozione nell'incontrarvi persone di caratteristiche differentissime.

Non mi stupì certamente l'incontrarvi i nomi di cari colleghi, di oggi e di ieri, con i quali fui costantemente affratellato dall'aspirazione di elevare il livello dell'insegnamento e di accrescere il credito di cui gode l'Ateneo genovese, e la cui benevolenza fu ed è sempre per me fonte di purissima gioia.

Nemmeno mi meravigliai di trovarvi persone a me legate da vincoli di parentela, e antichi discepoli, dei cui sentimenti di affetto e stima mai ebbi ragione di dubitare.

Argomento di ben giustificata soddisfazione fu il trovare fra i partecipanti a questa dimostrazione di considerazione buon numero di studiosi d'oltre Alpi, da me conosciuti in occasione di convegni scientifici o con i quali ebbi ed ho relazioni epistolari di carattere scientifico.

Ma ciò a cui io non m'attendeva era di incontrare fra i partecipanti persone che ebbero con me esclusivamente rapporti estranei alla scienza

Digitized by Google

ed all'insegnamento; e fra esse mi consenta Eccellenza LANTINI che io citi il Suo riverito nome; la presenza di questo nell'Elenco degli aderenti alla presente manifestazione fu per me motivo di singolare compiacimento, come prova che l'E. V. non ha dimenticati gli sforzi da noi fatti in comune per la tutela degli interessi nazionali, in un'epoca che, invece di essere una delle più fulgide, fu, per l'indifferenza di imbelli governi, una delle più tristi della nostra storia.

L'effettuazione del progetto di riunire in un volume un certo numero di miei scritti che già videro la luce presentò qualche difficoltà; trattandosi di un problema di sua natura indeterminato, dovette ricevere una soluzione frutto di una scelta, epperò certamente esposta a critica; ond'è opportuno e fors'anche doveroso fare qui cenno dei criteri a cui ci si è attenuti.

Tenendo conto della varia mentalità dei sottoscrittori, furono esclusi i lavori di storia delle matematiche sopra temi speciali, tanto più che la sostanza di quanto ivi si legge passò in gran parte in volumi da me pubblicati. Furono pure esclusi alcuni scritti di carattere generale, dal momento che si possono ritenere sostituiti dalla mia *Storia delle Matematiche*; tali sono lo schizzo storico *Dalla tavola Pitagorica alle equazioni integrali* (apparso nell'opera *L'Europa del secolo XIX*, pubblicata dalla CEDAM) e le conferenze *Le matematiche nei quaranta secoli della loro storia* (inserite nel Vol. XI, 1932, degli «Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere»). Altrettanto può ripetersi riguardo alla collana di articoli *Il periodo Galileiano nella storia delle scienze, Il periodo di storia delle scienze dalla morte di Galileo a Newton, La scienza nel secolo XVIII, Lo sviluppo delle matematiche pure durante il secolo XIX*, scritti dietro invito del mai abbastanza rimpianto EUGENIO RIGNANO e pubblicati nella rivista «Scientia» da lui allora diretta. Un'analoga considerazione portò ad escludere la conferenza *Le matematiche nell'estremo Oriente*, tenuta nel 1917 al Seminario matematico di Roma, e la comunicazione *Che cosa debbono le matematiche ai Cinesi?* fatta nel 1920 alla Sezione ligure della «Mathesis», chè le parti essenziali di entrambi passarono nella mia *Storia*.

A malincuore dovetti rinunziare alla ristampa della memoria *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a Duce* (1892), che contrassegna l'inizio della mia opera storica, considerando che lo scopo di porre in luce le benemerenze di quel geniale manipolo d'investigatori può dirsi ormai raggiunto. Così parvemi potesse venire omesso l'articolo *G. Schiaparelli quale storico dell'antica astronomia* dopo che tutti gli scritti dell'indi-

Digitized by Google

cata specie dovuti all'eminente astronomo vennero riuniti in volumi che non tardarono a conseguire ampia diffusione.

Più largo fui nel concedere accesso nella presente ristampa agli scritti biografici, e ciò per rendere un nuovo omaggio di ammirazione alle eminenti personalità che ne sono soggetto. Furono esclusi soltanto le biografie di U. DINI, L. FIBONACCI ed E. TORRICELLI, essendo state accolte in volumi («Gli scienziati italiani dall'inizio del Medio Evo ai nostri giorni») che non mancano — o non dovrebbero mancare — in qualunque biblioteca; tuttavia, per non oltrepassare i limiti di spazio stabiliti, nel ripubblicare quegli scritti mi fu forza operarvi numerosi tagli, specialmente nella documentazione; perciò il lettore desideroso di più ampie e precise informazioni è rinviato alle prime edizioni di quei lavori.

Con rammarico dovetti decretare l'ostracismo ai miei scritti intesi a completare la frammentaria conoscenza che, alla fine dello scorso secolo, si aveva intorno all'opera matematica di E. TORRICELLI. Essi cominciarono con la comunicazione *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* (1897) che ebbe l'onore di venire presentata da LUIGI CREMONA all'Accademia dei Lincei. Seguì la pubblicazione *Le ricerche inedite di E. Torricelli sopra la curva logaritmica*, fatta nel volume inaugurante la III Serie (1901) della «Bibliotheca mathematica». Da siffatti studi fui indotto a proporre al Congresso internazionale di Scienze storiche (Roma, 1902) un voto per la pubblicazione di tutti gli scritti del sommo discepolo di GALILEO, voto che fu entusiasticamente approvato. Ad esso non rimase sordo il Municipio di Faenza, che volle uniformarvisi in occasione del III centenario della nascita del celebre Faentino. Così ebbe vita l'edizione delle *Opere di Evangelista Torricelli*, iniziata da G. VASSURA e che io condussi a compimento. La campagna da me iniziata potè in conseguenza giudicarsi vittoriosamente chiusa; per ciò, in seguito, io non feci che adoperarmi ad illustrare scritti ormai in dominio di tutti gli studiosi, con lavori ai quali come ai precedenti, mi sentii autorizzato a negare l'accesso nella presente raccolta.

Gli assidui lettori dei volumi della rivista *Scientia* cercheranno qui invano gli articoli ivi pubblicati sopra l'infinito e sull'immaginario in aritmetica e in geometria, ed altri ancora; vennero esclusi considerando che quell'ottimo periodico si trova nelle principali biblioteche dell'antico e del nuovo mondo.

Ritenni invece opportuno (altri dica se o non con ragione) la riproduzione di alcuni discorsi e alcune conferenze, che riscossero il plauso di coloro che li ascoltarono e il cui testo mi venne da varie parti chiesto in comunicazione e spesso invano.

Digitized by Google

Spero ed auguro che, dopo tale rigorosa cernita (1), il presente volume non preparerà soverchie delusioni a coloro che ritennero fosse il caso di raccogliere in un tutto organico lavori dispersi e in gran parte inaccessibili. Comunque siano giudicati, il lettore intelligente non tarderà a riconoscervi un' intonazione generale capace di assicurare il suo assenso, cioè che l'autore, pur rendendo giustizia ad eminenti personalità straniere, non si lasciò sfuggire alcuna occasione propizia senza far meglio rifulgere le glorie italiane del passato, e agevolare la formazione di nuovi pionieri alla ricerca matematica: possa tale considerazione assicurare al presente volume approvazione da parte tanto di coloro che ne patrocinarono la pubblicazione, indulgenza da chi ne affronterà la lettura.

Genova, al tramonto dell'anno 1935.

---

(1) Malgrado le numerose esclusioni, non si poté evitare qualche ripetizione, che spero verrà perdonata.

Digitized by Google

ELENCO DEGLI ADERENTI

Alessandria.
Prof.sa A. Osimo.

Assisi.
Prof. U. Sbrana.

Berlino.
Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften — Prof. E. Salkowski.

Bologna.
Istituto matematico della R. Università.

Bonn a. Rh.
Prof. Dr. E. Bessel-Hagen — Mathematisch-Historisches Seminar der Universität.

Bruxelles.
Institut de physique mathématique de l'Université libre.

Cagliari.
Prof. A. Maroni.

Cambridge Mass.
Prof. G. Sarton.

Camogli (Genova).
Prof. D. Asturaro — Prof. M. Razeto.

Castelliazzara (Grosseto).
Prof. F. Palatini.

Catania.
Circolo matematico di Catania — Facoltà di Scienze Economiche e Commerciali della R. Università. — Prof. G. Marletta — Prof. N. Spampinato.

Chiavari.
Prof. A. Natucci.

Chicago.
Dott. G. Castruccio.

Cluj.
Prof. Dott. P. Sergescu.

Ferrania (Savona).
Dott. P. Cassinis.

Ferrara.
Prof.sa M. Piazzolla Beloch.

Firenze.
Prof. G. Abetti — Prof. B. Caldonazzo — Prof. U. Ceretti — Prof. E. Ciani — Istituto matematico della R. Università — Prof. A. Procissi — Prof. G. Sansone.

Genova.
Prof.sa A. Alcozer-Olivari — Dott. M. Aloisi — Arch. M. Angelini — Arch. S. Barbanera — Prof. A. Bazzani — Prof. A. M. Bedarida — Prof.sa I. Bedarida — Prof. E. Beggi — Prof. A. Béguinot — Prof. L. Belladen — Prof. A. Beltrami — Prof. A. Bernini — Biblioteca Civica Berio — Biblioteca matematica della R. Università — R. Biblioteca Universitaria — Dott.sa P. Bigliardi — Dott.a M. Bocchero — Dott. Ing. M. Bonanni — Dott.sa C. Bonistalli — Ing. R. Bonistalli — Sig. A. Brichetto — Prof. A. Brian — Sig. G. Brian — Dott. M. Bruzzo — Prof. G. Burnengo — Sig. G. Calegari — Prof. M. Calonghi — Avv. G. Canepa — Dott. G. Cannata — Ing. A. Cantù — Sig.ra O. Caracciolo Lumbroso — Prof. M. Casali — Dott.sa L. Casanova - Ing. Prof. E. Casati - S. E. G. Celesia Prof. I. Clivio — Prof. L. Civinini — Prof. G. Cordone — Prof. G. Cusmano — Prof. O. De Beaux — Ing. C. De Ferrari — Prof. A. Falchi — Sig. A.

Digitized by Google

FARINETTI — Dott. C. FEDERICI — Prof. L. FRANCESCONI — Prof.sa M. FRANCHI — Ing. G. FREDA — Dott. F. FRISONI — Prof.sa L. GAJONE — Prof. M. GARINO — Prof.sa I. GENNARO — Prof. G. B. GONELLA — Prof. E. GRASSI — Prof. G. GUARESCHI — Ing. P. GUARESCHI — Prof. R. ISSEL — Prof. F. LAMBERTI — Prof. P. LIVIERATO — Prof. R. LONGO — Ing. F. LUCCHETTI — Barone A. LUMBROSO — Prof. U. MANARA — Ing. F. MANZITTI — Prof. G. MARCELLINO — Prof. G. C. MARTINI — Prof. Ing. A. MENGOLI — Ing. L. MIGONE — Dott. T. MIRONE — Prof. Sen. M. MORESCO — Dott. G. MULÈ — Prof. E. NANNEI — Dott. Ing. C. NARDI GRECO — Libreria O. NEGRO — Dott.sa A. NOVELLA — Prof. A. OCCHIALINI — Prof. S. ORTU CARBONI — Ing. T. ORTU CARBONI — Prof. A. PADOA — Prof.sa R. PAGLIERI GORDESCO — Ing. S. PALAZZO — Prof.sa N. PASCAL — Prof. A. PELLOUX — Prof. G. G. PERRANDO — Ing. L. PETITBON — Dott. G. PIAZZA — Dott.sa R. PICCARDO — Dott.sa G. PIERSANTELLI — Prof.sa M. PIZZAMIGLIO — Dott. F. PLATÉ — Prof. L. PONGIGLIONE — Prof. A. PORCHIESI — Dott. F. PRETTI — Ing. D. PROFUMO — Prof. M. RAFFO — Prof. E. REMOTTI — Prof. P. REVELLI — Prof.sa A. RICCI — Prof. G. ROBERTO — Prof. L. ROLLA — Ing. Sen. N. RONCO — Prof.sa E. ROSSI CAIRO — Prof. G. ROVERETO — Prof. G. SADUN — Prof. F. SBRANA — Ing. F. SCHIAFFINO — Prof.sa E. SEGRÈ TEDESCHI — Prof. C. SEVERINI — Prof. M. G. SITTIGNANI — SOCIETÀ DI SCIENZE E LETTERE DI GENOVA — Prof. P. STRANEO — Prof. E. TEDESCHI — Prof. E. G. TOGLIATTI — Dott.sa G. TOGLIATTI NACAMULLI — Sig. M. TRAVERSO — Prof.sa A. VENTURINI — Dott. Ing. F. VIGNOLA — Prof.sa C. ZAFFAGNI — Prof.sa E. ZICAVO.

Ginevra.

Prof. H. FEHR.

Kopenhagen.

Prof. O. NEUGEBAUER.

Liegi.

Prof. L. GODEAUX.

Lisbona.

Prof. F. DE VASCONCELLOS.

Livorno.

Prof. F. CECIONI.

Mantova.

Reale Accademia Virgiliana.

Messina.

Prof. G. GIAMBELLI - Prof. A. ZAPPALÀ.

Mestre.

Prof. C. CIAMBERLINI.

Milano.

Dott. E. CANTONI — Prof. U. CASSINA — Prof. O. CHISINI — Prof. U. CISOTTI — Prof. G. CUNEO — Prof. A. DI DIA — Prof. G. DI DIA — Prof. B. FINZI — Prof. L. GABBA — Prof. G. A. MAGGI — Prof. V. MARTINETTI — Prof. F. MORRA — Prof.sa M. PASTORI — Prof. S. PIAZZA — Prof. G. VIVANTI.

Napoli.

Prof. D. MERCOGLIANO.

New York.

Prof. J. GINSBURG — Prof. D. E. SMITH.

Padova.

Prof. P. CATTANEO — Prof. E. LAURA.

Palermo.

Prof. U. CRUDELI — Prof. M. CIPOLLA.

Parigi.

Prof. J. HADAMARD — M.me H. METZGER — M.me P. TANNERY — Prof. A. MIELI.

Pavia.

Prof. L. BERZOLARI — Prof. L. BRUSOTTI — Prof. G. GALLINA — Istituto matematico della R. Università — Prof. R. SERINI.

Piacenza.

Prof. E. MACCAFERRI.

Pisa.

Prof. G. ALBANESE — Prof. E. DANIELE — Presidenza della « MATHESIS » — Prof. G. RICCI — Prof. L. TONELLI.

Digitized by Google

Praga.
Prof. Dott. Q. VETTER.

Providence R. I.
Prof. R. C. ARCHIBALD.

Pully (Losanna).
Prof. A. REYMOND.

Roma.
E. ALMAGIÀ — L. ALMAGIÀ — R. ALMAGIÀ — Prof. U. AMALDI — Prof. G. CASTELNUOVO — Prof. F. ENRIQUES — Prof. L. GALVANI — Prof. D. GAMBIOLI — S. E. F. LANTINI — Prof. T. LEVI-CIVITA — Dott. Ing. R. PONZIO-VAGLIA — Prof. G. SCORZA — S. E. Prof. F. SEVERI — Prof. G. VACCA — Prof.sa A. VENBACHER.

Savona.
Ing. C. A. ASTENGO — Ing. G. DAMONTE — Prof. N. MEZZANA.

Susa.
Prof. L. DELLACASA.

Torino.
Prof. E. ARTOM — Mo. C. ARTOM — Sig. V. ARTOM — Prof.sa C. BAROLO — Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali della R. Università — Prof. G. FANO — Prof. G. FUBINI — Dott. E. LEVI — Prof.sa L. PREDELLA LONGHI — Prof.sa A. SEGRE — Prof. C. SOMIGLIANA — Ing. M. SORIA — Prof. A. TERRACINI - S. E. Prof. Ing. G. C. VALLAURI.

Trieste.
Prof. B. TEDESCHI.

Uccle (Belgio).
Prof. A. ERRERA.

Venezia.
Prof. E. APPENDINO.

Digitized by Google

Digitized by Google

PER LA STORIA E L'INSEGNAMENTO DELLE MATEMATICHE

Digitized by Google

Digitized by Google

I.

LA STORIA DELLE SCIENZE, È UNA SCIENZA?

UNIV. OF CALIFORNIA

Comunicazione fatta a Genova nell'Ottobre 1912
alla Società Italiana per il progresso delle Scienze.

1. — Narra la cronaca del tempo che il celebre viaggiatore Sir WALTHER RALEIGH, condannato per delitto politico alla relegazione nella Torre di Londra, onde ingannare l'ozio forzato a cui era costretto, si accinse a scrivere una storia universale. Disturbato un giorno nel suo lavoro da una disputa che si era accesa nella via sottostante, si affacciò alla finestra ed interrogò gli astanti per conoscere il motivo di tutto quel baccano. Ma, non giungendo a discernere il vero dal falso, attraverso le testimonianze discordi degli astanti, assalito da invincibile scoramento, gettò nelle fiamme la propria penna, disperando di arrivare alla verità sopra avvenimenti lontani, quando questa gli sfuggiva, quasi deridendolo, anche sopra un fatto di proporzioni minuscole, la cui eco era giunta sino al suo orecchio.

In questo aneddoto sembra rispecchiarsi il senso di doloroso scoraggiamento, che, di fronte a qualunque ricerca storica, invade i più coscienziosi investigatori, i quali, quasi smarriti, ripetono con ironia dolente la scettica domanda di PILATO: *quid est veritas?* E per giustificare tale atteggiamento citano, con l'intento di paragone, alcune leggende del buon tempo antico: il *pozzo delle Danaidi*, per indicare l'impossibilità di adunare tutti gli elementi che sarebbero necessari alla costruzione di un edificio storico solido e duraturo; la *tela di Penelope*, per esprimere la necessità, nella quale lo storico troppo sovente si trova, di dover distruggere tutto il lavoro pazientemente e faticosamente compiuto, onde sostituirlo con altro migliore per qualità di materiali e per arte di composizione; il *sasso di Sisifo*, per dare notizia dell'angoscioso fenomeno che si presenta quando, alla speranza lungamente nutrita di potere dire l'ultima parola sopra un dato soggetto, segue la dolorosa constatazione di dovere ricominciare da capo.

Digitized by Google

2. — Siffatte considerazioni racchiudono senza dubbio una certa parte di verità; esse, però, sono improntate ad un deplorevole orientamento verso l'esagerazione!

Sarebbe vano il negare che l'accertamento dei fatti storici riesca in generale difficile, perchè il loro racconto porta di regola, volontariamente od involontariamente, l'impronta indelebile delle opinioni, dei sentimenti e anche del carattere del relatore; e, per dimostrare quanto grande ne sia l'influenza, basta che io ricordi gli aspetti differentissimi sotto cui si presentarono alcuni memorabili avvenimenti recenti, secondochè si osservavano alla luce della luna... o della Mezzaluna, oppure si guardavano al lume di una stella .. ancorchè questa fosse di splendore abbagliante qual è la stella d'Italia.

Ma quando preconcetti, malvolere o passione politica non ottenebrino l'intelletto di chi scrive o legge, e quando si disponga di parecchie relazioni fra loro indipendenti di un medesimo fatto, è possibile, sia pure a fatica, di separare il grano dal loglio, il metallo nobile dalla ganga plebea, il vero dal falso. Ne volete una prova, Signori? L'abbattimento, a cui allusi esordendo, dal quale venne assalito sir RALEIGH fu di corta durata; vintolo, a lui fu concesso di recare a buon termine il progettato lavoro e così di dotare la sua patria di una storia universale, ancor oggi ricordata con onore (1).

Inoltre le difficoltà espresse dalle leggende che ho ricordate sono innegabili e grandi; ma non sembrano prerogativa esclusiva delle investigazioni storiche, giacchè anche le scienze più granitiche nelle loro basi e più sicure nel loro procedere offrono esempi numerosi ed impressionanti di circostanze congeneri.

Infatti, chi può mai illudersi di conoscere nella sua interezza un dato soggetto, dopo due o tre millennii da che l'umanità è al lavoro, dopo che l'esempio dato dall'Europa scientifica venne seguìto da popoli di tutti i colori, sicchè oggi si può ben dire che, sul regno della scienza, meglio assai di quanto si diceva per quello di Carlo V, non tramonta mai il sole? Per ciò lo scienziato, al pari dello storico, è obbligato a limitarsi al conoscere un certo numero delle osservazioni fatte e dei risultati raggiunti, e suo sforzo continuo è colmare le lacune che presenta il materiale raccolto; sicchè l'opera di entrambi si può paragonare a quella di chi si propone di delineare completamente una curva, della quale si conosca soltanto una serie discreta di punti. Ben mostrarono di conoscere con precisione tale triste condizione di cose persone eminenti e grandi corporazioni scientifiche, quando, non soltanto sostennero l'imprescindibile

(1) *The History of the World* (London, 1666).

Digitized by Google

necessità di compilare estese opere di bibliografia scientifica, ma non lesinarono tempo, fatica, denaro per promuoverne, sussidiarne o dirigerne l'esecuzione.

Inoltre, innumerevoli sono gli esempi anche di recente offerti di momenti decisivi per alcune scienze positive, in cui si avvertì l'imprescindibile necessità di distruggere edifici maestosi e reputati di solidità a tutta prova, per sostituirli con altri di stile tutt'affatto diverso. Ad esempio CUVIER professava la teoria delle « creazioni ripetute », intercalate da cataclismi; ma per il regime risultante suonò l'ora del « ça ira » quando LYELL mostrò non essere necessario ricorrere ad un'ipotesi tanto ardita per spiegare tutti i fenomeni geologici. Così la zoologia descrittiva, sino a cinquant'anni fa, prendeva le mosse dall'uomo, il preteso « re della natura », per discender poi grado grado al più semplice degli esseri organizzati: ma, apparso DARWIN ed instaurata la dottrina dell'evoluzione, un'inversione completa venne giudicata necessaria, cioè si vide essere assai meglio conforme al vero stato delle cose di cominciare dai protozoi per assurgere insensibilmente sino agli esseri più complicati nella scala animale. Similmente l'odierna astronomia fisica non è più soddisfatta dalla celebre ipotesi cosmologica di KANT-LAPLACE e, dietro suggerimento di un eminente scienziato americano (1), tende ad eliminarla per dar posto alla « teoria delle catture ». Nemmeno alle scienze esatte, le più austere che si conoscano, vennero risparmiate tali sgradite sorprese; chè la geometria di EUCLIDE, l'imponente rocca logica legataci dagli antichi a perenne gloria dello spirito umano, ha assistito con ben giustificato spavento ad un irresistibile moto rivoluzionario che ebbe per ultimo risultato l'erezione di costruzioni rivali, nel fondo ben diverse da quella architettata dal venerando Alessandrino; e la classica meccanica newtoniana non vide forse, proprio ai giorni nostri, sorgerne altra differentissima, resa assolutamente necessaria dalla constatazione di fenomeni nuovi, altrimenti inesplicabili?

Nè si può dire che le ipotesi, a cui spesso lo storico è costretto di ricorrere per riempire le lacune che presenta la messe raccolta di notizie accertate, siano una miseria che non tange il cultore delle scienze, giacchè non v'ha disciplina positiva, per quanto rispettabile, che non sia materiata di elementi ipotetici: persino le scienze esatte ne contengono buon numero, sia pure sotto la forma larvata di assiomi e di postulati. Ma per lo storico come per lo scienziato è stretto dovere e cura costante il ridurre al minimo gli elementi congetturali su cui lavora, perchè tutti

(1) TH. SEE, *The Evolution of the starry heavens* (Popular Astronomy, T. XIX, 1911).

Digitized by Google

sanno essere le ipotesi un lucidissimo piano inclinato, scendendo il quale senza cautele si precipita a certa rovina.

Nulla, pertanto, sembra giustificare l'opinione di coloro che collocano l'indagine storica ad un livello più basso della ricerca scientifica, ritenendo che quella soltanto abbia basi fragili e malsicure e prepari a chi vi si consacra delusioni amarissime.

Tanto meno si può sostenere quell'opinione quando si abbia in vista, non la *storia dei fatti* ma la *storia delle idee*, dal momento che in tal caso il materiale che si deve elaborare è, generalmente parlando, costituito da opere che stanno presenti dinanzi all'occhio dello studioso, il quale, purchè non dimentichi il fondamentale precetto di ricorrere alle fonti, dispone di tutti i mezzi per misurare il valore che esso materiale possiede.

3. — Chi si sforza di scoprire le ragioni per cui, ciò non ostante, gli studi sopra l'evoluzione storica delle idee scientifiche adunino intorno a sè un numero di estimatori minore di quello che potrebbero ragionevolmente pretendere, ne trova una validissima nel fatto che, in passato, molti a torto ritenevano che la storia di una scienza altro scopo non avesse che di comporre con arte una collana di aneddoti più o meno piccanti; quali quello di ARCHIMEDE che, sotto l'impero dell'emozione prodottagli da una grande scoperta, esce dal bagno in costume adamitico, o quello di GALILEO che, con inverosimile coraggio, getta in faccia ai giudici che lo avevano condannato il motto proverbiale « Eppur si muove! », o quello, altrettanto improbabile, di NEWTON, indotto dalla caduta di una mela a concepire la legge di gravitazione universale. Oggi, invece, la critica storica ha insegnato a misurare quanto di vero si trovi in questi divertenti racconti, tramandati automaticamente di bocca in bocca o di penna in penna, condannando ad un definitivo ostracismo quelli riconosciuti per favolosi e riducendo alle debite modestissime proporzioni l'ufficio di quelli dotati di autenticità indiscutibile.

Nè maggior credito venne conferito alla storia delle scienze da certe costruzioni fantastiche, veri romanzi in cui l'ingegnosità dell'intreccio non può nè deve far disconoscere l'insanabile inverosimiglianza dello scioglimento. Fra essi il *record* della celebrità spetta senza contrasto al fragile edificio concepito dal BAILLY, il quale, dopo di avere diligentemente raccolti i pochi frammenti di scienza astronomica lasciatici dai popoli d'Oriente o d'Occidente, creò, per proprio uso, un vetustissimo popolo anonimo dal quale Cinesi ed Indiani, Assiri e Greci avrebbero raccolta un'assai pingue eredità e si cullò nella dolce illusione di essere in tal modo riuscito a far discendere da un ceppo unico produzioni intellettuali che oggi si ritengono fra loro indipendenti, vano essendo stato ogni tentativo per scoprire il filo che li colleghi in un tutto.

Digitized by Google

Nè spiccate virtù di proselitismo avrà manifestate l'HEILBRONNER, il quale, trovatasi di fronte l'inquietante questione «di dove cominciare?», a proposito della storia delle matematiche che erasi proposto di scrivere, la risolse esponendo con imperturbabile serietà le cognizioni aritmetiche, e geometriche, secondo lui possedute da ADAMO e figli.

4. — Gli è nel secolo interposto fra il 1750 ed il 1850 che si cominciò ad avvertire la necessità di elevare il livello degli scritti sopra la storia delle scienze positive (1) ed è merito incontrastato ed incontrastabile della Francia l'avere somministrati agli investigatori futuri modelli del genere di perenne ed altissimo valore. A dimostrarlo basta citare la fulgida costellazione formata dal dotto e simpatico MONTUCLA per le matematiche, dal profondo e solenne DELAMBRE per l'astronomia e dal coscienzioso e brillante CUVIER per le scienze naturali; e che cosa dirò io di MICHELE CHASLES, l'affascinante storico della geometria, il quale seppe suscitare tale fioritura d'importanti verità inaspettate da opere antichissime e giudicate ormai sterili, da dare, quasi direi, un contenuto di realtà alla pia leggenda secondo la quale il corpo di una santa, rigettato dal mare sulla riva, puro ed incontaminato, venne immantinenti ricoperto da cespugli di gigli di tale splendore da destare l'invidia in quelli che crescono nella valle di Gerico? (2).

A partire da quest'epoca si ritiene che allo storico di una scienza incomba l'obbligo di raccogliere con cura scrupolosa ed assidua i costituenti immediati e remoti di qualunque teoria, sforzandosi di coordinarli per metterne allo scoperto l'intimo nesso e porre in chiara luce gli avvenimenti che contrassegnarono qualche decisivo progresso, non senza delineare un ritratto dei personaggi che agirono come protagonisti od almeno come collaboratori efficaci. Se egli, come fece taluno (3), restringerà l'opera propria a raccogliere e disporre in ordine cronologico tutti i documenti relativi allo svolgimento di una determinata scienza o teoria, quantunque si dovrà ritenere siasi arrestato nel vestibolo, non meriterà per fermo di venire cacciato dal tempio della storia. Se, per converso, seguendo le esortazioni di un grande scienziato dei tempi nostri (4), si proporrà eziandio di porre in chiaro le relazioni di una scienza partico-

(1) Maggiori particolari al riguardo si trovano nella mia Relazione su *L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche*, presentata al V Congresso storico italiano (Genova, 1892) e riprodotta nel T. VII della II Sez. della Bibliotheca mathematica (1893). [1935].

(2) La leggenda a cui si allude nel testo concerne Santa Restituta ed é popolare fra gli abitanti di Casamicciola.

(3) Ricordiamo il TODHUNTER, il POUDRA, il MUIR, il DICKSON, ecc.

(4) F. KLEIN.

Digitized by Google

lare, in una data epoca, con lo stato generale della cultura, nonchè l'influenza da quella esercitata sopra il movimento generale degli spiriti, toccherà una regione ancor più elevata, che può dirsi appartenga al regno della «filosofia della storia». Tuttavia, anche se egli a tanto non aspira, e si limita ad adunare coscienziosamente informazioni sicure, sarà in grado di somministrare preziosissimi elementi di fatto per lumeggiare questioni di alta psicologia, quale sarebbe (per non abbandonare il campo in cui io vivo) quella di decidere se, come riteneva l'HERMITE, all'osservazione spetti la parte preponderante nella scoperta delle verità matematiche, o se, all'opposto, come pretendeva un altro grande, LEOPOLDO KRONECKER, l'ufficio direttivo nella ricerca matematica sia riserbato, in diritto ed in fatto, alla filosofia.

5. — In corrispondenza a queste cresciute esigenze, a cui si reputa dover oggi soddisfare la storia di una scienza, si avvertì la necessità di rendere più raffinati, più agili, più potenti i mezzi da usarsi. A provvederli è spontaneamente designato il Metodo storico, elaborato con tanta geniale assiduità nel corso del secolo XIX, specialmente per opera della dotta Germania e la *cui azione si estende a tutti i campi della ricerca storica.* Questo sconfinato potere non venne sinora abbastanza chiaramente percepito dai vari cultori della storia delle scienze positive, i quali così, imprudentemente rifiutarono gli aiuti, veramente preziosi, che al presente offrono i severi procedimenti esegetici ed ermeneutici di funzionamento ormai perfetto. Se a questi si uniscono i potenti sussidi offerti dalla bibliografia, dalle collezioni biografiche, dalle grandi opere di consultazione, si vedrà che colui che si accinge attualmente a scrivere la storia di un qualsia ramo di scienza dispone di un magnifico arsenale di armi tanto delicate e sicure che, servendosene, potrà condurre a buon termine lavori degni di sostenere vittoriosamente il paragone con quelli di cui vanno a ragione superbe le altre branche della storia. Ma affinchè egli possa toccare la mèta agognata deve soddisfare un'altra imprescindibile condizione; quella, cioè, di conoscere a fondo la scienza di cui intende descrivere le fasi di sviluppo: onde si è indotti a sentenziare che, come il senso storico è esclusiva prerogativa dei popoli già maturi, così la funzione di storico della scienza non può venire esercitata a dovere che da persone adulte.

6. — Intesa nel modo testè indicato la storia delle scienze presenta problemi metodologici suoi propri, che sono della massima importanza e che, quindi, debbono essere sempre tenuti presenti dai suoi cultori *meno per proporne od imporne soluzioni generali e definitive, che per decidere, caso per caso, a quale attenersi.* Concedetemi, Signori, di tener breve parola di quelli che mi sembrano emergere su tutti gli altri.

La storia di una scienza è un miscuglio, e, se si preferisce, una com-

Digitized by Google

binazione di storia e di scienze; *orbene in quali proporzioni tali elementi debbono entrare nella sua formazione*? Se è prevalente l'elemento storico ci si accosta alle narrazioni destinate a completare la cultura generale della gioventù; mentre se, per converso, prepondera l'elemento scientifico nascono opere a cui sembra affidato l'ufficio di supplementi alle trattazioni prettamente dottrinali di una disciplina o che ne sono vere e proprie « esposizioni storiche ».

Quando si tratta di storia antica si può, ed in certa misura è anche consigliabile, occuparsi esclusivamente di un popolo, che idealmente si isola da tutti gli altri popoli cronologicamente e topograficamente vicini. *Ma ciò è forse possibile trattando di epoche vicine alla nostra?* La cosa appare estremamente dubbia ove si rifletta che, di mano in mano che ci avviciniamo al secolo nel quale viviamo, la scienza tende a divenire internazionale, sotto il possente influsso della stampa periodica, dei congressi e delle esposizioni universali, delle grandi opere collettive ed in generale per effetto dell'aumentata facilità delle comunicazioni materiali ed intellettuali fra individui o fra popoli anche lontanissimi. In conseguenza assai frequenti sono, nel campo del pensiero, i fenomeni di esosmosi ed endosmosi, che si svolsero e tuttora avvengono sotto i nostri occhi attraverso le Alpi come attraverso il Reno, attraverso la Manica e persino attraverso l'Oceano; fenomeni curiosissimi i quali rendono talmente arduo il distinguere nell'odierna opera scientifica di una nazione ciò che è autoctono da quanto è importato, e quindi il decidere se una determinata razza abbia o non impresse alla scienza stigmate caratteristiche, che io reputo non sia lontano il giorno in cui verrà definitivamente abbandonato, come impraticabile, il sistema delle « storie regionali » per quello delle « storie universali » relative ad un dato periodo di tempo ed a una determinata scienza.

Le invenzioni, le scoperte, gli uomini rappresentativi si presentano ad intervalli di tempo di cui si ignora, e probabilmente non esiste, alcuna legge di successione; onde la ripartizione di tutto un periodo storico in « epoche » di eguale lunghezza è un sistema troppo « semplicista » che riesce insignificante, epperò di utilità scarsissima per non dire nulla. D'altronde parmi evidente che certe date sono vere pietre miliari del gran cammino percorso dall'umanità *da alcuni punti di vista*, mentre per altri sono destituite di qualsia significato; così, ad esempio, mentre la sostituzione della carta alla pergamena, l'invenzione della stampa e forse anche la rivoluzione francese (1) sono date memorabili nella storia di

(1) Ricordo a questo proposito il fatto, veramente tipico, che la creazione del sistema decimale di pesi e misure fu, non soltanto una riforma scientifica, ma una reazione contro il « pied du roi » dell'antico regime. V. H. Bouasse in *Revue du mois*. T. I, (Paris 1906). p. 456-479.

Digitized by Google

tutte le manifestazioni del pensiero, si può forse ripetere altrettanto a proposito dell'invenzione della polvere da cannone e della scoperta d'America? Da tutto ciò emerge che *per ogni scienza s'impone il problema di determinare quale sia la divisione in periodi meglio atta a porgere un adeguato concetto della sua evoluzione storica.*

La specializzazione, di cui l'enorme sviluppo assunto da ogni ramo di scienza ha reso e rende sempre più impellente la necessità, costringe oggi lo storico, desideroso di elevarsi al di sopra delle vacue generalità, *di sostituire le monumentali costruzioni storiche enciclopediche, così care ai nostri padri, con lavori di carattere monografico, più modesti nell'apparenza, ma più esatti e profondi*, destinati a fungere come preziosi elementi per colui che, al momento opportuno, vorrà accingersi a qualche lavoro di sintesi storica. Perciò l'attuale tendenza verso il « sistema monografico » va approvata senza restrizioni e validamente incoraggiata; ma chi vi si attiene deve ricordar sempre che, per colorire un quadro veritiero dello sviluppo storico di una particolare disciplina, fa sempre mestieri considerare attentamente le scambievoli influenze che esercitano, le une sulle altre, le differenti manifestazioni del pensiero umano, influenze che talora diventano talmente energiche da produrre inattesi ed impressionanti intrecci di teorie. E poichè io non posso certamente pretendere di essere creduto sulla parola, mi giova rilevare, a sostegno di tale opinione, che lo storico dell'Anatomia non può evidentemente dispensarsi dal tenere nel massimo conto le informazioni sopra la conoscenza della struttura del corpo umano somministrate dalle statue del tempo; che lo storico della Prospettiva teorica dovrà prestare grande attenzione alle antiche pitture e risalire, nell'esame dei quadri superstiti, sino agli affreschi mirabilmente conservati nelle viscere della terra e venuti in luce in seguito a scavi fortunati eseguiti in Europa, in Asia, in Africa; finalmente chi intende descrivere le forme primitive della ricerca geometrica è tenuto a raccogliere le informazioni che tacitamente offrono i monumenti architettonici che si sottrassero all'ingiuria del tempo.

Giova ancora avvertire che lo storico monografico non può dispensarsi dal domandarsi *quale influenza abbiano esercitato sopra lo sviluppo di un determinato ramo dello scibile le eventuali tendenze generali dell'epoca e della terra di cui discorre,* giacchè, a mo' d'esempio, quando e dove l'interesse della società è volto verso le applicazioni, è fatale che, anche gli scienziati puri, quasi inconsciamente, volgano l'occhio alla pratica; mentre, per converso, dove e quando è al potere la teoria, anche i pratici sono trascinati a segnare le loro fatiche con un'impronta elevata.

Di ancor più vasta portata è la questione *se sia conveniente, ed anche soltanto possibile, la storia generale della scienza,* di cui nel Collegio di

Digitized by Google

Francia, da trent'anni, esiste una cattedra (1), fondata per ispirazione di AUGUSTO COMTE e per lunghi anni occupata da P. LAFITTE, uno dei più entusiastici discepoli del celebre filosofo francese. Per conto mio non esito a dichiarare che ritengo impossibile concepire un piano o redigere un programma per un siffatto corso di lezioni! Qualsivoglia storia è materiata di avvenimenti; in particolare la storia scientifica deve avere per proprio scheletro una serie di fatti, i quali, per possedere qualche effettivo legame fra loro e destare l'interesse di coloro a cui vengono esposti, debbono concernere un solo ramo dello scibile. È quindi assolutamente inevitabile che la presunta o pretesa storia *della* scienza si metamorfosi nelle mani di chi la manipola nella storia *di una* scienza o in una successione discontinua di tali storie. Se poi dall'analisi comparata delle vicende subìte dalle varie scienze in una data epoca e presso un popolo determinato si possano dedurre qualche loro analogia, o le cause di preponderanza di alcune su altre o infine alcune leggi di sviluppo applicabili a tutte, è questione che attualmente non si è in grado di risolvere, troppo numerose e profonde essendo le lacune che si avvertono nella collezione che oggi possediamo di opere storiche sopra scienze speciali, veramente degne di fiducia piena ed intera. Onde, allo stato degli atti, la storia *della* scienza dovrebbe limitarsi a constatazioni generali, epperò superficiali, quali quella dello spirito altamente scientifico posseduto dagli antichi Greci, o della missione di conservatori e trasmettitori del sapere ellèno egregiamente disimpegnato dagli Arabi del Medio Evo, o dell'incontrastato dominio che la scienza esercitò in Italia sopra la letteratura nella gloriosa epoca di GALILEO. Sembra, pertanto, inattuabile una storia *della* scienza scritta puramente e semplicemente «ad narrandum» e tutti sanno che le storie concepite «ad probandum» non meritano che una fiducia estremamente limitata. E, realmente, è ben giustificato il sospetto che la cattedra del Collegio di Francia, della quale feci dianzi menzione, sia stata istituita e mantenuta col fine inconfessato e recondito di porgere l'occasione per assodare la verità della celebre «legge dei tre stadii», alla quale il COMTE, che per primo la formulò, attribuiva tanta importanza e contro la quale le obbiezioni pullularono, non appena essa giunse in dominio del pubblico pensante.

7. — L'importanza e gravità di siffatte questioni (il cui elenco, reputo necessario dichiararlo, è ben lungi dall'essere completo) mostrano quanto impervio sia il cammino che si para dinnanzi a chi voglia dedicarsi con serietà ed impegno allo studio su cui ho l'onore di intrattener-

(1) Era stata proposta dal GUIZOT sino dal 1832, ma venne istituita soltanto nel 1892.

Digitized by Google

vi. E poichè dal disconoscere tali difficoltà trassero origine, in tutti i tempi, lavori che, scambio di costituire un incremento del nostro patrimonio intellettuale, ebbero per deplorevole effetto di proiettare una luce sinistra sopra un nobilissimo soggetto di meditazioni, così, ad evitare si moltiplichino in avvenire, giudico convenga segnalarne francamente l'esistenza, chè il primo passo per superare un qualsiasi ostacolo è il determinarne con esattezza la natura e l'entità.

8. — Una disciplina, la quale disponga di metodi rigorosi e sicuri ed abbia dinnanzi a sè problemi determinati, per conquistare la dignità di scienza deve soddisfare ancora ad una condizione imprescindibile, quella cioè di non essere oggetto di pura e semplice curiosità o passatempo per gli sfaccendati, ma riuscire veramente *utile* alla società, chè a mo' d'esempio, alcuni ingegnosi e difficilissimi giuochi con carattere matematico, quantunque presentino questioni ben definite ed abbian procedimenti loro propri, non potranno mai aspirare ad un posto nel consesso delle scienze.

Ora la somma importanza della storia civile politica venne esplicitamente riconosciuta da CICERONE quando non esitò a proclamarla « maestra della vita », mentre la sua virtù educativa pei reggitori di popoli ed i capi di eserciti lo fu implicitamente dal primo NAPOLEONE, quando il 12 giugno 1812, mentre trovavasi a Schönbrunn, alle porte di Vienna, alla testa di un esercito vittorioso, emanava disposizioni per la composizione di una biblioteca storica da campo, destinata ad accompagnarlo in tutte le sue campagne.

Quanto si dice riguardo alla storia civile, politica, militare è generalmente ammesso, senza contrasto, per la storia della letteratura e per la storia della filosofia; per persuadersene, Signori, nulla v'ha di meglio che consultare i piani di studi delle Facoltà filosofico-letterarie di tutto il mondo civile.

Ora per quali ragioni attualmente si ritenga invece che il futuro fisico, il futuro chimico, il futuro matematico, il futuro naturalista possano giungere all'apice della loro carriera scolastica senza conoscere neppur le date più memorabili concernenti lo sviluppo della disciplina a cui intendono consacrare la vita e le personalità più eminenti che vi si consacrano? Ecco una domanda imbarazzante a cui indarno si cerca ragionevole risposta! Chè sembra efficacissimo mezzo per mantenere od evocare l'amore al sapere il far conoscere la genesi e l'evoluzione storica delle principali teorie, nonchè gli uomini che le crearono o perfezionarono, dissipando così la falsa (e pur così diffusa) opinione che la scienza sia sorta dal nulla, quasi per generazione spontanea, e siasi presentata così perfetta come Minerva quando uscì dal capo di Giove. Inoltre possiede il massimo interesse sociale l'accendere e conservare fiammeggiante

Digitized by Google

nei giovani il culto per il passato; ed invero l'umanità nella sua corsa sempre più rapida, affannosa, sfrenata verso il nuovo e l'ignoto, perde, calpesta, frantuma innumerevoli preziosissime gemme; onde il percorrere di nuovo, con lentezza studiata, il cammino già battuto è il mezzo più sicuro per rintracciare e raccogliere i tesori smarriti e che, miracolosamente, riuscirono a sottrarsi alla temuta rovina, o i semi tuttora ricchi di virtù feconda.

L'amorosa cura con cui in ogni tempo, non escluso il nostro, furono adunate in un tutto organico le opere dei più eminenti pensatori è, se non m'inganno, sintomo certo che molti scienziati, animati da un ben inteso spirito di conservazione, si propongono di attenuare le deplorevoli conseguenze della spensierata prodigalità di altri. Ma ciò ancora non basta! Oltre a mettere a portata di tutti le più eminenti produzioni dello spirito umano fa mestieri occuparsi e preoccuparsi anche delle opere minori, per notare le eventuali osservazioni sporadiche ivi sepolte, per scoprire e segnalare quali e quanti germi di scoperte posteriori siano ivi raccolti, per indicare e porre in evidenze le prime radici di certi concetti importanti ed i motivi per cui altri semi rimasero sterili. Sono le idee che governano il mondo!

> Fuga di tempi e barbari silenzi
> vince dal flutto delle cose emerge
> sola, di luce a secoli affluenti
> faro, l'idea (1).

Per ciò, il dissotterrare e riporre in circolazione importanti verità che, per caso o per nequizia, furono ingiustamente dimenticate e che è da presumersi siano capaci di esercitare qualche influenza sopra il progresso futuro dell'umanità, è impresa degna di plauso e di riconoscenza universale e perenne. Certamente simili ritrovati rappresentano i punti brillanti della ricerca storica; perchè colui che investiga le primitive forme di sviluppo di qualsia disciplina deve tenersi preparato a subire spesso ideali colloqui mediocremente piacevoli con personalità insignificanti. Ma a procedere, ciò non ostante, con coraggio ed entusiasmo può incuorarlo la ragionevole speranza d'imbattersi in qualcuno di quei capolavori ignorati e dimenticati, ancor così freschi da far ricordare quella regina della favola, che si addormentò un giorno nel suo castello incantato e sentì scorrere sopra di sè i secoli, senza che questi riuscissero a profanarne la sublime bellezza.

Ma poichè mi assale il dubbio, o Signori, che voi mi accusiate di estendere, senza buon diritto, a tutte le scienze positive ciò che vale per

(1) G. CARDUCCI, *La chiesa di Polenta.*

Digitized by Google

quella di cui io sono modestissimo rappresentante e che ha per sua notoria invidiabile prerogativa di avere una letteratura risultante da opere che resistono impavide al piccone demolitore dell'inesorabile critica moderna, uso di un mio diritto invocando, a sostegno del mio assunto, un'autorità contro cui nessuno osa ribellarsi, il CUVIER. Questo illustre scienziato ebbe, infatti, a dichiarare (1) essere la storia delle scienze naturali indispensabile ai naturalisti e stabilì siffatta tesi osservando che le teorie le quali stanno a fondamento di quelle scienze non sono già aprioristiche, ma riposano sopra innumerevoli fatti, ai quali non si perviene se non per via dell'osservazione; ora l'esperienza personale essendo di necessità limitata nel tempo e nello spazio, noi non riusciremmo a sapere che pochissimo ove ci restringessimo a sfruttare le nostre proprie esperienze, senza tener conto di quelle eseguite dai predecessori e registrate nei fasti della scienza. Ed aggiunse che la storia delle idee non può venire ragionevolmente disgiunta da quella dei pensatori e finalmente che essa, oltre ad essere eminentemente suggestiva, fa evitare l'ingente sperpero di tempo e di fatica rappresentato dagli inutili sforzi di coloro che vanno faticosamente alla ricerca di ciò che altri ha già da tempo scoperto.

Ebbene, chi mai potrebbe nutrire l'illusione di trovare validi argomenti per dimostrare tali modi di vedere antiquati o falsi?

9. — La difficoltà che rilevammo nello studio della storia delle scienza è forse la causa per cui questa trova oggi meno cultori di quanti ne annoverino gli altri rami dello scibile? A tale domanda io credo si debba senza esitazione rispondere negativamente, dal momento che gli ostacoli furono, sono e sempre saranno stimolo e sprone ai valorosi e agli audaci. E' dunque necessario cercare altrove la cagione di un fatto deplorato da tutti coloro che pensano non esservi più sicura guida verso l'avvenire dello studio assiduo del passato. Ora un motivo, a mio credere, potentissimo di quel fatto si trova in ciò che lo studio della storia di una scienza positiva non offre oggi a chi lo coltiva una « professione ». E per dimostrarlo io non ho che fare appello alla testimonianza di tutti coloro che, essendovisi consacrati con maggior impegno, possono e debbono essere citati quali testimoni della più decisiva importanza; non è forse vero che alla storia essi furono e sono costretti a dedicare soltanto una parte (e non la maggiore) della loro energia, essendo tenuti a riserbarne il più ed il meglio alle mansioni che lo Stato ha loro affidato? Non v'ha dubbio che essi, mentre, cedendo all'irresistibile pressione d'ineluttabili circostanze, si vedevano costretti ad organizzare una vita scien-

(1) *Histoire des sciences naturelles* (Paris, 1841) T. I, p. 12.

Digitized by Google

tifica che direi *in partita doppia,* con ben giustificato sentimento d'invidia avranno contemplati i colleghi a cui il destino non aveva affidato di rappresentare nel mondo l'increscIosa parte di Giano bifronte.

Tale doloroso stato di cose vietò, anche a coloro che erano da natura chiamati a farlo, di porsi risolutamente a capo di una scuola di storici della Chimica, della Fisica, delle Scienze naturali, della Matematica, e li avrà per fermo distolti dall'incoraggiare quei giovani, che dimostravano attitudini per le ricerche intorno all'evoluzione delle idee e dei metodi scientifici, ad incamminarsi per una strada fiancheggiata di piante rigogliosamente verdi, ma incapaci di offrire al viandante alcun frutto tangibile. Perchè (specialmente, ma non esclusivamente, in Italia) la storia di qualsia scienza positiva non apre l'adito ad alcuna « carriera »; sicchè è indubitato che MARCELLINO BERTHELLOT al di qua delle Alpi avrebbe atteso indarno venisse riconosciuto l'altissimo pregio delle famose pubblicazioni mediante cui egli ottenne la revisione del processo che aveva portato ad una condanna infamante degli alchimisti medioevali. Anzi la storia delle scienze incontra tali e tanti oppositori in Italia (in Italia, ove, all'opposto, la storia dell'arte va guadagnando costantemente terreno) che io sono convinto che ove ad una nostra Facoltà di scienze venisse presentato come titolo al conseguimento di Laurea in fisica uno degli eccellenti lavori di recente usciti dalla scuola del prof. WIEDEMANN, gli avvisi intorno alla loro ammissibilità sarebbero discordi e con tutta probabilità gli oppositori finirebbero per avere il sopravvento.

Ora sia lecito a me (a me che ormai volgo al termine della mia carriera accademica e nulla attendo da qualche mutamento negli ordinamenti che governano il pubblico insegnamento) di deplorare dal profondo dell'anima una tendenza in contrasto stridente con le tradizioni secolari di una terra che diede i natali a PIETRO COSSALI e GIAMBATTISTA VENTURI, a GUGLIELMO LIBRI ed a BALDASSARE BONCOMPAGNI, e di augurare si cessi finalmente di concedere agli stranieri il monopolio degli inestimabili tesori gelosamente conservati nelle nostre splendide biblioteche e di lasciare ad essi il nobile còmpito di rivendicare all'Italia invenzioni e scoperte, che ci furono rapite nei tristi tempi in cui la patria nostra veniva da tutti considerata come una vile terra di conquista.

10. — L'impossibilità di una « professione » e l'assenza di una « carriera » non bastano ancora a render ragione della scarsità di cultori della storia delle scienze positive. Una terza ve n'è ed a mio giudizio potentissima nella mancanza di guide sicure ad uso di coloro che intendono consacrarsi alla disciplina di cui ragiono; cosicchè la storia delle scienze gode oggi l'esclusivo privilegio (se privilegio può dirsi) che nessuno l'insegna, onde tutti debbono impararla a proprie spese. E per mostrare

Digitized by Google

quanto ingente sia il danno che da ciò deriva, mi basta invocare nuovamente la testimonianza di coloro che ormai sono a ragione riconosciuti e venerati quali maestri; e vorrei venissero qui a descrivere le lunghe fatiche da essi durate, le titubanze in cui versarono, il tempo e l'energia che sperperarono unicamente per la mancanza di una parola viva o scritta che li aiutasse nella ricerca dei metodi a cui attenersi, delle opere da consultare, dei problemi a cui maggiormente urgeva rivolgessero i loro sforzi. Ebbene, non è chi non vegga come il lasciare ad ogni principiante il difficile còmpito di tracciare e lastricare la via da percorrere e di costruire per proprio uso il veicolo destinato a trasportarlo sicuramente, sia un sistema che, oltre ad essere oltre ogni dire pericoloso, urta contro il « principio del minimo mezzo », che deve governare tutte le azioni individuali e collettive dell'uomo, ed in particolare contro il « principio dell'economia del pensiero », a cui tanta rinomanza assicurò il MACH.

Gli è quanto ha lucidamente percepito un eminente scienziato tedesco (alla cui memoria io invio un mesto e riverente saluto) ANTONIO von BRAUNMÜHL. Egli,nel nobile intento di gettare le basi di una vera scuola di storici della matematica, col consenso delle autorità scolastiche bavaresi, fondò nel Politecnico di Monaco un Seminario per le suindicate ricerche, il quale, in breve tempo, chiamò nel proprio seno numerosi e volenterosi investigatori e diede risultati di valore permanente; e fu irreparabile sventura che la morte colpisse il BRAUNMÜHL nel fiore della virilità e che nessuno assumesse di continuar l'opera a cui egli in breve tempo aveva prodigiosamente saputo imprimere un mirabile vigore di vita.

Ora se l'architettare, l'erigere, l'organizzare una istituzione del genere di quella che ebbe effimera esistenza nel Politecnico di Monaco è impresa irta di così gravi difficoltà da scoraggiare (almeno in Italia) i più animosi, ben più agevole riuscirebbe il compilare un *Manuale per le ricerche sopra la storia delle scienze positive,* chè il libro è indubbiamente il più comodo, il più economico, il più penetrante di tutti gli strumenti didattici.

Un siffatto *Manuale* dovrebbe anzitutto delineare nei suoi tratti generali il « Metodo storico » ed illustrarne l'andamento sopra la storia della letteratura; dovrebbe poi dare notizie particolareggiate sopra le opere biografiche e bibliografiche a ragione ritenute degne di fiducia, senza passare sotto silenzio alcune generalità sopra lo studio dei manoscritti, la storia del libro e l'ubicazione e l'organizzazione delle più cospicue biblioteche del mondo, con particolare riguardo a quelle ricche di opere scientifiche. Dopo questa, che direi *Parte generale,* nel desiderato *Manuale* dovrebbe trovarsi una *Parte speciale,* concernente esclusivamente la storia delle scienze; essa dovrebbe abbracciare, anzitutto, un'analisi com-

Digitized by Google

pendiosa delle principali opere sopra tale materia, nella quale ne fossero posti in evidenza i pregi e le manchevolezze; in seguito si dovrebbe trovare una chiara esposizione dei vari aspetti sotto cui si presenta l'indagine storica a norma che si tratti di investigare l'Antichità, il Medio Evo o l'Età moderna, l'Oriente o l'Occidente, con un elenco possibilmente completo delle questioni ormai risolute e di quelle che oggi richiamano maggiormente l'attenzione dei competenti.

Ma siccome la ricerca storica riveste caratteri ed esige attitudini differentissime a seconda dell'epoca che s'investiga, della lingua in cui sono scritte le opere da esaminare e anche della disciplina sulla quale si ferma lo sguardo, così il *Manuale,* di cui da tempo avvertii e feci sentire il bisogno pungente, dovrebbe di necessità essere, non opera individuale, ma il risultato del lavoro concorde di un manipolo di provetti specialisti (1). A tracciare il piano, eleggere i collaboratori e dirigere l'esecuzione di tale invocata impresa collettiva, meglio assai di un semplice privato, sembra destinato un sodalizio avente per intento di promuovere l'incremento del sapere e della cultura. Per ciò io fo voti ardentissimi che — quando questa mia proposta sia stata da voi, Signori, vagliata, discussa e, come spero, approvata — tale nobilissimo ufficio venga assunto dalla nostra Società per il Progresso delle Scienze, la quale, col deliberare l'istituzione nel presente Congresso di una Sezione consacrata esclusivamente alle indagini di carattere storico-scientifico, ha solennemente manifestato il proprio interesse per tale genere di studi, epperò sembra naturalmente destinata a farsi iniziatrice e tutrice di una impresa per la quale essa può sin d'ora fare sicuro assegnamento sopra la riconoscenza ed il plauso del mondo intero.

Raccontano che il primo costruttore di un mulino facesse incidere nel marmo, in prossimità del corso d'acqua motore, le seguenti parole che egli immaginava venissero pronunciate dalla Ninfa di quel ruscello:

« Povero schiavo! Rallegrati e riposati! Sono io che ora macinerò il grano in vece tua! »

---

(1) Questa proposta venne da me fatta per la prima volta in seno al IV Congresso dei matematici (Roma, 1908) mediante una Relazione che fu pubblicata negli ATTI dello stesso e riprodotta nel Vol. IX (III Ser.) *Bibliotheca mathematica* (1909) e nel 1 Vol. (1908) dell'*Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik.* Un grande editore tedesco si mostrò disposto a pubblicare il progettato volume e ne affidò a me la direzione; ma la guerra mondiale avendo resa ineffettuabile qualunque progetto di collaborazione internazionale, decisi di attuare da solo quel progetto, sia pure in proporzioni ridotte; così ebbe vita la mia *Guida alla storia delle matematiche* (Milano, 1916) [1935].

Digitized by Google

Ispirandoci, Egregi Colleghi, all'umanitario concetto che forma il midollo di queste parole, gettiamo oggi le basi di un'alleanza per rendere meno opprimente la fatica che tuttora attende l'investigatore nel campo della storia delle scienze, col provvederlo di un apparato che lo esoneri dall'inutile tormento di « macinare da solo il proprio grano ».

II.

INTORNO ALLO STATO ATTUALE DEGLI STUDI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Relazione presentata all' VIII Riunione (Roma 1916) della Società italiana per il progresso delle Scienze (1)

1. — CARNEADE da Cirene è debitore ad ALESSANDRO MANZONI di una notorietà così immensa da confinare con la vera e propria popolarità; ma egli ha pagata tale invidiabile ed invidiata prerogativa ad un prezzo veramente usurario. Il filosofo che i contemporanei non esitavano a porre al livello dei pensatori più originali; che a Roma, grazie ad alcune affascinanti conferenze da lui tenute, cominciò ad esercitare sopra la gioventù un'influenza talmente preponderante che ad un sospettoso governo parve pericolosa alla sicurezza dello stato; che oggi ci appare come un lontano precursore di un indirizzo di idee che ai dì nostri venne portato dal Poincarè alle sue più lontane conseguenze ed attrasse l'attenzione di tutte le classi di studiosi; quel filosofo brillante e geniale, per opera del sommo letterato lombardo, ha visto trasformato il proprio nome in appellativo comune per designare un personaggio dannato a perenne e ben meritata oscurità.

Ben più e meglio di CARNEADE potrebbe fungere come rappresentante della innumerevole classe di persone che non trovarono in sè stesse la forza per scuotere la incuriosa indifferenza dei posteri EUDEMO da Rodi, il cui nome si cerca indarno nelle più recenti edizioni dell'*Encyclopaedia Britannica*, benchè dai contemporanei venga dipinto per uno dei più distinti aderenti alla setta dei Peripatetici dopo la morte d'ARISTOTELE. Ora se gli storici della navigazione aerea fanno risalire a DE-

(1) Nel programma del Congresso che questa Società doveva tenere nel 1914 era stata inscritta una serie di Relazioni sopra lo stato degli studi storici intorno alle varie discipline costituenti lo scibile umano; il presente scritto inizia l'attuazione di tale progetto.

Digitized by Google

DALO ed ICARO il merito di avere aggiunta una dimensione al campo schiuso alle peregrinazioni dell'uomo, con ben maggiore ragione tutti i cultori della storia delle scienze positive debbono fare atto di riverenza di fronte ad EUDEMO che, con lo scrivere un libro di *Storie aritmetiche*, quattro di *Storie geometriche* e sei di *Storie astrologiche*, affermò nel modo più impressionante che le battaglie combattute nelle regioni serene del pensiero sono meritevoli di venire eternate, ad onore dello spirito umano, non meno di quelle cruente cantate da OMERO, a gloria perenne del valore dei Greci.

Con quali intendimenti EUDEMO scrivesse le proprie storie non ci è noto con precisione, chè probabilmente esse furono vittime innocenti del criminoso incendio che, a quanto si narra, distrusse nell'anno 370 la Biblioteca d'Alessandria d'Egitto. Tuttavia, l'unico frammento che ancora esiste di quelle *Storie,* benchè giunto a noi per via indiretta e dopo di avere subìte ogni sorta di deturpazioni, sembra attestare indiscutibilmente il concetto altissimo che quell'uomo egregio si era formato della missione affidata allo storico della scienza; sembra, infatti, che egli non ne limitasse l'ufficio al redigere un semplice elenco di nomi e di scritti, ma esigesse fosse da lui data precisa notizia di tutti i progressi compiuti dalle discipline di sua pertinenza; ora se tale induzione è — come sembra — conforme a verità, all'antica Grecia spetta, oltre a tanti altri, il merito di avere tracciata, anche nel ramo di scibile di cui ci occupiamo, la via destinata a guidare a glorioso porto.

2. — Benchè i sani criteri fissati con l'esempio da EUDEMO in generale non siano stati seguiti dai posteri, molti dei quali abbassarono il livello dello storico a quello del bibliografo e del collettore di aneddoti aventi per protagonisti i più eminenti studiosi, pure la storia delle scienze esatte nell'antica Grecia venne altrove coltivata in prosieguo di tempo con il più lodevole impegno, da dotti animati dalla speranza che le informazioni alle quali davano la caccia avrebbero servito a completare in qualche punto importante il quadro della cultura ellènica, la delineazione del quale fu sempre uno dei fini precipui che si proposero i cultori della classica antichità. E siccome la presente occasione non consentemi di segnalare se non gli avvenimenti di maggior rilievo (1), mi limiterò ad osservare come una pietra miliare della gran via costruita per

(1) Lo spazio di cui dispongo vietandomi di citare con precisione gli scritti a cui fo allusione, debbo rimandare il lettore, desideroso di più complete informazioni alla mia *Guida allo studio della storia delle matematiche* (Milano, 1916) apparsa fra i *Manuali Hoepli.*

Digitized by Google

giungere alla conoscenza della matematica greca sia rappresentata dalla celebre *Storia* del MONTUCLA, alla quale, per circa un secolo, attinsero a larga mano piccoli e grandi, senza neppure escludere i grandissimi, fra i quali campeggia gigante MICHELE CHASLES.

Ma, verso il 1870, da varie parti fu osservato come tutto l'edificio eretto dal venerando storico francese presentasse delle screpolature profonde che ne minacciavano la solidità e ne ponevano in dubbio la resistenza; gli è che, in massima parte, esso era stato eretto in seguito ad un esame superficiale di lavori di lettura incerta e di interpretazione così difficile da esigere l'impiego degli strumenti più potenti che, nel corso del secolo passato, si sono foggiati a proprio uso la critica e la classica filologia. Ora è merito non piccolo di C. A. BRETSCHNEIDER di avere per primo segnalate quelle manchevolezze e di essersi per primo adoperato ad ovviarvi. Il suo esempio venne ben presto seguito dall'ALLMAN in Inghilterra, dal DIELS in Germania, dal TANNERY in Francia, poi da HEIBERG, da ZEUTHEN, da RUDIO ed altri, i quali portarono a buon termine l'opera da lui iniziata.

Circa nello stesso tempo, eruditi di alta e meritata fama, quali il FRIEDLEIN e l'HULTSCH, oltre a quelli più sopra ricordati, applicando agli scritti degli antichi matematici i raffinati metodi critici usati dianzi con buon successo per fissare il testo delle opere relitte da poeti e prosatori greci, giunsero a porre a disposizione degli studiosi edizioni, da ritenersi per definitive, dei lavori tuttora esistenti dei matematici greci; e così somministrarono basi sicure alle future investigazioni sull'argomento. Come conseguenza di tutti questi assidui e geniali studi, la storia della matematica greca ha subìta in quest'ultimo mezzo secolo una metamorfosi radicale ed ha raggiunto un così elevato grado di perfezione che essa può servire come modello per qualunque produzione congenere. Con ciò non si vuole in nessun modo escludere che fortunate ricerche archivistiche e più profonde analisi dei testi già noti non possano guidare a nuovi importanti risultati (ed infatti alcuni documenti di recente scoperti in una Biblioteca di Costantinopoli hanno gettata gran luce sopra tutta l'opera matematica di ARCHIMEDE ed hanno permesso di fissare i lineamenti, dianzi incerti, di ERONE); vogliamo soltanto dire che le nostre cognizioni sopra l'opera matematica dei Greci è nel suo insieme conosciuta con tanta precisione che lo stato delle scienze esatte nell'Ellade antica può oggi essere descritto con la stessa sicurezza con cui s'insegna in tutte le scuole del mondo la storia politica e letteraria dei Greci e dei Latini. Per conseguenza ai matematici propensi agli studi storici va consigliato di lasciare, almeno per qualche tempo, in disparte le fiorite sponde dell'Ilisso, per dedicare le loro forze a coltivare terreni non ancora dissodati o meno

Digitized by Google

sfruttati: tanto più che la questione forse più importante che oggi presenta — quella, cioè, di arricchire l'elenco delle personalità di second'ordine che indubbiamente operarono al seguito di EUCLIDE, ARCHIMEDE, APOLLONIO, ERONE e DIOFANTO — non esige un corredo di cognizioni matematiche superiori a quelle di cui generalmente dispongono i cultori della classica filologia, onde sembra consigliabile lasciarla e raccomandarla alle sapienti cure di questi.

3. — Un'osservazione diametralmente opposta a quella testè fatta intorno allo stato attuale della storia della matematica presso i Greci, può farsi intorno al Medio Evo, periodo di misteriosa e complessa elaborazione degli elementi barbarici sopra le rovine del mondo classico; giacchè si tratta di tempi avvolti in oscurità profonda, la cui storia scientifica offre, a chi tenti decifrarla, difficoltà non minori di quelle che ne presenta la storia politica e civile. Non minori, giacchè lo scienziato che studia l'Età di Mezzo è in condizione non dissimile da quella in cui si trova l'ardito alpinista che percorre una cresta stendentesi fra due baratri profondi: uno rappresenta il pericolo di abbandonarsi al disprezzo per tempi i quali, paragonati al nostro, mostrano la più squallida miseria di pensiero; l'altro quello di esagerare il significato e la portata di accenni vaghi e nebulosi, interpretandoli come anticipazioni coscienti di ritrovati assai posteriori. Il primo di tali pericoli non seppero scansare coloro che semplicemente cancellarono il Medio Evo dalle storie del pensiero scientifico; mentre incapparono nel secondo coloro che trasformarono RUGGERO BACONE in un precursore dei fratelli WRIGHT, in un divinatore delle recenti teorie degli joni e degli elettroni. A conferma delle difficoltà che presenta lo studio della matematica medioevale stanno alcune gravi questioni storiche che da tempo si dibattono; alcune hanno la loro culla nelle opere di BOEZIO e GERBERTO, altre hanno per fine la determinazione del posto che spetta a NICOLA ORESME nella storia della geometria analitica.

Allo stato attuale delle nostre cognizioni un'oculata prudenza impone di astenersi dal pronunziare ogni sorta di giudizi sintetici sopra quell'epoca tenebrosa, limitandosi a togliere dalle biblioteche e dagli archivi ove giacciono sepolti i manoscritti di lavori che sembrano dotati di maggior valore, seguendo così l'esempio che ci diedero BALDASSARE BONCOMPAGNI ed ENRICO NARDUCCI, il FRIEDLEIN ed il TREUTLEIN, l'ENESTRÖM ed il DUHEM, l'instancabile MASSIMILIANO CURTZE ed AXEL BJORNBÖ, troppo presto rapito alle speranze di tutti coloro che beneaugurando, ne ammiravano la feconda attività. Al seguire tali esempi noi italiani siamo in particolar modo chiamati, noi le cui biblioteche sono rigurgitanti di manoscritti inesplorati, noi a cui incombe il dovere di

Digitized by Google

proiettare piena luce sopra l'evoluzione dell'algebra nell'epoca interposta fra LEONARDO FIBONACCI e LUCA PACIOLI (1).

4. — Altro obbligo a cui noi non possiamo sottrarci è quello di contribuire alla conoscenza della matematica bizantina, che l'HEIBERG ha cominciato a rivelare al mondo, facendone risaltare l'importanza per coloro che cercarono le vie attraverso le quali la scienza greca si diffuse nel resto d'Europa. Fra tali vie una ampia e lunghissima venne aperta e percorsa dagli Arabi, da questo popolo ardente ed irrequieto, intelligente e straordinariamente dotato di qualità assimilatrici che gli permisero di salvare dalla distruzione che le minacciava un cospicuo numero di grandi produzioni del popolo ellèno. Ora, alla conoscenza di questa strana fulgidissima meteora suscitata dal genio di MAOMETTO, contribuirono, per quanto concerne le scienze esatte, efficacissimamente, mediante versioni, edizioni, commenti, il WOEPCKE, il SÉDILLOT, il MARRE ed il non mai abbastanza compianto ERMANNO HANKEL; vi contribuiscono tuttora con impegno, che è da augurarsi si mantenga sempre vivo, il WIEDEMANN, il CARRA DE VAUX, il SUTER, il BESTHORN ed il nostro NALLINO.

Ma vi è un altro popolo oriundo dell'Oriente che durante la tenebra medioevale seppe tenere accesa la face della ricerca scientifica; un popolo che da circa due millenni, avendo perduta l'unità politica, vide l'incessante azione che andava spiegando in pro della cultura. confusa con la civiltà di altri popoli. Tuttavia, le illuminate ricerche dello STEINSCHNEIDER, del WERTHEIM, dello SCHAPIRA, a cui seguirono altre di data più recente del LANGE, del CARLEBACH, del GUIMARAES e del DUHEM, seppero porre nella debita luce non pochi contributi dati alle scienze esatte dal popolo d'Israele, i quali fan fede che questo sentiva per le matematiche in generale un interesse analogo a quello per l'astronomia, di cui lo SCHIAPARELLI trovò delle prove impressionanti nell'Antico Testamento. Ora, malgrado gli scritti degli storici succitati, l'opera degli Ebrei durante il Medio Evo presenta un grande numero di enigmi e lacune che sarebbe urgente sciogliere e colmare. A dimostrare che lavori in tal senso riuscirebbero largamente remuneratori, basti ricordare che soltanto di recente si è scoperto come l'inventore del celebre « baculus astronomicus » — quello strumento semplice quanto utile, mediante cui il REGIOMONTANO nel 1472 compì le famose osservazioni astronomiche che diedero il colpo di grazia alla teoria eudossiana delle sfere omocentriche —

(1) Questo periodo é così oscuro che R. BOMBELLI asseriva nella prefazione della sua reputatissima opera *L'Algebra* (Bologna, 1579): « Scrisse poi dopo questo » [Diofanto] « (ma ci fù grande intervallo di tempo) LEONARDO PISANO in Idioma latino ne doppo di lui alcuno ci è stato, che cosa buona habbia detto sino à frate LUCA suddetto, il quale ecc. ».

Digitized by Google

è LEVI BEN GHERSON, personalità eminente che ha diritto di un posto nelle future storie dell'aritmetica e della trigonometria. Ora tutto fa credere che il LEVI non sia stato un pensatore isolato, che, al contrario, egli abbia appartenuto ad un gruppo di correligionari come lui viventi in Provenza, come lui animati dalla fiamma della ricerca del vero matematico, ma che, meno fortunati di lui, videro i loro nomi (per usare una frase di KEATS) « scritti nell'acqua » ; tale supposizione è dessa conforme al vero? In tal caso, come era composto quell'ipotetico gruppo, e quali furono le relazioni che si stabilirono, le influenze che si manifestarono fra i suoi membri ed i contemporanei di altra stirpe? Ecco altrettante questioni della più alta importanza che si presentano, direi anzi s'impongono, agli storici della matematica, sulle quali, pertanto, ho creduto opportuno di richiamare la loro attenzione nell'occasione che oggi mi si offre.

5. — Al popolo d'Israele si collegano naturalmente, quando studiasi l'alba della civiltà, gli Egiziani ed i Babilonesi.

Intorno ai primi, sino ad un mezzo secolo fa, nulla sapevasi di preciso, mentre era vivissimamente desiderato conoscere l'opera scientifica di un popolo a cui i Greci, per loro (forse troppo generosa) dichiarazione, hanno attinto i semi della lussureggiante loro produzione scientifica. Ora, per quanto concerne le matematiche, tale brama venne, almeno in parte, soddisfatta nel 1877, quando l'EISENLOHR, col valido aiuto di MORITZ CANTOR, riuscì a decifrare un papiro, scritto circa quattromila anni or sono da un mediocre scolaro di quel tempo; benchè non tutti abbiano accettata l'interpretazione proposta di quanto ivi si legge, pure quel venerando documento, insieme ad altri congeneri dati in luce più tardi, permise di formarsi un concetto abbastanza preciso della geometria insegnata sulle rive del Nilo, e di ricostruire con notevole esattezza l'aritmetica pratica in uso nella terra dei Faraoni. Anzi, poichè siffatte ricerche ispirarono alcuni nuovi studi di spettanza della teoria dei numeri, resta una nuova volta dimostrato come la storia della scienza, oltre ad un indiscutibile valore dottrinale, possegga la dote importante di grande suggestività; a ragione, per tanto, un poeta forte e gentile, FEDERICO SCHILLER, ha affermato che *tutto è frutto, tutto è seme.*

Più scarse ed imprecise sono le nostre cognizioni intorno al livello raggiunto dalle matematiche nella terra bagnata dal Tigri e dall'Eufrate; però le poche iscrizioni cuneiformi sino ad oggi scoperte (1), e che per primo il GROTENFELD insegnò ad interpretare, attestano l'impegno spiegato colà nell'osservare e calcolare il corso degli astri, non già (e ciò sia detto per gettar qualche luce sopra la psicologia di quegli antichi popoli) per

(1) Oggi sono molte e nella loro spiegazione s'illustrò O. NEUGEBANC [1935].

Digitized by Google

effetto di una disinteressata curiosità dottrinale, ma per il desiderio insaziabile di trarne sicuri presagi intorno alla sorte futura di individui e di regni. Le poche pietre incise, sinora scoperte e decifrate, fanno fede della preferenza che per l'aritmetica nutrirono i popoli che nell'antichità più remota abitavano nell'Asia Minore; ora siccome questa terra veniva sino al 1914 (e sarà nuovamente quando verrà chiusa l'attuale sanguinosa parentesi), sia pure a scopo quasi esclusivamente commerciale, sempre più di frequente percorsa ed investigata, così vi è fondata speranza che la raccolta dei documenti congeneri sia per aumentare rapidamente, a complemento delle nostre deficienti cognizioni sull'argomento. Anzi, poichè fra le nazioni che, prima che scoppiasse l'attuale conflitto, manifestarono intendimento di estendere il proprio dominio in quella direzione figura la patria nostra, così è presumibile ed augurabile che, ristabilita la pace nel mondo, anche l'Italia saprà figurare degnamente in un campo di studi dal quale si mantenne sinora assente.

6. — Se noi ora abbandoniamo le rive del Mediterraneo e procediamo verso Oriente incontriamo un'altra terra che da secoli ha dimostrata una spiccata attitudine per le matematiche. E' l'India, che gli eserciti vittoriosi di Alessandro Magno seppero porre in diretto contatto ideale con la civiltà e la scienza dei Greci. Che essa non siasi limitata alla parte modesta di semplice alunna dell'Europa, ma abbia saputo affermarsi come dotata di indiscutibile originalità, è dimostrato dal sistema numerale a base 10 che seppe forse concepire e certamente far adottare da tutto il mondo civile; è confermato poi da alcune eccellenti opere aritmetiche e geometriche, le quali, tradotte in inglese all'inizio del secolo passato da STRACHEY e COLEBROOKE, attrassero subito l'attenzione di uno storico di primo ordine, MICHELE CHASLES. Da quel momento la terra bagnata dal sacro Gange fu oggetto di indagini da parte di scienziati e di filologi: a dimostrar ciò mi limito a richiamare l'attenzione dei miei benevoli ascoltatori sopra un dottissimo volume che di recente D. E. SMITH e L. C. KARPINSKI hanno dedicato alle cifre indiane. Tuttavia vi sono fondate ragioni per credere che tutti i risultati che diedero le indagini degli Orientalisti sopra le opere matematiche scritte in sanscrito non abbiano ancora conseguita una completa notorietà fra gli storici della matematica; sicchè è probabile che anche coloro che descrissero lo stato dell'algebra e della geometria presso i seguaci di Buddha abbiano lasciate più lacune di quante sia oggi possibile di colmare. Precipua cagione di tale deplorevole fatto deve ricercarsi nell'essere stati i lavori che avrebbero potuto servire a colmarle pubblicati in atti di società esclusivamente letterarie ed in periodici di filologia, di storia e persino di esegesi biblica, cioè in raccolte così lontane dal campo in cui si aggi-

Digitized by Google

rano le ricerche matematiche che nemmeno le più reputate effemeridi di bibliografia scientifica ne diedero regolare notizia. Possa tale osservazione (la cui portata può estendersi in modo da abbracciare anche altri popoli extra-europei) spingere qualcuno in grado di farlo ad ovviare al segnalato inconveniente, almeno compilando una bibliografia dell'argomento, capace di servire di fondamento per un lavoro esauriente intorno alle scambievoli influenze che, da circa due millenni, si sono esercitate fra l'Europa e l'India.

7. — Proseguendo in questa nostra peregrinazione verso Oriente arriviamo ad altri due grandi popoli, il Cinese ed il Giapponese, per opposte ragioni estremamente interessanti: uno perchè, se si presta fede ai racconti degli storici indigeni o che a fonti indigene attinsero, avrebbe raggiunto, con le sole proprie forze, un grado di sapere e di cultura paragonabile a quello toccato dall'Europa due o tre mila anni più tardi; l'altro perchè nel 1868, sedotto dallo spettacolo offerto dalla nostra civiltà, abbandonò improvvisamente le costumanze e le idee che aveva ereditate dai suoi maggiori, per uniformarsi al modo di pensare europeo. Ora, malgrado alcune buone pubblicazioni sull'argomento, la storia della matematica in quelle lontane regioni è nota assai imperfettamente, numerosissime essendo le questioni non pienamente risolute che essa presenta. Fra esse spiccano, per la Cina, quella di decidere quanto fondate siano le pretese, che essa accampa, di avere precorsa l'Europa nella miglior parte delle invenzioni e delle scoperte di cui noi andiamo non a torto orgogliosi; per il Giappone di determinare se i metodi di ricerca matematica che ivi venivano seguiti prima che quel paese si fosse del tutto europeizzato, siano veramente autoctoni, oppure se si deve in essi riconoscere una non confessata infiltrazione cinese od europea. Tali questioni attrassero in questi ultimi tempi l'attenzione dei competenti, come stanno a provarlo alcune pubblicazioni, cominciate col Congresso internazionale dei Matematici tenutosi a Parigi nel 1900, che portano la firma degli eruditi giapponesi FUJISAWA, KIKUCHI, MIKAMI e HAYASHI; grazie ad essi si trovano a disposizione di tutti una buona raccolta di attendibili informazioni le quali, anche se non valsero a fugare la nebbia che tuttora avvolge il paese del Sole Levante, servirono a dare un'idea chiara degli algoritmi ivi in uso prima dell'adozione dei nostri e rivelarono alcune gravi deficienze che offriva la mentalità scientifica dei suoi abitanti, almeno avanti che questi si schierassero francamente a fianco dei popoli europei. Un pregevole volume non ha guari pubblicato da un professore giapponese, YOSHIO MIKAMI, col valido concorso di un suo collega americano, DAVID EUGENE SMITH, riassume e completa quanto si trova nelle ricordate pubblicazioni, epperò, tacitamen-

Digitized by Google

te ed indirettamente, segnala i punti sui quali dovrà di preferenza esercitarsi l'azione illuminatrice degli storici futuri.

8. — Dopo questa rapidissima corsa attraverso l'Asia, ritorniamo in Europa, che, scossa l'antiscientifica dominazione romana ed uscita fuori dalla caligine medioevale, a partire dal Rinascimento, cominciò a risentire potenti gli stimoli per la ricerca del vero, specialmente nel campo matematico.

Grazie alle notissime pubblicazioni del COSSALI, del LIBRI, del BONCOMPAGNI e di altri, ci è noto come l'algebra sia stata trapiantata in Italia e come l'esotica pianta abbia trovato sotto il nostro cielo condizioni propizie ad una lussureggiante fioritura; a dimostrar ciò basta tener presente come, per merito di LEONARDO FIBONACCI, LUCA PACIOLI, NICOLÒ TARTAGLIA, SCIPIONE DAL FERRO, GEROLAMO CARDANO, LUDOVICO FERRARI, RAFFAELE BOMBELLI, nonchè di molti altri investigatori di minore levatura, la teoria delle equazioni algebriche letterali abbia toccato, appunto in Italia, l'estremo limite che può raggiungere senza invadere lo sconfinato campo delle funzioni trascendenti. Più tardi, grazie alle immortali ricerche di un VIÈTE, di un DESCARTES, di un FERMAT, scettro e corona del regno algebrico passano dall'Italia alla Francia; ciò non ostante le nostre gloriose tradizioni non vennero interrotte del tutto, giacchè uno studio minuto e profondo della letteratuta matematica italiana guida alla scoperta di un'ascosa catena che connette i matematici del periodo aureo dell'algebra italiana ad ENRICO BETTI e FRANCESCO BRIOSCHI, passando attraverso a LAGRANGE e RUFFINI. Dissotterrare tutti gli anelli di questa catena ed in pari tempo far noti tutti i contributi dati dai matematici italiani alla costituzione dell'analisi moderna ed alle attuali cognizioni intorno all'estensione figurata, col portare a termine la *Storia delle Matematiche* in Italia così brillantemente iniziata da GUGLIELMO LIBRI, ecco un còmpito che viene raccomandato da tutti coloro a cui stanno a cuore l'onore della nostra cara patria e gl'interessi della scienza a cui consacrammo le nostre forze.

Per quest'opera di lunga lena non mancano numerosi ed ottimi lavori preparatori.

Così GALILEO, i suoi tempi, i suoi amici e nemici sono, grazie alle meritorie fatiche di ANTONIO FAVARO, conosciuti con un'ampiezza, una profondità, una precisione capaci di soddisfare le più raffinate esigenze; mancherebbe soltanto che il Governo italiano, dopo di avere sovvenuta un'edizione degli scritti di quel Grande, la quale riuscì per ogni rispetto soddisfacente, compisse l'opera iniziata, proteggendo la pubblicazione integrale degli scritti dei suoi discepoli e del carteggio tenuto dall'Accademia del Cimento.

Così la multiforme produzione scientifica di LEONARDO DA VINCI

Digitized by Google

fu oggetto di studi assidui, geniali e che ancora continuano, a partire dal giorno in cui GIAMBATTISTA VENTURI, con generale stupore, affermò essere tale opera degna di reggere al paragone di quella che fecero collocare l'autore della *Gioconda* e della *Cena* fra i principi del pennello; tali studi non potranno condurre a conclusione universalmente accettata sino a che non sia compiuta l'edizione nazionale degli scritti di quel grande, deliberata dal nostro Governo ed in via di esecuzione; ad esempio soltanto allora si potrà sperare in una soluzione esauriente delle questioni relative alle fonti alle quali si abbeverarono gli instauratori della teoria dei moti e delle forze, che il DUHEM ha da poco poste all'ordine del giorno.

Meno conosciuto, epperò più interessante del XVII è il secolo XVIII, dallo studio del quale si trarranno gli elementi per determinare esattamente quale sia stata l'attitudine assunta dalla patria nostra di fronte al calcolo infinitesimale e quali furono i contributi che essa arrecò alla novella disciplina. « Le scienze matematiche », scriveva il BRIOSCHI nel 1865, « ebbero in Italia, nella seconda metà del secolo scorso, valentissimi cultori, le opere dei quali, poco note fra noi, sono quasi sconosciute presso gli stranieri. La storia delle matematiche in questo periodo è così strettamente legata a quella delle nostre Accademie scientifiche, che soltanto frugando con diligenza negli Atti della Società Italiana delle Scienze, in quelli delle Accademie di Torino, di Bologna, dei Fisiocritici di Siena, ecc. possiamo formarci un chiaro concetto del fiorire fra noi di questi studi in quell'epoca..... Non v'ha dubbio che un lavoro intorno ai progressi delle matematiche in quell'epoca, nel quale si ponesse in evidenza la molta parte che vi ebbero gli italiani, sarebbe non solo utile dal lato scientifico, ma per l'Italia risorta a nazione potrebbe ritenersi il soddisfacimento di un debito di gratitudine » (1).

Cinquant'anni trascorsero dal giorno in cui il sommo analista scrisse queste belle parole, senza che il suo voto sia stato nel suo insieme soddisfatto; tuttavia ricerche sparse condussero a risultati particolari degni di ogni considerazione. Così il BURCKHARDT ed il BORTOLOTTI si adoperarono a porre in piena luce le benemerenze scientifiche di PAOLO RUFFINI, le opere del quale sono in corso di stampa sotto gli auspici del Circolo matematico di Palermo. Similmente il brillante manipolo di geometri capitanato dal SACCHERI e dai due fratelli CEVA, per merito specialmente di MICHELE CHASLES, di LUIGI CREMONA, di EUGENIO BELTRAMI e di ALBERTO PASCAL, occupa ormai il posto che gli spetta nella storia delle matematiche. Finalmente le benemerenze di LAGRANGE, scien-

(1) V. la memoria *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado* (Annali di Matematica T. V. della I Serie, oppure *Opere*, T. II, p. 39).

Digitized by Google

ziato di cui ormai nessuno contesta la nazionalità, sono riconosciute ovunque gli studi matematici siano tenuti nel debito onore; però da più parti s'invoca un nuovo accurato esame dei suoi manoscritti esistenti nella Biblioteca dell'Istituto di Francia, per trarne le nuove gemme ivi indubbiamente sepolte. Una parola va anche spesa in memoria della scuola che ebbe a duce NICOLA FERGOLA come quella che rappresenta il primo contributo dato alle matematiche da provincie che, durante il secolo XIX, tanto efficacemente operarono a vantaggio delle scienze esatte. L'esistenza di tale confraternita scientifica fa nascere la questione se altre analoghe siano sorte nelle altre regioni in cui la patria nostra era divisa; in caso affermativo, quale influenza esercitarono sopra lo sviluppo della scienza e sopra il pubblico insegnamento e quali relazioni mantennero fra di loro e con gli scienziati ultramontani. Ecco altrettanti problemi, tuttora intatti e così importanti che da soli bastano a stabilire la straordinaria importanza del lavoro consigliato dalla parola saviamente ammonitrice di FRANCESCO BRIOSCHI.

9. — Giova qui rilevare come la lacuna esistente nella nostra letteratura, per la mancanza di una storia generale delle matematiche in Italia, non sia deplorevole e deplorata prerogativa della patria nostra, chè nessuna delle maggiori e ben poche delle minori fra le nazioni civili possiedono lavori del tipo di quello che io desidero ed auguro per l'Italia. Infatti nessuno si è accinto a narrare la storia delle matematiche in Francia ed in Inghilterra, e quella del GERHARDT relativa alla Germania non corrisponde all'ampiezza ed importanza del soggetto. Invece alla matematica presso i Belgi dedicò due preziosi volumi uno scienziato di alta fama, A. QUETELET, e saggi analoghi consacrarono ad alcune regioni della Svizzera R. WOLF, il GRAF e l'ISELY. Come scritti efficacemente preparatori a storie nazionali vanno qui ricordati alcuni pregevoli lavori di bibliografia matematica: sono dovuti al RICCARDI, per l'Italia, al BIERENS DE HAAN, per l'Olanda, al GUIMARAES, per il Portogallo, ed al NIELSEN per la Danimarca.

Del resto è bene notare come il sistema delle storie regionali o nazionali di una scienza così ampiamente coltivata e variamente estesa come è la matematica, se è consigliabile per epoche anteriori alla metà del secolo scorso, diventa ingiustificato e forse del tutto inapplicabile per il periodo seguente, ove una stessa teoria venne contemporaneamente coltivata da studiosi di nazionalità differenti. Siccome, d'altronde, le matematiche nel detto periodo si elevarono ed estesero talmente che a ben pochi è dato di comprendere e giudicare tutte le produzioni allora apparse, così è probabile che verrà piuttosto data la preferenza a storie di speciali teorie. Sintomi di siffatta orientazione sono offerti da recenti pub-

Digitized by Google

blicazioni che il MUIR dedicò allo sviluppo storico dei determinanti ed il BRAUNMÜHL alla trigonometria, che colui che ha l'onore di parlarvi consacrò alle diramazioni più alte del grande albero della geometria e che scrissero il SOMMERVILLE sulla geometria non euclidea e D. E. SMITH sui primi libri di aritmetica che ebbero l'onore della stampa.

Altri sintomi della medesima orientazione si riconoscono in alcune relazioni redatte da eminenti scienziati per iniziativa della « British Association for the Advancement of Science » e pubblicati nei suoi *Reports*; basta che io ricordi fra essi quello di J. H. S. SMITH sulla teoria dei numeri, del CAYLEY sopra alcuni problemi di dinamica e del GLAISHER sopra le tavole numeriche, per dimostrare come si sia in presenza di una raccolta splendida, che è titolo d'onore per il sodalizio che la promosse e che dovrebbe servire come modello per lavori congeneri e destare l'emulazione delle Società dello stesso tipo, in particolare della nostra, la quale presenta tante profonde rassomiglianze col venerabile sodalizio britannico.

Possono gareggiare con gli or citati *Reports* i *Berichte* pubblicati per iniziativa della « Deutsche Mathematiker-Vereinigung », alcuni dei quali anzi, per essere più documentati e voluminosi delle analoghe pubblicazioni inglesi, sono in grado di rendere servigi ancora più preziosi: a riprova di tale asserto basta citare i lavori a tutti noti dell'HILBERT sopra la teoria dei corpi algebrici, del BURCKHARDT sopra le funzioni oscillanti e del SCHÖNFLIES sulla teoria degli insiemi; aggiungerei quello di E. KÖTTER sopra la geometria projettiva ove egli, portando a compimento la grandiosa opera intrapresa, avesse offerto

. . . . . il pasto
Di cui largito ci aveva il desio.

10. — A questi preziosi ausiliari, in parte di natura bibliografica, fanno riscontro altri, ancora più numerosi, i quali si riferiscono piuttosto all'*uomo* che agisce che all'*opera* che egli produce: essi costituiscono la letteratura biografica, che è oggi di una ricchezza e di uno splendore che sfida qualunque descrizione. Per formarsene un concetto basta riflettere che da tempo tutti i sodalizi scientifici e tutte le scuole di grado superiore pubblicano nei loro Atti biografie di coloro che ne fecero parte; si aggiunga che numerosissimi sono i dizionari biografici, sia generali che speciali (in particolare nazionali) e che anche le Enciclopedie generali (nonchè alcune di quelle relative ad una sola specialità) danno notizia dei casi della vita e dell'opera scientifica dei più egregi pensatori. Ora molti scritti biografici sono geniali e profondi e portano la firma di personalità illustri, onde costituiscono preziosi elementi per la storia d'un ramo di scienza, chè ben si può dire che la biografia è per la storia ciò

Digitized by Google

che la molecola è rispetto al corpo. Questo apprezzamento intorno al valore di tali scritti storici minori spiega l'esistenza di estese opere bio-bibliografiche, preziose opere di consultazioni che sinora non furono sempre sufficientemente apprezzate ed utilizzate dagli storici della matematica.

Questa breve enumerazione degli strumenti che si trovano oggi a disposizione dello storico sarebbe imperfetta se non contenesse un cenno delle Opere complete e dei Carteggi scientifici e famigliari di sommi matematici, che si moltiplicarono in questi ultimi tempi, non solo come postumi omaggi a grandi defunti, ma anche per aumentare la benefica influenza dei loro scritti. Allo stesso scopo vennero recentemente iniziate collezioni di lavori scientifici reputati classici; fra esse eccelle quella ideata e fondata dall'OSTWALD in Germania; le analoghe intraprese da altre nazioni non possono prestare sino ad oggi aiuto alcuno al matematico, onde non è il caso di parlarne (1).

11. — Articoli relativi alla storia delle matematiche s'incontrano negli atti di tutte le accademie, grandi e piccole, nonchè in quasi tutti i periodici consacrati alle scienze esatte: come esempi citerò le numerose comunicazioni fatte da CHASLES all'Istituto di Francia e quelle che va facendo E. WIEDEMANN alla Società fisico-medica di Erlangen, nonchè alcuni lavori del MARTIN nei vecchi *Annali di Matematica* e del CURTZE nei *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

Ora la difficoltà che presenta il conoscere per intero materiali così disseminati e l'importanza sempre maggiore che andò assumendo la disciplina di cui ragioniamo rese manifesta l'imprescindibile necessità di organi che si occupassero esclusivamente di essa.

Il più antico tentativo in siffatta direzione è, se non c'inganniamo, rappresentato dal « Bulletin de bibliographie » che un bonario erudito di stampo antico, il TERQUEM, fece uscire, durante una dozzina d'anni, in appendice alle *Nouvelles Annales de Mathématiques*; i lavori ivi accolti sono di piccole dimensioni e sembrano avere soltanto lo scopo di diffondere, specialmente fra i giovani, ghiotti particolari intorno allo sviluppo storico dell'algebra e della geometria e alle vicende della vita di coloro che s'illustrarono coltivandole.

Una indiscutibile analogia con tale pubblicazione presenta l'*Historisch-literarische Abtheilung* della *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, concepita e per lunghi anni diretta dal Nestore degli storici della matema-

(1) Dopo la lettura della presente Relazione venne a mia conoscenza la promettente raccolta intitolata *The Open Court Series of Classics of Science and Philosophy*, nel cui n. 1 si trovano raccolte le memorie di G. CANTOR sui numeri transfiniti, per cura di PH. E. B. JOURDAIN.

Digitized by Google

tica; però i lavori pubblicati sotto la direzione del CANTOR sono di estensione e d'importanza di gran lunga superiore a quelli che apparvero sotto il patrocinio del TERQUEM; alcuni anzi di quelli presentati per la stampa assunsero tali proporzioni che, per pubblicarli *in extenso*, fu necessario fondare una nuova raccolta complementare, le *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, raccolta la quale comprende ormai una trentina di fascicoli, che lo storico deve avere sempre sottomano.

Ma, prima della fondazione di quest'ultima collezione, e precisamente nel 1868, BALDASSARRE BONCOMPAGNI cominciò a pubblicare il celebre suo *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*, a cui, durante un ventennio, con pazienza da benedettino, consacrò il proprio tempo e la propria sconfinata erudizione e, con munificenza da vero principe romano, dedicò buona parte delle proprie sostanze. Ora la straordinaria importanza di questa monumentale pubblicazione proviene tanto dai lavori raccolti nei suoi venti volumi, quanto nell'avere ivi il direttore ed i collaboratori predicato con l'esempio l'imprescindibile necessità di dare alle ricerche intorno all'evoluzione delle scienze fisico-matematiche basi di granitica solidità, fondandole sopra lo studio diretto delle fonti ed esponendole col corredo di esatte citazioni; e se anche coloro che vennero dopo il BONCOMPAGNI apportarono qualche necessaria modificazione formale ai suoi procedimenti, l'indirizzo generale da lui dato si è conservato inalterato: ad esso si deve in gran parte se la storia delle matematiche è a nessuna seconda nel complesso delle storie dedicate a qualche scienza speciale.

Cessato, fra il generale rimpianto, il *Bullettino Boncompagni*, non tardarono a sorgere riviste congeneri intese a colmare, per quanto è possibile, il vuoto da esso lasciato. Uno è la *Bibliotheca mathematica* fondata nel 1887 da G. ENESTRÖM e che, sino al principio del corrente secolo, trasse vita modesta ma non ingloriosa a Stockholma, e che poi, trasportati i propri Penati a Lipsia, venne a soddisfare il voto da tempo generalmente formulato che vedesse la luce un periodico storico delle matematiche concepito in grande stile: le aspettative non furono deluse; soltanto si desidererebbe che la *Bibliotheca mathematica* porgesse notizie veramente complete intorno a tutto quanto si pubblica sopra la storia delle scienze esatte (1).

Per surrogare, in parte almeno, l'effemeride del BONCOMPAGNI e per offrire agli studiosi italiani una rivista di bibliografia matematica, apparve nel 1898 il *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, il quale,

(1) Soltanto a lettura compiuta appresi con dolore che la *Bibliotheca mathematica* era cessata causa le difficoltà dei tempi.

Digitized by Google

coi suoi diciassette volumi sinora usciti, sta a dimostrare come nella patria del BONCOMPAGNI sia sempre accesa la fiamma di cui egli si elesse austera Vestale.

In tempi ancor più vicini a noi cominciarono a pubblicarsi altre due riviste interessanti lo storico della matematica, ma che hanno un programma più vasto di quelle dianzi citate: alludiamo all'*Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*, che da qualche anno si pubblica in Germania, ed all'*Isis*, fondata nel 1913 da GIORGIO SARTON nel Belgio e violentemente interrotta in conseguenza dell'immane guerra che oggi divampa in Europa: auguriamo che ritornata la pace e ricostituito quel piccolo ma valorosissimo stato, *Isis* risorga dalle sue ceneri fumanti e riprenda il volo che aveva orgogliosamente spiccato (1).

12. — L'idea di delineare e colorire un quadro completo dello sviluppo storico delle matematiche è siffattamente nobile e grande che da tempo ha sedotto buon numero di valentuomini; fra quelli che ebbero il coraggio di affrontare le straordinarie difficoltà che ne presenta l'attuazione ricorderò (lasciando in disparte coloro che si limitarono ad introduzioni storiche per trattati scolastici) HEILBRONNER, MONTUCLA, KÄSTNER, BOSSUT, FRANCHINI, ARNETH, SUTER, CANTOR, MARIE, ZEUTHEN e GÜNTHER; nè va dimenticato ERMANNO HANKEL, quantunque una morte immatura gli abbia vietato di fondere in un tutto organico i frammenti dell'opera a cui consacrava tutti gli istanti lasciati liberi dalle sue feconde elucubrazioni scientifiche.

A tutti questi scritti — persino ai più antiquati e concepiti con criteri diametralmente opposti a quelli oggi adottati — si può e si deve ricorrere con fiduciosa speranza, perchè, in seguito ad accurato esame fattone, credo di poter asserire che tutti sono in grado di somministrare qualche dato utile, qualche informazione che cercherebbesi indarno altrove. Naturalmente i più recenti meritano considerazione e fiducia maggiori, grazie ad una più ampia conoscenza dei fatti e ad una critica più severa dei documenti; però nessuno è in grado di porgere su ciascun argomento un quadro completo e fedele. Anzi — lo si può asserire con sicura coscienza, per quanto con invincibile dolore — un'opera siffatta non vedrà mai la luce; chè da un lato non sarà mai per spegnersi nell'uomo quello stimolo alla ricerca di nuovi veri — caratteristica incancellabile che LESSING ha vantato in uno squarcio immortale (2) — e, d'altronde, il materiale

(1) *Isis* è effettivamente risorta, ma negli Stati Uniti d'America [1935].

(2) « Wenn Gott in seiner Rechte alle Wahrheit und in seinen Linken den einzigen immer regen Trieb nach Wahrheit verschlossen hielte und spreche zu mir: wähle! Ich fiel in Demuth in seine Linke und sagte: Vater gib! die reine Wahrheit ist ja doch für Dich allein! ».

Digitized by Google

storico subisce incessanti ritocchi e spesso si allegra d'incrementi inattesi e destinati a modificare radicalmente i concetti che ci si era formati sopra un determinato argomento. Per conseguenza il risultato di qualsiasi ricerca storica non può mai raggiungere la solidità e la sicurezza di un teorema di geometria, di una formola di analisi o di una legge fisica. É questa una circostanza che si deve sempre tener presente da parte dei cultori di qualunque ramo di storia della scienza, non esclusa la storia delle matematiche, onde non accampare pretese che non potranno mai essere soddisfatte, riducendole, invece, alle proporzioni generalmente accettate nella storia letteraria o nella storia politica.

A tale limitazione di esigenze deve anche informarsi colui che giudica le opere storiche esistenti; in conseguenza, nell'additare le manchevolezze e gli errori che non seppero evitare i nostri predecessori, sforziamoci di togliere dall'animo nostro ogni sentimenfo meno elevato, ispirandoci esclusivamente ai supremi interessi della scienza e della sua storia, brandendo, non la spada che uccide, ma la lancia di Parsifal che ferisce e risana; piuttosto che compiacersi nell'additare la pecche di chi ci precorse, seguiamo il consiglio dato tacitamente dal divino poeta, quando scriveva

Lascio lo fele e vo pei dolci pomi

e facciamo nostra guida l'antica massima *dexstruam ut aedificabo*. Cerchiamo dunque con serenità e conserviamo ciò che vi è di pregevole nelle vecchie opere, gittando, senza disprezzo e senz'astio, ciò che appare quale inutile scoria: solo in tal modo il cammino verso la luce del vero verrà percorso senza deviazioni, senza incertezze, senza spargimento di sangue, e verrà mantenuta quella concordia che è indispensabile affinchè il piccolo drappello di cultori della storia delle matematiche divenga sempre più numeroso, più compatto e più ardito e sia coronato da sempre nuove vittorie.

III.

DI ALCUNI ASPETTI SOTTO CUI PRESENTANSI LE RICERCHE STORICHE NEL CAMPO MATEMATICO

Dal Vol. XIV (1932) di *Archeion*.

§ I. — Gli aneddoti.

L'indirizzo preciso e rigoroso assunto attualmente dalle ricerche sulla storia del pensiero umano (1), in particolare delle matematiche, impone

(1) Una prova di siffatto orientamento è offerta dal Programma d'esame redatto dall'Università di Londra (l'unica che, per quanto ci consta, siasi occupata della que-

Digitized by Google

una revisione metodica degli aneddoti con cui, un tempo, si riteneva doveroso rallegrare l'esposizione delle varie teorie e le biografie degli scienziati.

Alcuni, esaminati anche da giudici rigorosi, si mostrano non indegni di venire accettati. Così la risposta data da EUCLIDE al suo sovrano che gli chiedeva non vi fosse una via più semplice di quella tracciata dagli *Elementi* (« sulla terra esistono strade per il volgo e strade per i re, ma in geometria non vi è alcuna via regia »), si può ammirare per la sua arguzia, ma non vi è ragione di ritenerla invenzione di posteri; soltanto devesi notare che la si trova attribuita anche ad altri due antichi matematici che vissero sui gradini di un trono: a MENECMO istitutore di ALESSANDRO MAGNO e ad ARCHIMEDE famigliare con re JERONE di Siracusa.

Più abbondante è la fioritura di aneddotti relativi ad ARCHIMEDE. Riguardo a due di essi non vi è seria ragione per giudicarli invenzioni di ammiratori recenti. Giacchè, che il grande Siracusano abbia risentita una violenta emozione scoprendo — mentre trovavasi in bagno — il principio atto a dimostrare la frode dell'orafo che aveva mescolato dell'argento all'oro avuto per costruire una corona reale, è cosa spiegabilissima. Similmente, chi ricorda la perfetta conoscenza che egli aveva delle leggi fondamentali della leva, rende verosimile che egli siasi vantato di essere in grado di sollevare il mondo, non appena gli fosse stato dato un punto d'appoggio. Ma che non vi sia dell'esagerazione nella figura (1) che mostra ARCHIMEDE, il quale, seduto comodamente sulla riva del mare, trae a terra una galera piena di passeggieri, è ben difficile negare. Ancora meno verosimile sembra quanto narra TZETZE. « Quando », scrive questo ben noto grammatico, « le navi di MARCELLO furono a portata

---

stione); le prove che deve superare chi desidera di essere abilitato all' insegnamento di un determinato ramo di scienza sono le seguenti:

I. Profonda conoscenza di una determinata scienza (non esclusa la parte sperimentale se si tratta di una scienza d'osservazione) e della storia di essa. II. Conoscenza un po' meno profonda di altre branche e della loro storia, una delle quali si trovi abbastanza lontana dalla branca principale; se ad esempio la branca principale è la fisica, come branche secondarie si possono scegliere l'astronomia o la biologia generale. III. Cognizioni linguistiche conformi a quanto si propone il candidato; in ogni caso é richiesta una sufficente conoscenza del francese e del tedesco (l'inglese è sottinteso). IV. Conoscenza del metodo storico e della storia in generale. V. Conoscenza profonda di un determinato periodo storico e della storia di una razza e di un popolo. VI. Epistemologia e logica.

Il programma è riportato per intero nel I fascicolo di quest'anno dell'Archeion (XIV, 1932, p. 101).

(1) FIGUIER, *La vie des savants illustres, Savants de l'Antiquité* (Paris, 1866); di fronte alla pag. 23.

Digitized by Google

d'arco, il vecchio » (cioè ARCHIMEDE) « fece portare uno specchio esagonale di sua invenzione. Pose poi altri specchi analoghi, ma più piccoli, ad una distanza conveniente dal primo e mobili attorno a cerniere col mezzo di lamine metalliche quadrate. Espose poi il suo specchio ai raggi del sole di mezzodì. Venendo questi riflessi dallo specchio, egli riuscì a provocare un terribile incendio sulle navi nemiche, le quali furono così ridotte in cenere ». Ora per giudicare della verosimiglianza di questo racconto bisogna tenere presente che l'ottica presso i Greci era rimasta costantemente bambina, tanto che allora non era nota che la legge di riflessione della luce; circa nello stesso stato era la tecnica delicatissima relativa alla costruzione degli specchi; onde, come ritenere che ARCHIMEDE abbia potuto trarre dal sole calore sufficiente per incendiare un'intera flotta? Aggiungasi che un tentativo fatto sotto la direzione del celebre naturalista BUFFON (1) per riprodurre l'effetto ottenuto da ARCHIMEDE condusse a risultati negativi; e tutto induce a credere che altrettanto accadrebbe anche oggi, malgrado le vaste cognizioni che si hanno intorno alla teoria della luce e la perfezione raggiunta dalla costruzione di ogni specie di specchi, cannocchiali, telescopi, ecc. D'altronde come spiegare che l'umanità, oggi assillata dal bisogno di scoprire nuove fonti di energia, atte a compensare le risorse di combustibili naturali, che si vanno di giorno in giorno esaurendo con allarmante rapidità, non abbia trovato il modo di attuare l'idea di ARCHIMEDE, ricorrendo al sole? Come, finalmente, rendersi ragione del fatto che l'uomo, nella sua costante belluina ricerca di mezzi per distruggere il proprio simile, non abbia pensato di ridurre il sole, l'eterno datore di vita, in un nefasto seminatore di morte? Per tutte queste ragioni sembra prudente, sino a prova contraria, di collocare i famosi « specchi ustori » fra le leggende generate dal terrore che il grande scienziato riuscì ed incutere nei soldati di MARCELLO (2).

Non é soltanto riguardo ai pensatori dell'Antichità che è fiorita la leggenda; anche scienziati assai più vicini a noi non ne andarono immuni. Così deve giudicarsi favolosa la frase « E pur si muove! » che vuolsi GALILEO pronunciasse all'udire la sentenza pronunciata contro di lui per avere scritti i famosi *Dialoghi sopra i due massimi sistemi;* chè, come si

(1) L'apparecchio architettato da BUFFON era formato da 168 specchietti piani. Altro fu ideato dal PEYRARD, il quale ne dette la descrizione al termine del II Vol. delle *Oeuvres d'Archimede traduites littéralement* (II ed., Paris, 1808); vi sono riferite anche le antiche testimonianze, non senza notare che autorità di primo ordine quali POLIBIO, TITO LIVIO e PLUTARCO, che pure descrivono con molti particolari quanto fece ARCHIMÈDE per difendere Siracusa, serbano sull'argomento un completo silenzio.

(2) In senso analogo ebbe ad erpsimersi DESCARTES in una lettera del Gennaio 1630 al P. MERSENNE [1935].

Digitized by Google

può pensare ad un atto tanto audace compiuto da un vecchio in pessime condizioni di salute, miracolosamente sfuggito alla prova della tortura? Riguardo a questo racconto ci si trova in condizioni molto favorevoli, chè dotti specialisti ne hanno scoperta la genesi e ne hanno seguito lo sviluppo (1); tuttavia quella frase rimarrà eternamente radicata nella coscienza popolare come affermazione dell'inanità di qualunque sforzo per violentare le eterne leggi della natura.

Altrettanto diffuso è il racconto secondo il quale la scoperta dell'invenzione della gravitazione sarebbe stata ispirata a NEWTON dalla casuale caduta di una mela. Ora, benchè una scheggia dell'albero relativo si trovi fra i cimeli newtoniani religiosamente conservati dalla Società Reale di Londra, molti dubitano che un risultato di così grande importanza abbia la propria radice in un episodio tanto insignificante. Ed io non saprei meglio dimostrare la ragionevolezza di questa attitudine che riferendo quanto narra il biografo di uno scienziato di statura non inferiore a quella dell'autore dei *Principia* (2): « GAUSS, il quale nutriva per NEWTON un'ammirazione sconfinata, tanto che era l'unico mortale che egli citava sempre con l'epiteto di *summus*, si mostrava indignato quando vedeva collegata la grande scoperta della legge di gravitazione ad un semplice caso. La storia della mela, egli diceva, è troppo sciocca; la mela sia caduta o sia rimasta sull'albero, non si può credere che abbia affrettata o ritardata una siffatta scoperta; secondo me la cosa è andata certamente così: Accadde una volta che una persona stupida ed importuna chiese a NEWTON come fosse stato condotto alla sua grande scoperta; siccome NEWTON si accorse di avere a che fare con un povero di spirito, per liberarsene, rispose che gli era caduta una mela sul naso, e colui se ne andò soddisfatto di essere stato pienamente illuminato sulla questione ». D'accordo col « princeps mathematicorum » sembra pertanto che prudenza insegni a non aggiungere una terza mela storica a quelle che ADAMO offrì ad EVA e PARIDE assegnò a VENERE.

Di altri aneddoti non degni di figurare in una storia delle matemariche io ho già fatto menzione in altre occasioni (3), onde non è il caso di ritornarvi.

---

(1) G. BERTHOLD « *Eppur si muove* » (Zeitschrift für Math. und Phys. T. XLII, 1897; Hist.-lit. Abth. pp. 5-8) e *Ueber den angeblichen Ausspruch Galileis « Eppur si muove »* (Bibliotheca mathematica, Neue Folge, T. XI, 1897, pp. 57-58); A. FAVARO, *Alla ricerca delle origini del motto « E pur si muove »* (Atti dell'Ist. Ven., T. LXX, 1910-11, Parte II pp. 1219-1232).

(2) W. SARTORIUS VON WALTERHAUSEN, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856, pag. 84).

(3) Archeion T. XIII, 1931, pp. 369 e 385.

Digitized by Google

§ II. — Questioni non risolte.

Le esigenze di rigore a cui si è accennato in principio del paragrafo precedente, costringono a ritenere « sub judice » alcune importanti questioni che in passato si era propensi a ritenere ormai esaurite.

Tale è anzitutto quella delle origini del nostro sistema numerale; che vi sia ancor qualche cosa da chiarire al riguardo è dimostrato da scritti che dotti indiani hanno cominciato a pubblicare in questi ultimi anni; è da augurare che i relativi lavori non si risentano dello spirito d'irrequietudine politica che ora scuote la penisola che stendesi fra l'Indo ed il Gange.

Altrettanto devesi ripetere relativamente alla grande contesa dibattutasi fra newtoniani e leibniziani riguardo all'invenzione del calcolo infinitesimale. A risolverla aiuterà potentemente la grande edizione degli scritti del Leibniz, progettata prima della guerra mondiale dall'Associazione internazionale delle Accademie e che la Germania, con patriottico slancio, accettò poi di condurre da sola a buon termine. Ma ciò ancora non basta: occorre che tale esempio sia seguito dall'Inghilterra, pubblicando tutti gli scritti ancora inediti di Newton, nonchè il suo carteggio scientifico; il non lontano (1942) terzo centenario della nascita di quel grande può offrire a ciò propizia occasione.

Ancor viva è la controversia intorno alla nazionalità di Copernico. I nostri lettori conoscono certamente l'articolo del Cantor sull'argomento, il quale si trova tradotto in italiano nel *Bullettino di Bibliografia e Storia* del Boncompagni (1); ivi sono esposti gli argomenti a sostegno dell'opinione che fa del celebre astronomo un tedesco. Che i Polacchi non siano propensi ad accoglierla, è provato dall'inscrizione *Nicolao Copernico grata patria* posta sotto la statua eretta a quel grande in Varsavia; ad essa fa riscontro il monumento innalzatogli a Thorn con la scritta: *Nicolaus Copernicus Thorunensis terrae motor solis coelique stator.* La questione è estremamente ardua, perchè la Polonia, priva com'è di confini naturali, fu da secoli riguardata da vicini prepotenti come terra di conquista, onde subì dolorose vicende politiche, che somigliano a quelle di cui, per tanti secoli, fu teatro l'Italia. Ora quella grave questione fu oggetto di nuove pubblicazioni in conseguenza (e chiedo scusa al lettore di introdurre un piccolo attore in una controversia concernente un gigante del pensiero) di una frase (« la Polonia che gli aveva dato i natali ») da me scritta (2), senza alcuna intenzione di parteggiare, forse in un momento in cui ave-

(1) *Sulla nazionalità di Copernico* (Bull. Boncompagni, T. IX, 1876, pp. 701-716).
(2) Biblioteca mathematica, III, Ser., T. X (1910), pag. 330.

Digitized by Google

vo sott'occhio una fotografia del surricordato monumento di Varsavia, Contro tale affermazione insorse fieramente il compianto RODOLFO STURM, professore nell'Università di Breslau, col quale da tempo io mantenevo cordiali rapporti scientifici, con un documentatissimo articolo inteso a stabilire che COPERNICO era di nazionalità tedesca (1); gli argomenti da lui addotti in base a numerosi documenti (argomenti che furono poi ampiamente sviluppati da un suo dotto compatriota (2)) sembrarono a lui dotati di tale irresistibile forza che egli avrebbe desiderato che io pubblicassi la più ampia ritrattazione di quella frase. Io rifiutai di farlo, non perchè negassi il valore alle prove addotte, ma perchè io (che non riesco a sostituire in me una mentalità « scientifica » con altra « storica ») ritengo che una dimostrazione a base di documenti non è paragonabile, per forza probatoria, a una dimostrazione di tipo euclideo. E di tale prudente attitudine riservata ebbi occasione di rallegrarmi il giorno in cui appresi che il compianto professore BIRKENMAJER di Cracovia, in una sua grande biografia di COPERNICO, sostenne, con robuste considerazioni, essere COPERNICO di nazionalità polacca; è da augurare che una traduzione in lingua differente dalla polacca renda possibile ad un maggior numero di persone (fra cui chi scrive) di misurare il peso di queste considerazioni.

§ III. — RICORRERE ALLE FONTI.

Uno dei precetti oggi in attuazione per la ricerca storica consiste nell'ingiunzione di ricorrere sempre alle fonti; ottima massima, giacchè i racconti, passando di penna in penna subiscono generalmente involontarie, ma spesso gravissime deformazioni. Se non che, lo storico che intende attenervisi, incontra spesso ostacoli talmente gravi da risultare insormontabili.

Essi sono di due specie.

Uno consiste nella difficoltà di raggiungere le fonti a cui ci si dovrebbe abbeverare, anche da parte di coloro che vivono nell'orbita di grandi biblioteche. Un esempio può servire per formarsi un concetto della gravità degli ostacoli di tal fatta. Il CANTOR, nel III volume delle sue *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, fa cenno (p. 556) di una contesa sorta quando il ben noto astronomo J T. MAYER ebbe a constatare che un certo C. H. WILKE aveva pubblicati, come cose proprie, alcuni dei procedimenti da lui esposti nella sua opera giovanile (scrit-

(1) R. STURM, *Koppernikus ist deutscher Nationalität* (Jahresber. der Deutsch. Math. Vereinig, T. XX, 1911, pp. 161-167).

(2) G. BENDER, *Heimat und Volkstum der Familie Koppernigk (Coppernicus)* (Breslau, 1920).

Digitized by Google

ta quando egli non contava che diciott'anni) *Neue und allgemeine Art alle Aufgaben aus der Geometrie vermittelst die geometrischen Linien leicht aufzulösen* (Essling, 1741). Il CANTOR non dice in che cosa consistano questi nuovi procedimenti, onde il lettore rimane totalmente all'oscuro riguardo al loro valore ed alla loro importanza. Desiderando chiarire le mie idee al riguardo, io ho cercato, con tutti i mezzi a mia disposizione, di procurarmi il volume del MAYER; ma, sino ad oggi, le ricerche fatte presso le più cospicue biblioteche tedesche, ebbero esito negativo; sarò ben lieto se qualcuno, più fortunato di me, vorrà favorirmi qualche lume al riguardo; ma intanto sorge spontaneamente il sospetto che il lamentato silenzio del CANTOR provenga appunto dall'impossibilità di consultare l'opera del MAYER, come nasce il desiderio che la storia di quella contesa venga narrata con tutti i suoi particolari.

Non meno gravi sono gli ostacoli che sbarrano la via a chi intende di prendere diretta conoscenza di quanto fu scritto sopra una determinata materia, quando essa fu coltivata da matematici di varia stirpe, chè ciò esigerebbe la conoscenza di un grande numero di lingue. Per rendersi conto dei risultanti ostacoli si pensi che chi voglia studiare *direttamente* la scienza dell'antichità deve conoscere, oltre le lingue classiche, l'arabo, il sanscrito e il cinese, e deve inoltre essere in grado di decifrare i testi egiziani e babilonesi relativi. Fortunatamente molti di tali documenti (tranne quelli riferentisi alla Cina) furono in buona parte tradotti e commentati da dotti specialisti in materia. Però i puristi più intransigenti negano allo storico degno di tal nome la facoltà di ricorrervi; quanto gravi siano le conseguenze di una siffatta direttiva è dimostrata dalla biografia di un grande scienziato di recente scomparso: GIOVANNI SCHIAPARELLI. Dai volumi dei suoi scritti storici di recente dati alle stampe (1) emerge che, non appena laureato, egli concepì l'idea di scrive re una storia completa delle matematiche; con l'andare del tempo egli si avvide che a tanto non poteva bastargli la vita, gran parte della quale era assorbita da osservazioni celesti, e limitò il proprio programma all'astronomia. La profonda coltura classica di cui disponeva gli permetteva di leggere nell'originale le opere greche e latine; ma ciò non parve sufficiente alla sua austera coscienza storica e volle porsi in grado di capire la Bibbia nell'originale; a tale scopo si famigliarizzò con l'ebraico; e poichè gli antichi Ebrei vivevano in continuo contratto con la civiltà assiro-babilonese, volle prendere conoscenza diretta delle osservazioni fatte e dei fenomeni celesti osservati dai Babilonesi per trarne sicuri presagi degli avvenimenti futuri; e arrivò a comprendere quanto stava

(1) G. SCHIAPARELLI, *Scritti sulla storia dell'astronomia antica* (Bologna, 1927).

Digitized by Google

scritto in caratteri cuneiformi sulle tavolette di argilla che sono frutti di scavi fortunati eseguiti in Mesopotamia. Ma questi vasti studi filologici, la cui constatazione desta la più sconfinata ammirazione per il sommo astronomo, assorbirono tanto tempo e tanta fatica che, della progettata storia generale dell'astronomia, non furono scritte che poche pagine, degne senza dubbio della più alta considerazione, ma che non impediscono si rimpianga che egli non abbia potuto compiere la vasta opera storica da lui vagheggiata e di cui non possediamo che il piano generale e alcuni frammenti.

§ IV. — Verso una storia della scienza?

Sino dal 1893 P. Tannery, rendendo conto del II Volume delle *Vorlesungen* del Cantor, notava (1) che approssimandosi all'epoca moderna « il serait préférable d'adopter un plan général tout à fait différent, en abandonnant complètement la division chronologique et en traitant séparement de chaque branche de la science ». La preoccupazione che si scorge da queste parole, intorno al modo in cui dovrà essere concepita la storia delle matematiche in epoche vicino a noi, è visibile in un discorso pronunciato dal compianto F. Cajori, che diede luogo ad un articolo inserito da chi scrive nel Fascicolo inaugurale di questo periodico (2). Siffatta preoccupazione si acuisce quando dalla storia di una determinata scienza si assurge a quella di una storia generale del pensiero scientifico; ond'è che io nell'esaminare l'opera di P. Tannery (3), espressi il rammarico perchè fosse stato a lui negato di occupare la cattedra di Storia della scienza al Collegio di Francia, giacchè così non gli fu concesso di farci conoscere, in base all'esperienza che egli avrebbe fatta insegnando, in qual modo si dovesse concepire la storia della scienza nel senso più ampio della parola. Ciò mi fece a torto attribuire l'opinione che io ritenessi utopistico il progetto di una tale storia (4). Quello che invece io penso è che le storie delle varie scienze presentano oggi tanti e così importanti punti interrogativi che, piuttosto che farne sino da ora ingredienti di un tutto necessariamente manchevole, sia opportuno adoperarsi ad eseguire, incoraggiare e guidare ricerche speciali.

---

(1) Bulletin des sciences mathématiques, T. XVII, oppure *Mémoires scientifiques* T. XI, 1931 pag. 514.

(2) *Per una storia delle matematiche nel Secolo XIX* (Archivio di storia della scienza, T. I, 1919, pp. 39-47).

(3) Archeion, Vol. XI, p. LXXX e segg.

(4) Archeion, T. XII, 1930, p. 58.

Digitized by Google

Se non m' inganno, una conferma degli ostacoli che al presente si erigono contro una storia generale della scienza è offerto da un'eminente opera di un pensatore inglese (1), alla diffusione della quale furono di grave nocumento lo scoppio della recente guerra mondiale e la morte dell'autore avvenuta nel momento in cui vedeva la luce il volume che rappresentava il coronamento della sua lunga fatica. E' ivi trattato un soggetto oltremodo seducente: la storia del pensiero scientifico durante il secolo XIX. Ebbene, in quest'opera si trovano molte pagine dotte, geniali e profonde destinate a far conoscere successivamente l'evoluzione della matematica, della fisica, della chimica, ecc.; ma vi si cerca indarno un concetto centrale che tutte le colleghi. Esso forse non esiste. Restringendosi alla matematica un tale concetto sembra trovarsi nella tendenza costante a generalizzazioni sempre più vaste, che allontanano sempre più dalla terra una scienza nata per soddisfare alcuni urgenti bisogni prodotti dall'umano consorzio; ma è chiaro che esso cercasi indarno seguendo le vicende degli altri rami dello scibile. Ora la presenza di un'idea-madre non sembra condizione necessaria per concepire una storia della scienza degna veramente di questo nome? Non potrei por termine meglio a queste linee che augurandone la scoperta in un tempo non molto lontano, onde a me pure sia concesso di conoscerla.

IV.

CONSIDERAZIONI E NOTIZIE INTORNO ALLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Comunicazione fatta alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 21 Maggio 1933.

Mentre mi onoro di offrire in omaggio a questa illustre Accademia il volume conclusivo di un lavoro che mi ha lungamente occupato (*Storia delle matematiche*), mi si consenta che io lo accompagni con qualche osservazione che per avventura potrà riuscire di qualche giovamento a chi in avvenire vorrà battere la stessa via da me percorsa; si tratta di osservazioni in parte suggerite da scritti pubblicati dopo che io avevo già licenziate quelle sezioni del mio lavoro che avrebbero potuto venirne felicemente influenzate, in parte dall'assenza di pubblicazioni che mi avrebbero permesso di colmare lacune che mi fu forza lasciare in altre sezioni.

1. — Debbo anzitutto far menzione di investigazioni recenti di cui furono oggetti popoli extra-europei: Babilonesi, Egiziani, Indiani, Arabi e

(1) J. T. MERZ, *A History of European Thought in the XIX Century* (4 volumi, Edinburgh, 1906-1914).

Digitized by Google

Cinesi. Riguardo al popolo che abitò la vasta pianura bagnata del Tigri e dall'Eufrate, le ricerche che va compiendo O. Neugebauer, col concorso di altri studiosi (1), quantunque si trovino tuttora nel loro primo stadio di sviluppo, permettono già di riconoscere che quel popolo, il quale d'ordinario viene raffigurato intento in osservazioni celesti, ispirate dall'ansiosa aspirazione di scoprire segni premonitori di avvenimenti futuri, il quale sinora si riteneva non avere lasciato traccia del proprio sapere matematico che in alcuni semplici elenchi di quadrati e di cubi dei numeri della serie naturale, era invece giunto a risolvere problemi riguardati oggi come di pertinenza della teoria delle equazioni, cosicchè sorge spontaneo il ragionevole sospetto che in tale campo essi siano stati maestri dei Greci, epperò anche nostri: dirà l'avvenire se ed in quale misura esso sia giustificato. Comunque, sino da oggi si può asserire che il futuro storico delle matematiche dovrà dare al capitolo dedicato agli Assiro-Babilonesi un'intonazione ben diversa da quella adottata sino ad oggi (2).

2. — Non meno importante è il progresso compiuto dalle nostre cognizioni intorno alla matematica degli Egiziani in conseguenza della pubblicazione del cosidetto « papiro di Mosca » (3) e di varie memorie di commento di esso (4), quantunque intorno all'interpretazione di parecchi passi, fra i competenti in materia non siasi peranco raggiunto un accordo completo. Piena luce però non venne sinora projettata sopra la tecnica

---

(1) O. NEUGEBAUER, *Sexagesimalsysteme und Bruchrechnug*, I (« Quellen und Studien », t. I. 1931, pp. 183-93). II (id., pp. 452-7), III (id., pp. 458-63), IV (id., t. II, 1932, pp. 199-210); *Zur Geschichte der babylonischen Mathematik* (id., t. II, 1932, pp. 67-80); *Beiträge zur Geschichte der babylonischen Mathematik* (id., t. I, pp. 120-30); *Studien zur Geschichte der antiken Algebra*, I (id., t. II, pp. 1-27); H. WASCHOW, *Verbesserung zu den babylonischen Dreiecksaufgaben S. K. 8* (id., t. II, pp. 211-14); O. NEUGEBAUER und H. WASCHOW, *Bemerkungen über Quadratwurzel-Approximationen in der babylonischen Mathematik* (id., t. II, pp. 291-97); H. WASCHOW und. O. NEUGEBAUER, *Babylonischen Belagerungsrechnung* (id., pp. 291-97); H. S. SCHUSTER, *Quadratische Gleichungen der Seleukidenzeit* (id., t. I, pp. 194-200); I. K. FOTHERINGHAM, *The indebtedness of Greck to Chaldean Astronomy* (id., t. II, pp. 28-44); K. VOGEL, *Zur Berechnung der quadratischen Gleichungen bei den Babyloniern* (« Unterrichtsblätter f. Math. und Naturw. » t. XXXIX, 1933, pp. 76-81).

(2) Ai lavori citati nella precedente nota vanno aggiunti: O. NEUGEBAUER, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, I Bd. (Berlin, 1934) e *Mathematische Keil schrift-Texte* (Berlin, 1933) [1935].

(3) W. W. STRUVE, *Mathematischer Papyrus des staatlichem Museums der Schöner Künste in Moskau* (Berlin, 1930).

(4) O. NEUGEBAUER, *Arithmetik und Rechentechnik der Aegypter* (« Quellen und Studien », t. I. 1931, pp. 301-380); *Die Geometrie dar aegyptischen mathematischen Texte* (id., pp. 413-52); J. J, PEREPELKIN, *Die Aufgabe n. 62 des mathematischen Papyrus Rhind* (id., t. I, pp. 108-112); S. GANDZ, *Die Harpedonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer* (id., pp. 255-77).

Digitized by Google

aritmetica usata da coloro che abitavano sulle rive del Nilo. La lamentata oscurità proviene dall'assenza di documenti anteriori o immediatamente posteriori ai papiri Rhind e di Mosca; di documenti di carattere meno umile di quanto essi siano (giacchè notoriamente sono semplici raccolte di problemi pratici risoluti in base a regole nemmeno enunciate e tanto meno dimostrate); di documenti che non siano, come i papiri di Akhmim e di Michigan (1), relativi ad epoche in cui l'irresistibile influenza greca aveva finito per soverchiare od oscurare il pensiero indigeno. In particolare la celebre Tabella del Papiro Rhind che insegna la decomposizione in frazioni fondamentali dei numeri $2/(2n+1)$, per $n = 1, 2, \ldots, 50$, appare sempre di genesi misteriosa, ad onta dei profondi e svariati studi dei quali fu oggetto (2).

3. — Le prime attendibili informazioni intorno alla matematica degli Indiani ci pervennero per opera di funzionari inglesi vissuti lungamente sulle rive del Gange, e questo stato di cose si protrasse sino ai nostri giorni, poichè il più recente documento del genere si legge in una pubblicazione d'un illustre sanscritista britanno che doveri d'ufficio trattennero per molti anni in India (3). Ma in questi ultimi anni alcuni eruditi indiani studiarono con ammirevole impegno la scienza avita, occupandosi con amore della fondamentale questione relativa alla sua dipendenza o meno dalla scienza greca; si tratta di studi di dettaglio (4), ma che certamente

---

(1) J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmim* (Mém. publiés par les membres de la Mission archéologique française au Caire, t. XXVII, 1894); L. C. KARPINSKI-*Michigan mathematical Papyrus, n. 621* (« Isis », vol. V, 1923, pp. 20-25); L. C. KARPINSKI and F. E. ROBINS, *Michigan Papyrus n. 621; the introduction of algebraic equations in Greece* (« Science », september 1929).

(2) Si vegga la diligente e dotta dissertazione di K. VOGEL, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der 2: n-Tabelle des Papyrus Rhind* (München, 1929).

(3) G. R. KAYE, *The Bakhshali Manuscript* (Calcutta, 1927).

(4) B. DATTA, *Early evidence of the use of the zero in India* (American mathem. Monthly t. XXXIII, 1926 pp. 449-455, e t. XXXVIII, 1931, pp. 566-572); *The Jaim, School of Mathematics* (« Bull. of the Calcutta mathem. Society », t. XXI, 1929); *The Hindu contributions to mathematics* (Bull. of the mathem. Association », Univ. of Allahabad, vol. I e II, 1927-29); *The science of calculation by the board* («American mathem. Monthly », t. XXXV, 1928, pp. 521-9); *The origin of the Hindu term for* « root » (id., t. XXXVIII, 1931, pp. 371-6); *On the origin of the Hindu indeterminate analysis* (Archeion », t. XIII, 1931, pp. 401-7); *Origin and History of the Hindu names for geometry* (« Quellen und Studien, t. I, 1931, pp. 111-9); *Geometry in the Jaima cosmography* (id., pp. 245-54); *On the relation of Mahavira to Sridhara* (« Isis », vol. XVII, 1932, pp. 25-33); S. GANGULI, *The elder Aryabhata und the modern arithmetical notation* (« Amer. mathem. Monthly », t. XXXIV, 1927, pp. 409-15); *Notes on Indian mathematics-A criticism of G. R. Kaye's interpretation* (« Isis », t. XII, 1929 pp. 132-45); *The olden Aryabhata value of* π (« Amer. mathem. Montly », t. XXXVII, 1930, pp. 16-22); *India's*

Digitized by Google

preludono od almeno preparano un'indagine completa donde emerga definitivamente se il pensiero matematico si propagò da occidente verso oriente, oppure nel senso opposto.

4. — Grazie ad alcune importanti pubblicazioni di un dotto sinologo belga — il P. van Hée (1) — si è giunti in possesso di preziose informazioni, le quali permettono di controllare quanto attendibili siano le pretese dei Cinesi di essere stati sino dalla più remota antichità matematici pari ai grandissimi.

Anche intorno alla matematica araba non mancarono studi importanti (2) che valsero a rendere più sicura la nostra conoscenza della scienza greca; tuttavia non sono numerosi quanto potevasi ragionevolmente sperare, considerando l'ingente numero di manoscritti inesplorati conservati

---

contributions to mathematics: the theory of indeterminate equations of the first degree (« The Journal of the Indian mathem. Society » vol. XIX, 1631-2); *The Indian origin of the modern placevalue arithmetical notation* (« Amer. matem. Monthly », t. XXXIX, 1932, pp. 251-6, e t. XL, 1933, pp. 25-31 e 154-157). Si vegga inoltre: S. RANIANDAS *Some notes on Indian astronomy* (« Isis », t. XIV, 1931, pp. 388-402); *The Jaima calendar* (id., t. XVIII, 1932, pp. 432-37); G. V. KIRSHNAWAMI, *Reform of the Indian Calendar* (id., t. XIV, 1931, pp. 403-10).

Diametralmente opposta alla tesi indiana è l'opinione, che da tempo sostiene N. BUBNOV, secondo cui il nostro sistema numerale sarebbe di origine europea; un riassunto degli argomenti in sostegno di tale tesi leggesi nell'articolo di HARRIET PRATT LATTIN, *The origin of our present system of notation according to the theories* of Nicholas Bubnov (« Isis », vol. XIX, 1933, pp. 181-94).

(1) *The ch'ou Jen Chuan of Yüan Yüan* (« Isis », t. VIII, 1925, pp. 103-18); *The great treasure house Chinese and European mathematics* (« Amer. mathem Monthly », t. XXXIII, 1926. pp. 503-6); *Le grand trésor des mathématiques chinoises et européennes* (« Archeion », t. VII, 1926, p. 18-24); *Les séries en Extrême-Orient* (id., t. XII, 1930, pp. 117 25); *Le classique de l'Ile maritime, ouvrage chinois du III Siècle* (« Quellen und Studien », t. II, 1932, pp. 255-80). Si vegga inoltre: DAVID CHIN-TE CHENG, *The use of computing rods in China* (« Amer. mathem. Monthly », t. XXXII, 1925, p. 492-9) e *On the mathematical significance of the chinese Ho t'u and Lo shu* (ivi pp. 499-504); Y. MIKAMI, *The Ch'ou Jen of Yüan Yüan* (« Isis », t. XI, 1928, pp. 123-6); I. M. BARBOUR, *A sixteenth Century Chinese approximation for* π (« Amer. mathem. Monthly » t. XL, 933, pp. 69-73).

(2) S. GANDZ, *On The origin of the term « root »* (« Amer. mathem. Monthly » t. XXXIII, 1926, pp. 261-5 e t. XXXIV, 1927, pp. 67-75); *The origin of the term « algebra »* (id., pp. 437-40); *Did the Arabe know the abacus?* (id., t. XXXIV, 1927, pp. 308- 316); *The origin of Ghubar numerals or the arabian abacus and the articuli* («Isis », t. XVI, 1931, pp. 393-424); *Der Hultsch-Cantor Beweis von den Reihenfolge der Buchstaben in den mathematischen Figuren der Griechen und der Araber* (« Quellen und Studien », t. II, 1932, pp. 81-97); E. BESSEL-HAGEN und O. SPIES. *Das Buch über die Ausmessung der Kreisringe des Ahmad ibn Omar al-Karabisi* (id., t. I, 1931, pp. 502-40); S. GANDZ, *Bemerkungen zum « Buch über die Ausmessung der Ringe » der Ahmad ibn Omar al-Karabisi* (id., pp. 98-105); DAOND S. KASIR, *The Algebra of Omar Khayyam* (New York, 1931).

Digitized by Google

in molte cospicue biblioteche; ond'è da augurare che gli Arabisti, i quali in questi ultimi tempi si dedicarono con tanto fervore allo studio degli alchimisti, volgano le loro cure ad opere capaci di gettare nuova luce sulla matematica greca e così dissipare le tenebre che avvolgono i primordi dell'algebra europea.

5. — Per converso va qui rilevato un risveglio negli studi intorno all'antica scienza degli Ebrei (1); in conseguenza venne posto in chiaro il merito di alcuni mal noti o ignoti investigatori (2), fu meglio delineata la figura di uno dei più celebri matematici arabi (3) e venne posta a disposizione di tutti la versione ebraica di un'opera greca, di cui l'originale non fu ancora scoperto (4).

6. — La matematica greca può dirsi nota, nel suo insieme, in prima approssimazione; ma si affaccia oggi il problema che un illustre ellenista — J. L. Heiberg — affrontò nella memoria *Mathematici graeci minores* (Danske Videnskabernes Selskab., t. XIII, 1927), con cui chiuse degnamente la sua grande opera di erudito.

7. — Un capitolo del tutto nuovo ed indubbiamente molto interessante, del quale oggi non può scriversi che il titolo, dovranno un giorno contenere le storie della nostra scienza, quello, cioè, riguardante i metodi di calcolo in uso nell'America pre-colombiana (5); i materiali ne saranno

---

(1) S. GANDZ, *The knot in Hebrew literature, or from the knot to the alphabet* (« Isis », t. XIV. 1930, pp. 189-214); D. I. GOLOVENSKY, *Maxima and Minima in Rabbinical literature* (« Scripta mathematica », t. I, 1932, pp. 53-55); A. LOEWY, *Zur Mathematik in Bibel und Talmud* (Monatschrift f. Gesch. und Wissenschaft des Judentudentism, 79, Jahg.

(2) D. E. SMITH and J. GINSBURG, *Rabbi ben Ezra and the Hindu-Arabic Problem* (« Amer. mathem. Monthly », t. XXV, 1918, pp. 99-108); F. CANTERA BURGOS, *El Judio Salmantino Abraham Zacut* (« Revista de la Academia de Cencias de Madrid », t. XXXVIII, 1931) e il voluma *Abraham Zucüt* (Madrid, 1934); R. LEVY, *A' propos de la « Magna Compositio » de Zacuto* (« Revue des études Juives », t. XCII, 1932); J. GINSBURG, *Au unknown Mathematician of the fourteenth Century* (« Scripta mathematica », t. I, 1932, pp. 60-2); M. H. IEWITTES, *Joseph del Medigo on Prosthaphaeresis* (id., pp. 56-9).

(3) S. GANDZ, *The « Misnath Middot » and the Geometry of Muhammed ibn Musa al-Khowarizmi* (Berlin. 1932).

(4) *Jacob ben Mechirs Version of Menelaus's Work on spherical trigonometry. Translated into English and edited by* J. GINSBURG) (« Scripta mathematica », t. I, pp. 72-8, 153-6).

(5) Riguardo ai « Maya » popolazione dell'America centrale, si vedano le pp. 69-70 della II ed. dell'*History of Mathematics* di F. CAJORI (New York, 1919), basate sull'opera di S. G. MORLEY, *An Introduction to the Study of the Maya Hierogliphs* (Washington, 1915). Per altre popolazioni veggansi gli articoli: W. C. ELLIS, *Number Systems of the North American Indians* (« Amer. mathem. Monthly », vol. XX, 1913, pp. 263-72 e 293-99); L. LELAND LOCKE, *The ancient Peruvian Abacus* (« Scripta mathematica », t. I, 1932, pp. 37-43).

Digitized by Google

forniti dagli scavi che si stanno attualmente compiendo al di là dell'Atlantico.

8. — Passando al Medio-Evo latino, il periodo per il quale sono vivamente desiderate accurate ricerche è quello che corre da Leonardo Pisano a Luca Pacioli; era l'epoca in cui il sistema aritmetico a base 10 lottava per venire adottato in tutta la Cristianità, malgrado l'opposizione che esso incontrava da parte delle autorità ecclesiastiche, naturalmente mal disposte verso un'invenziona dovuta, a quanto pare, ad un popolo d'infedeli e trasmesso da un'altro. Gli scritti che contribuirono alla vittoria dell'aritmetica di posizione sono generalmente dovuti, non a matematici di professione (e tale non era nemmeno il Fibonacci), ma a ragionieri (se ci sia lecito usare questo vocabolo moderno per designare una professione di antica data) o modesti maestri d'abaco. Alcuni sono noti da tempo; altri vennero segnalati recentemente da egregi medioevalisti (1); ciò che contribuirebbe nel modo più efficace alla conoscenza di quell'epoca sarebbe una metodica esplorazione di tutto l'ingente materiale esistente in antiche biblioteche, specialmente italiane e spagnuole (2).

9. — Volgendoci all'epoca moderna osserviamo che, mentre l'opera di Galileo può riguardarsi conosciuta nella sua interezza, mentre sono ormai noti tutti i lavori geometrici di Evangelista Torricelli, altrettanto non può ripetersi riguardo agli altri membri della scuola del sommo scienziato fiorentino. Ora, se si riflette che girano per il mondo a gloria dei loro autori la Opere complete dei loro più illustri contemporanei (Descartes, Fermat, Roberval, Pascal, Huygens) e fu iniziata la pubblicazione integrale del carteggio del P. Mersenne (3), sembra imprescindibile dovere dell'Italia il dare completa diffusione al contenuto della celebre collezio-

---

(1) L. KARPINSKI, *Two twelfth Century Algorisms* (« Isis », t. III, 1921, pp. 396-413); *A fifteenth Century french Algorism from Liège* (id., t. XII, 1929, pp. 194-236); *The italian Arithmetic and Algebra of Master Jacob of Florence* (« Archeion », t. XI, 1929, pp. 170-77); *An early printed Italian arithmetical treatise* (id., pp. 332-5), J. D. BOND, *Richard Walingsford* (1292?-1335) (« Isis », voi. IV, 1922, pp. 459-65) e *Quadripartitus Richardi Walynfords de sinibus demonstatis* (id., vol. V, 1923, pp. 99-115 e 339-63); E. G. R. WATERS, *A thirteenth century algorism in French verses. With Introduction by* C. L. KARPINSKY (id., vol. IX, 1928, pp. 45-84); FORENCE A. YELDAM, *Notation of fractions in the earlier Middle Ages* (« Archeion » t. VIII, 1927, pp. 313-7) e *Extracts from St. Johan College, Oxford MS. XVII, Ratio regularum abaci* (id., pp. 318-29); L. THORNDIKE, *Blasius of Parma (Biagio Pelacani)* (« Archeion », t. IX, 1928, pp. 177-90); *Calculator* (« Speculum, a Journal of Medioeval Studies », april 1932)

(2) Cfr. A. SANCHEZ PEREZ, *Las matematicas en la Biblioteca del Escorial* (Madrid, 1929).

(3) *Correspondance du P. Marin Mersenne religieux minime, publiée par M.me* PAUL TANNERY, T. I. 1617-1627 (Paris, 1932).

Digitized by Google

ne fiorentina intitolata *Discepoli di Galileo,* pubblicandone le pagine d'indiscutibile importanza e dando almeno sommaria notizia delle altre.

10. — Altro punto che necessita ulteriori studi è quello che s'intitola da Leibniz e Newton, affinchè si possa finalmente pronunciare un giudizio in ultima istanza sopra il più lungo e ostinato dibattito che s'incontra nella storia delle matematiche. Per quanto concerne Leibniz, tutti i documenti stanno per essere dati alle stampe, grazie alla edizione definitiva e completa di quanto scrisse il filosofo dell'ottimismo, alla quale, malgrado le difficoltà del momento, si è accinta la Germania. Si attende invece con intenso desiderio che ad una consimile impresa si dedichi l'Inghilterra, dando in luce i numerosi manoscritti relitti da Newton e che sono religiosamente conservati a Cambridge, tanto più che così si verrà in possesso di nuovi elementi per rendere veramente completo il quadro dei contributi dati alla scienza dell'autore dei *Principia.*

Inoltre è urgente addivenire alla delineazione di un quadro fedele e completo di quanto fecero i matematici inglesi del Secolo XVIII, seguendo le orme di Newton, prima che la creazione di una nota Scuola analitica li trasformasse in seguaci di Leibniz. La tela ed i colori per tale pittura saranno in buona parte somministrati dai periodici che venivano allora pubblicati nel Regno Unito, periodici non specializzati e recanti titoli di un traditore sapore letterario; siccome non oltrepassarono la Manica, possono ben difficilmente venire consultati da chi non può utilizzare i tesori del British Museum, onde il loro studio spetta ai compatriotti di Newton. Possa questa esortazione, per quanto flebile sia la voce di chi si azzarda a farla, venire ascoltata da chi è in grado di uniformarvisi.

11. — Avvicinandosi all'epoca contemporanea le fonti d'informazione a cui si può ricorrere sono sempre più abbondanti e degne di fede. Tacendo del fatto che la stampa sempre più largamente applicata, rende agevole il consultare le opere originali, richiamiamo l'attenzione degli storici futuri sopra la ricchissima letteratura biografica, la quale offre preziose informazioni, tanto sopra la vita degli scienziati, quanto sopra le loro opere. Se non che i relativi scritti sono dispersi in Atti di Accademie, grandi e piccole, famose e clandestine, in Programmi e Annuari di scuole di ogni grado, in Riviste generali e specializzate, ecc., il che rende estremamente difficile il prenderne conoscenza; ciò prova che una *Bibliografia delle biografie* riuscirebbe di inapprezzabile soccorso a colui che vorrà nuovamente scrivere la storia delle matematiche a partire dal Secolo XVIII (1).

12. — Chiuderò questa esposizione di alcuni fra i pensieri ed i desideri

(1) Saggi dell'opera desiderata sono gli articoli F. E. BRASCH, *Materials for*

Digitized by Google

germogliati durante la preparazione della mia *Storia* con una osservazione concernente alcune nazioni che, usando idiomi generalmente ignoti, non riuscirono a diffondere la conoscenza di quanto scrissero coloro che vi appartennero; perciò sarebbe opera altamente commendevole da parte di scienziati che oggi ne fanno parte, inspirandosi all'esempio dato da Libri, Quetelet e Gerhardt, l'esporre metodicamente e completamente, in qualche lingua largamente diffusa, l'opera matematica dei loro compatriotti. A dimostrare quanto tal voto sia giustificato servono alcuni fatti che mi sia lecito indicare brevemente finendo.

a) Nelle storie delle matematiche la Russia si presenta per la prima volta nel periodo euleriano: poco dopo ricompare grazie a Lobacevskij e Cébyceff (per non citare altri matematici dei nostri giorni); sono questi gli unici matematici russi che abbiano lasciato traccia del loro passaggio su questa terra?

b) Per la Danimarca possediamo, se non una storia, almeno una diligente bibliografia (1); ma evidentemente questa non è sufficiente a porre in completa luce il contributo dato alle matematiche dalla terra di Amleto se venne salutata come vera rivelazione la notizia che Lorenzo Mascheroni ebbe colà un antico precursore (il Mohrendal) e che ivi fu per la prima volta concepita (dal Wessel) la rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

c) Rimanendo nella Scandinavia, in Isvezia ebbe fama di valente matematico S. Klingenstjerna e vi ebbero sede attive Accademie e Società scientifiche; dal canto suo la Norvegia va giustamente superba per avere dati i natali ad Abel; come ammettere che altri scienziati non li abbiano prima preparati e dopo emulati?

d) Finalmente l'Ungheria figurava sinora nelle storie delle matematiche esclusivamente grazie ai due Bolyai; ma che essa abbia prodotti altri investigatori originali risulta da una pubblicazione di cui ebbi notizia nel momento in cui licenziavo le ultime pagine del mio III Volume (2); egregi matematici che vivono oggi colà inducono a ritenere gli Ungheresi dotati di una spiccata attitudine per le scienze esatte; è possibile che essa siasi manifestata sporadicamente e soltanto in tempi a noi vicini? Altri meglio informato di me risponda.

---

the biography of contemporary scientist (chiefly obituary) (« Isis », t. V., 1923, pp. 244-62); R. C. ARCHIBALD, *Bibliographia de mathematicis* (Scripta mathematica », t. I, 1933, pp. 173-81 265-74, ecc.).

(1) N. NIELSEN, *Matematiken i Danamrk*, 1528-1800 (Kobenhavn, 1910) e *Matematiken i Danmark*, 1801-1908 (id., 1912).

(2) J. v. WOYCIECHOWSKY, *Paul Sipos ein ungarischer Mathematiker des ausgehenden 18. Jahrhunderts* (Mitth. des mathem. Seminars der Universität Debrecen, 1932).

Digitized by Google

V.

PROGRAMMI DEL PASSATO E PROGRAMMI PER L'AVVENIRE

Lettura fatta a Milano il 22 Aprile 1905 in occasione della riunione regionale dei professori di matematica, promossa dall'Associazione « Mathesis »; tradotta in tedesco dal Prof. H. WIELEITNER col titolo *Vergangene und künftige Lehrpläne* (Leipzig, 1906).

« L'età presente si sente vecchia e manifesta il presentimento non del prossimo fine, che nulla finisce, ma della sua trasformazione ».
CARDUCCI

1. — E' artificio oratorio assai noto, grazie all'uso molto frequente che se ne fece, il tentare di cattivarsi la benevolenza dei propri ascoltatori col presentarsi sotto l'aspetto di chi prende la parola cedendo ad irresistibili pressioni di amici o colleghi. Anch'io, per assicurarmi da parte Vostra la cortese indulgenza che mi è tanto necessaria, vorrei mostrarmi sotto la veste di uno condannato ad adempiere un obbligo a cui non gli è concesso sottrarsi, ed invocante, se non altro, un pò di compassione. Ma la verità — questa Dea, di cui noi tutti siamo sacerdoti — m'impone invece di dichiarare che a questo posto di combattimento io mi trovo soltanto per mia elezione; ed adempio ad un imprescindibile dovere di riconoscenza, sentitamente ringraziando la Presidenza dell'associazione *Mathesis* per avermi accordato l'ambito onore d'intrattenervi sopra di una questione di cui urge occuparsi; cioè intorno alla necessità di radicali riforme, nella quale, *non solamente secondo il mio modesto parere*, si trova l'insegnamento della matematica nelle nostre scuole medie, se esso vuole adempiere il nobile ufficio ad esso affidato dalla società nell'ora che volge.

Non accusatemi, egregi Colleghi, di commettere con tale intervento un'illegale scorreria in un campo sul quale vantate indiscutibili diritti di proprietà; le varie discipline matematiche sono concatenate tanto sal damente le une con le altre che chi una ne professa non può nè deve disinteressarsi per tutto ciò che fanno coloro che insegnano le altre; ed è mio convincimento che soltanto siffatta cordiale collaborazione di tutti coloro che le coltivano e le professano può portare alla conclusione che un concetto unico governi lo svolgimento di una scienza che, benchè vastissima, è unica nella natura e nel metodo.

Digitized by Google

Gli è appunto ispirandosi a siffatto concetto che l'Associazione britannica pel progresso della Scienza da molto tempo include questioni d'insegnamento fra i temi da trattarsi nel corso delle sue annuali adunanze; ed a tutti è noto quali ampi e fecondi scambi d'idee abbiano in conseguenza avuto luogo.

Tale esempio venne seguito dalla Società dei naturalisti tedeschi, la quale, a partire dal 1896, suol porre all'ordine del giorno delle proprie periodiche riunioni la determinazione dell'indirizzo da darsi all'istruzione scientifica preparatoria agli studi universitari.

Nè va taciuto come un analogo intendimento abbia consigliato di tenere a Parigi nel 1903 alla Scuola Superiore di studi sociali un gruppo di conferenze intorno alla educazione della democrazia (1), fra le quali conferenze piacemi segnalarvi quella dell'Hadamard sulle scienze positive (benchè io non aderisca alla tesi ivi sostenuta), e che pure a Parigi, nel 1904, al Museo pedagogico, ebbe luogo una serie di interessanti discussioni concernenti i programmi di matematica e fisica delle scuole secondarie francesi, discussioni la cui base venne fornita da alcuni splendidi discorsi del Poincaré, del Lippmann e del Borel (2).

Nè vi assalga il timore od il dubbio che io venga qui ad esporvi i frutti acerbi e non nutrienti delle elucubrazioni di un teorico solitario. Chè, anzi, se reputai indispensabile per l'avvenire dell'Italia l'agitare la pubblica opinione in favore di uno svecchiamento dei nostri ammuffiti programmi, gli è che dovetti con dolorosa sorpresa convincermi che la nostra patria trovasi oggi molto in arretrato in paragone delle più colte nazioni civili. Gettare un grido d'allarme capace di svegliare i sonnolenti, scuotere gli inerti ed eccitare alla pugna i meno audaci, da tempo mi apparve, quindi, dovere di buon cittadino (3). Ora per compierlo quale occasione poteva offrirmisi più propizia del presente convegno, ove Voi accorreste col deliberato proposito di opporvi energicamente ad ogni tentativo inteso ad abbassare il livello dell'insegnamento scientifico nelle scuole classiche?...

---

(1) E. LAVISSE, A. CROISET, C. SEIGNOBOS, P. MALEPERT, G. LANSON, J. HADAMARD, *L'éducation de la démocratie* (Paris, 1903).

(2) *Conférences du Musée pédagogique. L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques par* MM. H. POINCARÉ, G. LIPPMANN, L. POINCARÉ, P. LANGEVIN, E. BOREL, F. MAROTTE, *avec une Introduction de* M. L. LIARD (Paris, 1904).

(3) In ciò che segue io mi occupo dei Licei e della Sezione fisico-matematica degli Istituti tecnici. Ma i lamenti, non a guari fatti per l'assenza dell'*attuaria* dal programma della Sezione Commerciale, mostrano come alle osservazioni fatte potrebbesi dare più vasta portata.

Digitized by Google

2. — A scanso di malintesi mi giova anzitutto proclamare che io non intendo in alcun modo negare o diminuire il valore dei rinnovamenti che subì il metodo di esposizione di alcune parti della matematica elementare. Ricordo, infatti, con vivo compiacimento e legittimo orgoglio nazionale, come le ricerche sopra i fondamenti della geometria, che Battaglini e Beltrami trapiantarono e fecero meravigliosamente fiorire in Italia, diedero risultanze tali da venire giudicate degne di esportazione al di là delle Alpi. Similmente, la teorica dell'equivalenza di figure piane e solide conseguì, appunto per opera di alcuni nostri, quell'alto grado di perfezione che può misurarsi con la scorta dei nostri migliori trattati. E la rigorosa dottrina degli irrazionali da vario tempo prese il posto di quel troppo spiccio procedimento di esposizione, consistente in una cieca estensione dell'aritmetica razionale, ispirato al comodo principio della «généralité de l'analyse». Inoltre altri capitoli della matematica elementare assunsero contenuto ed aspetto pienamente rispondenti al livello oggi raggiunto dalla scienza, mentre il favore con cui molti accolsero la proposta di fondere la planimetria con la stereometria fa fede delle buone disposizioni che ha taluno di riordinare da capo a fondo uno dei più importanti rami della nostra scienza.

Ma quello che, almeno nelle sue linee generali, rimase invariato è il piano generale degli studi matematici nelle scuole medie, onde potè non a torto osservarsi che, dopo le costumanze funebri, sono le istituzioni pedagogiche quelle che più ostinatamente resistono agli sforzi degli innovatori. I compilatori dei relativi programmi sembrano avere ignorato come con Descartes e Fermat, con Leibniz e Newton per le scienze esatte sia cominciata un'èra novella e come, in particolare, nei primi decenni del secolo XIX sia stato felicemente infranto il ferreo cerchio entro cui la geometria sembrava condannata a perennemente vegetare. «Di quando in quando — scrive il Signor Giulio Tannery (1) — alcune persone gravi e compassate, tutte comprese degli alti interessi su cui sono consultate, si adunano per rivedere e correggere i programmi, sempre coll'intendimento di alleggerirli; dopo molto lavoro esse non riescono che a spostare qualche linea o, a dir molto, ad aggiungerne o sopprimerne alcune!» Ora queste parole, che l'egregio scienziato francese scrisse avendo di mira soltanto la propria terra, non sono forse letteralmente applicabili al nostro paese, malgrado le lamentate, troppo frequenti, mutazioni dei nostri ordinamenti scolastici?... Eppure, perchè mai anche nell'istruzione non si dovrebbe avere il coraggio di liberare lo spirito da

(1) *Les mathématiques dans l'enseignement* (Revue de Paris, 1° Agosto 1900).

Digitized by Google

vincoli deplorevoli e di espellere dal campo delle idee ciò che è antiquato per far posto a quanto è vivo e fecondo?...

3. — Limitando pel momento le nostre considerazioni alla geometria, come la materia in cui le circostanze si palesano sotto l'aspetto più spiccato ed impressionante, il piano secondo il quale essa viene insegnata nei nostri Licei è nell'insieme quello che risulta dagli *Elementi* di Euclide e che, quindi, veniva presumibilmente adottato nelle scuole dell'antica Grecia; il Rinascimento lo richiamò in vigore, dopo di avervi accuratamente tolto la polvere su di esso accumulata durante le tenebre medioevali, e noi l'abbiamo conservato. Tale programma per fermo appare redatto con profondo, acuto e fine accorgimento quando si tenga presente lo stato del sapere nell'epoca in cui esso vide la luce e lo scopo che col suo mezzo volevasi raggiungere. L'algebra allora non esisteva, l'aritmetica era ancora bambina e soltanto la geometria era adulta e robusta. Ciò a cui miravasi era d'insegnare quel tanto di «algebra geometrica» e di geometria bastanti per porre in grado il discepolo d'intendere le dottrine allora costituenti la matematica sublime, cioè le opere di Archimede ed Apollonio, nonchè le altre che Pappo Alessandrino ha dottamente commentate od almeno pietosamente salvate dall'oblio. Ora nessuno potrebbe ragionevolmente porre in dubbio se tale intento sia stato conseguito, chè chiunque siasi assimilati gli *Elementi* di Euclide è in grado di comprendere e gustare tutta la classica matematica greca.

Ma è forse questo lo stesso scopo che deve oggi proporsi l'insegnamento della geometria nelle scuole medie? A dimostrare che a tale domanda fa mestieri senz'esitanza dare risposta negativa basterebbe il fatto che delle opere testè ricordate molte non esistono più e le superstiti vengono consultate soltanto dai rari cultori della storia della scienza delle età che furono.

Conseguenza del segnalato cambiamento del fine, con conservazione di mezzi è il fatto che lo studente il quale, abbandonate le aule liceali, entra in una delle nostre Facoltà matematiche, si trova sbalzato in una atmosfera intellettuale che nulla ha di comune con quella in cui visse sino allora. Le figure geometriche, che in Euclide apparivano rigide, immobili, prive di anima, gli si presentano ora, alla luce della moderna geometria, in uno stato di trasfigurazione perenne, e così, al suo occhio attonito vengono rivelate affinità profonde, insospettate, sorprendenti; la tediosa considerazione costante delle figure, la necessità di distinguere in ogni teorema un grande numero di casi, l'eterna considerazione di triangoli uguali o simili, l'incessante intervento del teorema di Pitagora, cose tutte che durante la sua adolescenza gli resero odiosa ed antipatica la più bella delle scienze, possono da lui considerarsi come appar-

Digitized by Google

tenenti ad un passato tramontato per sempre; ed egli, o possiede la forza di respirare a pieni polmoni il vivificante ossigeno che gli viene somministrato, oppure abbandona scoraggiato un ordine d'investigazioni per intendere le quali non si sente abbastanza preparato.

4. — Tale deplorevole condizione di cose, che toglie continuità all'insegnamento della più logica fra le scienze, essendo stata da tempo segnalata, venne, in parte almeno, resa meno grave, sicchè oggi il dislivello fra l'insegnamento matematico nelle scuole classiche e l'insegnamento universitario è di gran lunga meno sensibile di quanto fosse un ventennio fa, della qual cosa il merito risale assai meno ad opportune disposizioni governative, che alla coraggiosa ed intelligente iniziativa di abili insegnanti, i quali compresero i nuovi tempi. Tuttavia quello stato di fatto sussiste ancora e bisogna industriarsi ad eliminarlo per sempre.

La persistenza di esso deve, se non m'inganno, rintracciarsi, oltrechè nello spirito di conservazione dominante, per legge ineluttabile, qualunque organizzazione, in parte nella stessa privilegiata natura della disciplina di cui noi ci occupiamo. Come ben disse il Beltrami, « nella scienza matematica il trionfo di concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite; esso può soltanto mutarne il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso » (1). In essa non vi ha esempio di dottrine, come la teoria flogistica od il principio dell'orrore del vuoto o l'aristotelica massima della incorruttibilità dei cieli, che nessun professore potrebbe oggi senza arrossire proclamare dalla cattedra conformi alla realtà; ciò che fu vero per Euclide, lo era pei nostri padri e lo è egualmente per noi, e chi lo apprese da giovinetto sente un'invincibile propensione ad insegnarlo ad altri.

Un'altra radice della lamentata persistenza si trova nelle incancellabili tracce di umanesimo che tutti, in varia misura, conserviamo, le quali c'infiammano di un entusiasmo un po' esagerato per tutto ciò che sa di classico. È un sentimento non esclusivo di noi Italiani, ma che (se si bada ad un ammonimento che Erberto Spencer dalla tomba lanciò ai propri connazionali) (2) è urgente di vincere, se si vuole che l'insegnamento raggiunga il fine saviamente assegnatogli da Ernesto Rénan, quello cioè di rendere tutti partecipi, se non dell'odierno lavoro scientifico, almeno dei risultati di esso.

5. — Per raggiungere od almeno avvicinare tale scopo devonsi an-

---

(1) V. l'esordio del celebre *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea* (Giorn. di matem, T. VI, 1867).

(2) Si vegga la postuma *Autobiografia* del celebre filosofo.

Digitized by Google

zitutto introdurre nel piano dell'istruzione secondaria, al più presto possibile, almeno alcune di quelle idee generali che, intervenendo di continuo ed efficacemente nelle teorie matematiche moderne, possono dirsi costituirne il midollo spinale.

E prima di qualunque altro il concetto di funzione, concetto di cui — per adoperare la pittoresca espressione del Klein — giova far risaltare l'azione che esercita di *fermento*, che anima e scuote l'intera compagine della scienza nostra (1). Con tale suggerimento non s'intende già di consigliare s'insegni ai giovinetti la nozione più generale di funzione, quale s'incontra nelle regioni più elevate dell'analisi, ma unicamente l'idea di dipendenza funzionale, nell'aspetto sotto cui presentasi, non solamente in molteplici teorie matematiche elementari, ma anche in innumerevoli fenomeni materiali ed in notissimi fatti legati alla vita sociale. L'algebra elementare e la trigonometria, offrendo esempi istruttivi ed importanti del come si possa investigare rigorosamente tale relazione, porgono il mezzo per togliere alla sua definizione quanto di nebuloso e, direi, quasi di metafisico che essa sembra a prima giunta contenere; mentre altri esempi, tratti dal mondo fisico, potranno servire di fondamento a quel ponte ideale fra la matematica e la realtà, di cui insigni pedagogisti ritengono urgente la costruzione (2).

Poco meno importante dell'idea di funzione è un'altra, che ad ogni piè sospinto s'incontra nella matematica, sia nella sua forma, per dir cosi, statica di *corrispondenza o rappresentazione*, sia nel suo aspetto dinamico di *trasformazione*. Essa esiste, nello stato latente, alla base di molti capitoli dell'antica geometria, ma venne messa in luce e posta in azione soltanto dai matematici del secolo scorso; i quali, studiandola a fondo, prima nei casi dell'omografia e della correlazione, poi nell'ipotesi amplissima di trasformazioni razionali, e finalmente in tutta la sua generalità, ne rile-

---

(1) La medesima idea venne sostenuta dal Prof. FEHR in una lettura *La notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes)* fatta il 17 Dicembre 1904 in occasione di una riunione tenuta dai professori di matematica delle scuole svizzere: vedi *L'enseignement mathématique*, T. VII, 1905, p. 178.

(2) Cfr. le notevoli conferenze del LAISANT raccolte nel volume *L'éducation fondée sur la science* (Paris, 1904).

L'utilità di ravvivare con applicazioni pratiche l'insegnamento delle matematiche pure venne da me segnalata nella comunicazione *Sur l'enseignement des mathématiques en Italie* fatta al Congresso internazionale dei matematici tenuto a Heidelberg nell'agosto 1904. Ora il chiar. Prof. PIERI ha notato che la medesima idea trovasi magistralmente svolta nell'opera di L. XIMENES intitolata *I sei primi libri della geometria piana* (Venezia, 1752); ed io colgo con piacere la presente occasione per segnalare agli insegnanti di matematica un'opera del buon tempo antico, da cui c'è ancora molto da apprendere.

Digitized by Google

varono lo straordinario potere; allora gli analisti non esitarono ad impadronirsene e ne fecero applicazioni di tal valore che ormai non vi è più ragione di annoverarla fra le idee direttive, proprie piuttosto della scienza del numero che della scienza dell'estensione. L'introduzione di tale concetto nell'insegnamento della geometria elementare, anche recentemente consigliato dal Darboux (1), essendo già avvenuto in parecchi manuali nostrani e forestieri, non è più necessario di spendere tante parole per dimostrarne l'utilità e la convenienza.

Se, adottando il modo di vedere del Poincaré (2), giovi eziandio diffondere fra i principianti l'idea di *gruppo* (di operazioni algebriche o di trasformazioni geometriche) è questione che sembra esigere ulteriori studi; tuttavia, ciò che sin d'ora è da consigliarsi ad ogni insegnante è di tenerla sempre presente, chè solo col suo mezzo si avverte il nesso che esiste fra varie teorie in apparenza eterogenee.

Ma, intanto, già i concetti di funzione e di corrispondenza, spargendo torrenti di luce sopra molti capitoli della matematica elementare, e quindi ponendone a nudo la comunanza di natura ed origine, saranno sufficienti a dare all'esposizione quell'unità e quella vitalità, la cui assenza così profondamente e generalmente si lamenta. Essi inoltre avranno l'invidiabile potere di rendere meno arido e più attraente l'insegnamento di nostra pertinenza, sicchè, per esso almeno, non sia più lecito ripetere in avvenire l'arguta osservazione del Tannery (3) « essere uno dei resultati più sicuri del nostro insegnamento classico quello di abituare gli studenti ad annoiarsi ».

6. — Oltre a questi concetti di indole generale, vi sono intere teorie matematiche che potrebbonsi utilmente fare retrocedere al livello dell'insegnamento secondario; sono gli elementi della *geometria analitica* e della *geometria descrittiva,* quella come parte integrante della planimetria, questa come coronamento della stereometria.

Per quanto concerne la prima di tali discipline, la convenienza della proposta innovazione si palesa evidente a chi rifletta che il sistema di coordinate cartesiane trovasi già implicitamente applicato nella teorica delle funzioni circolari, che esso porge la più chiara ed istruttiva illustrazione del concetto di funzione (del quale già caldeggiai l'accesso nell'insegnamento medio) e che l'applicazione di esso a rette, circoli e coniche non esige cognizioni algebriche oltrepassanti la teoria delle equa-

---

(1) Nell'*Etude sur le développement des méthodes géometriques, lue le 24 Sept. 1904 au Congrès des Sciences et des arts à Saint-Louis* (Bull. des Sciences mathém. 1904).

(2) *Conférences* citate p. 19.

(3) V. l'art. già citato.

Digitized by Google

zioni lineari e quadratiche. D'altronde il costume sempre più diffuso di surrogare le tavole numeriche con opportune curve rende indispensabile ad ogni persona colta di rendersi esatto conto dell'equivalenza perfetta che esiste fra un calcolo effettuato secondo una certa procedura ed una figura tracciata uniformandosi ad un'assegnata legge. A coloro poi che temessero essere tale argomento troppo arduo per la mente di adolescenti io ricorderò come Quintino Sella, incaricato nel 1856 dell'insegnamento delle matematiche nella Sezione industriale dell'Istituto tecnico di Torino, riuscisse a compendiare in poche lucidissime conferenze tutte quelle nozioni di geometria analitica del piano e dello spazio che sono indispensabili per stabilire sopra solide basi l'assonometria ortogonale (1). Ove poi neppure tale fatto fosse giudicato inoppugnabilmente persuasivo, io mi permetterei di consigliare le lettura di un recente libretto del Prof. Gibson (2), ove la rappresentazione grafica delle funzioni é presentata sotto tale forma che nessuna persona, anche d'intelligenza mediocre, può trovare ostacoli ad impadronirsene.

Riguardo alla propugnata introduzione della geometria descrittiva nel programma dei Licei — in quello degli Istituti tecnici tale disciplina vi è sempre stata — ricorderò le circostanze frequentissime in cui ci si trova nella necessità di concepire e delineare figure a tre dimensioni e di eseguire sopra di esse determinate operazioni. Tenendo conto di ciò non risulta palese l'importanza d'insegnare al più presto possibile come il concetto di corrispondenza, opportunamente applicato, guidi ad un mezzo pratico per sostituire ogni figura solida con una figura piana, per surrogare l'operazione ineseguibile di disegnare nello spazio con quelle dell'ordinario disegno geometrico, per ridurre ogni problema stereometrico ad una questione di geometria piana?... Non allarmatevi, Egregi Colleghi, per siffatta metamorfosi di programmi; non temete che i Vostri discepoli si trovino in conseguenza nell'impossibilità di seguirvi; non perdete di vista che quanto si chiede non è altro se non che vengano gettati i fondamenti dottrinali di quei procedimenti che, sin dall'epoca di Vitruvio, gli architetti adoperavano nel loro quotidiano lavoro, e che ciò può farsi solo applicando la parte più elementare dell'ordinaria geometria dello spazio; tenete infine presente che Carlo Dupin, il più illustre dei discepoli di Monge, incaricato nel 1825 di fare un corso di geometria e meccanica al Conservatorio delle arti e mestieri di Parigi, non esitò un'i-

(1) L'eccellenza del metodo didattico del SELLA è dimostrato da ciò che quelle lezioni, rese pubbliche col mezzo della litografia, vennero subito tradotte in tedesco. V. *Ueber die geometrischen Principien des Zeichnens, insbesonders über die Axonometrie*; *deutsch. von* M. CURTZE (Archiv f. Math und Phys. T. XLIII, 1865).

(2) *An elementary Treatise on Graphs* (London, 1904).

Digitized by Google

stante ad includervi gli elementi del metodo della doppia proiezione (1); ora si può credere che quanto fu ritenuto (e risultò infatti) intelligibile per semplici operai riuscirà ostico e duro a chi dispone già di una discreta coltura ed ha l'abito del ragionamento rigoroso ?

Permettetemi che ad ulteriore conforto della mia tesi io rilevi che il mutamento da me invocato è ormai un fatto compiuto presso popoli che non a torto si ritengono trovarsi oggi alla testa della civiltà. Ora io non mi schiero certo fra coloro che, con supina ammirazione, si prosternano dinnanzi a tutto ciò che vien fatto al di là dei nostri confini geografici; ma reputo indegno di uno scienziato meritevole di tale nome il prendere come propria guida la stolta massima di Federico Nietsche: « Io abito nella mia propria casa e mai ho imitato alcuno in alcuna cosa! » (2).

7. — A meglio assodare la ragionevolezza dei miei suggerimenti si può aggiungere l'osservazione che è sorte comune di tutte le teorie di pervenire, coll'andare degli anni, nel dominio di un pubblico sempre più vasto, cioè di democratizzarsi; così quella che Chasles chiamava *geometria superiore* non è più alla vetta, ma alla base dell'edificio geometrico; e quello che ai tempi del Bordoni portava il superbo e terrorizzante appellativo di *calcolo subblime* è ormai un semplice capitolo del piano di studi di tutti gli ingegneri.

Inoltre, a provare che le mie domande non sono esagerate sta il fatto che in Francia, non soltanto esse furono già esaudite, ma si è arrivati ad introdurre nell'insegnamento medio persino gli elementi del calcolo infinitesimale. In qual modo e in quale misura la discrezione mi vieta di esporre; ma un eccellente volume dei fratelli Tannery (3) pone in grado di apprenderlo chiunque s'interessi alla questione. Ciò che invece va esplicitamente notato si è che una numerosa schiera di pensatori, capitanata da una persona dal valore di Felice Klein (4), attualmente lavora per ottenere che l'esempio della Francia venga seguito sull'altra sponda del Reno, sorretti ed incoraggiati a farlo e dagli ottimi risultati già ot-

---

(1) V. l'opera in tre volumi *Geométrie et mécanique des arts et métiers* (Bruxelles, 1826).

(2) Tale è il motto posto in fronte alla *Scienza gaia* di quel filosofo.

(3) *Notions de mathématiques* par J. TANNERY. *Notions historiques* par P. TANNERY (Paris, 1893).

(4) Cfr. il volume: F. KLEIN und. E. RIECKE *Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts in den höheren Sckulen.* Teil I (Leipzig und Berlin).

Al detto movimento si è di recente associata anche l'Austria. Veggasi, infatti, il notevole discorso del Prof. ZAHRADNICEK *Ueber die Frage der Verwendung der Infi-*

Digitized by Google

tenuti in alcune scuole della Germania (1) e dai voti ripetutamente emessi dalla Società degli ingegneri tedeschi (2). Benchè io dubiti sia giunto oggi per l'Italia il momento di associarsi in tale campagna ai nostri alleati politici, pure io la trovo meritevole di tutta la nostra simpatia, sia in base a considerazioni dottrinali, sia fondandosi sopra ragioni di altra specie; malgrado la tema che mi assale di abusare della pazienza Vostra, Vi prego di concedermi di fare un rapido cenno delle une e delle altre.

Chi attentamente guardi al fondo delle cose non tarderà a riconoscere che quanto è essenzialmente caratteristico per l'analisi infinitesimale, quanto, in conseguenza, riesce difficile a chi ne imprende lo studio, non è già il relativo algoritmo, ma l'esattamente concepire che cosa i matematici intendano sotto i nomi di *limite* e di *infinito;* ora tali concetti possono essi bandirsi del tutto dalla matematica elementare? Chi lo facesse dovrebbe adattarsi a radiare in pari tempo la teoria degli irrazionali, la determinazione dell'area del circolo e del volume della piramide e dei corpi rotondi, in una parola sopprimere dall'insegnamento matematico medio i capitoli più belli ed importanti. Ammessa, pertanto, l'impossibilità di escludere dalle scuole secondarie i cardini dell'analisi infinitesimale, è naturale e ragionevole il proporsi di esporli con metodo e rigore, per poi applicarli sì da ottenere con procedimento uniforme, non solo tutte le proposizioni elementari dell'ordinaria geometria metrica, ma eziandio altri risultati congeneri più generali; tanto più che solamente in tal modo si giunge in possesso del mezzo per esporre sotto forma appieno soddisfacente le nozioni di velocità ed accelerazione, ingredienti indispensabili di qualunque corso di fisica. Ciò è appunto quanto si vuole ottenere da coloro che militano sotto il vessillo del Klein; ora m'inganno io forse affermando essere tale idea così razionale e nobile che i nostri auguri di vittoria devono accompagnare coloro che attualmente combattono pel suo trionfo?...

---

nitesimalrechnung beim Unterricht in der Mathematik und Physik an der österreichen Mittelschulen pubblicato nel Vol. XIX (1905) della rivista *Osterreiche Mittelschulen* p. 36-54; discorso in cui è sostenuta la tesi seguente: « E' desiderabile che nel piano di studi delle scuole medie vengano introdotte quelle parti del calcolo differenziale ed integrale che sono necessarie ad una trattazione esatta e pienamente corrispondente alle esigenze della didattica moderna di tutte quelle teorie matematiche e fisiche che per la loro natura appartengono all'analisi infinitesimale, che però vennero sino ad oggi svolte con metodi così detti *elementari*, ma in realtà di scarso valore ed in parte anzi del tutto insoddisfacenti ».

(1) *Verhandlungen des Breslauer Naturforscher-Versammlung über den naturviss. und mathem. Unterricht an den höheren Schulen* (Leipzig, 1905) p. 67.

(2) Ib. p. 65.

Digitized by Google

Il giorno in cui la geometria analitica ed il calcolo infinitesimale non saranno più totalmente affidati all'insegnamento superiore, questo potrà svolgersi in modo meglio conforme alle aspirazioni generali; così, per quanto concerne i futuri ingegneri, potrà essere anticipato lo studio della meccanica razionale e soddisfatto il legittimo desiderio più volte espresso dai pratici, che le materie tecniche ricevano più ampio svolgimento di quanto sia oggi effettuabile; e per quanto invece tocca i laureandi in matematica, si potrà allora introdurre nel piano dei loro studi almeno un paio d'importanti materie oggi condannate ad un ingiusto ostracismo, quali la geometria differenziale e la teoria dei numeri, i fondamenti della geometria (1) e la teoria delle sostituzioni.

8. — Contro la riforma da me propugnata io sento, anche dai più benevoli, elevarsi un'obbiezione assai seria, a cui urge venga data al più presto soddisfacente risposta. Mi si dirà, cioè, che i programmi d'insegnamento della matematica sono già tanto ampi, in paragone delle ore assegnate al loro svolgimento, che è follia pensare ad ampliarli. Tale osservazione è di una giustezza che è vano negare; mi studierò, quindi, di indicare in qual maniera, secondo il mio modo di vedere, si possa vincere la difficoltà con essa segnalata.

In primo luogo osservo come la netta separazione fra algebra e geometria, generalmente praticata nelle nostre scuole, oltre ad impedire allo studente di rendersi esatto conto della possibilità di trattare con metodi diversi tutte le questioni riferentisi all'estensione figurata, produce un deplorevole sperpero di tempo (2). La rigorosa unità di metodo — che dal punto di vista logico è dote essenziale per ogni teoria matematica — applicata nei primi stadi dell'istruzione, accrescendo la difficoltà dell'apprendere, urta contro la celebre « legge dell'economia del pensiero », così acutamente stabilita dal Mach (3). Ben se ne avvide Luigi Cremona quando, verso il tramonto della sua gloriosa carriera, propose di fondere in una sola le cattedre universitarie di geometria proiettiva e di geometria analitica, onde ottenere che ogni questione geometrica venisse trattata col metodo più consono alla sua intima natura, in conformità al principio del minimo mezzo, percorrendo il cammino offrente la più piccola resistenza.

---

(1) Noto a tale proposito che nel corrente semestre F. KLEIN tiene all'Università di Göttingen un corso sopra *La geometria elementare dal punto di vista delle matematiche superiori.*

(2) Fra i danni derivanti dal detto sistema va rilevato l'essere la trigonometria insegnata come una disciplina a sè, invece che, come dovrebbe, quale un capitolo della geometria di misura.

(3) V. il VI cap. della notissima opera *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt.*

Digitized by Google

Noto in secondo luogo esistere nella matematica elementare intere sezioni che si potrebbero, senza alcun danno, risparmiare ai nostri studenti. In tale condizione si trova la teoria delle proporzioni, che, con tutta la sua complicata nomenclatura, ci si presenta come ciò che effettivamente essa è, vale a dire come il residuo di una scienza ormai scomparsa; infatti tale teoria, per ragioni note, rappresenta una parte preponderante nella teoria delle grandezze secondo i matematici greci, epperò ben a ragione Euclide vi dedicò uno dei più ammirandi ed ammirati libri dei suoi *Elementi*; ma che cosa di essenzialmente nuovo presenta essa agli occhi di chi conosce i rudimenti della teoria delle equazioni lineari ad un'incognita? Ad onore del vero va detto che i trattati moderni (specialmente quelli d'aritmetica) non consacrano più alle proporzioni le centinaia di pagine che vi dedicavano gli autori che gli antichi elessero a loro guida; ciò non ostante le lunghe pagine che ancora si stampano sopra la «regola del tre», la «regola di miscuglio», la «regola di alligazione» *et simi lia* costituiscono un inutile ingombro e potrebbero vantaggiosamente venire surrogate con poche considerazioni sopra le equazioni di 1° grado; lo studente otterrebbe così minore volume e massa maggiore di vital nutrimento.

Percorrendo poi i programmi di alcune nostre scuole vi si incontrano parecchi numeri di cui io non esiterei un'istante a chiedere la soppressione, perchè l'utilità degli argomenti a cui si riferiscono è assai discutibile. In tali condizioni si presentano la teoria *elementare* dei massimi e minimi e la determinazione, pure *elementare*, del vero valore di espressioni di forma indeterminata, le quali, non fosse altro a cagione del loro limitato campo di applicabilità, appaiono estranee al quadro delle matematiche e si direbbero scelte dal legislatore col solo intento di porgere il destro ad insegnare ingegnosi artifici di calcolo e di offrire materia a questioncelle curiose. Così non esito nemmeno a proporre il bando per le nozioni di analisi indeterminata di primo grado, le quali non conducono a nessun risultato di qualche pratica utilità e, d'altra parte, non costituiscono nè una continuazione logica, nè una preparazione razionale di teorie insegnate altrove (1). Finalmente dubito assai se convenga mantenere nel programma dell'istruzione secondaria la così detta «teoria elementare» delle sezioni coniche, teoria in cui non campeggia alcuna idea generale, nuova o feconda, e che, per la complicazione dei ragionamenti ivi adoperati, stanca assai lo studente. Introdotta la nozione di corrispondenza, stabiliti gli elementi della geometria cartesiana, potrà invece esser fatto conoscere almeno uno dei metodi che la geometria moderna

(1) Sarebbe assai preferibile insegnare nelle scuole secondarie almeno uno dei metodi di risoluzione delle equazioni di 3o e di 4° grado.

Digitized by Google

vantaggiosamente usa per studiare quelle celebri curve (1). Tributiamo la più fervida ammirazione per i geniali procedimenti mediante cui Apollonio Pergeo dimostrò le proprietà delle curve del second'ordine; ma affrettiamoci a porre a disposizione dei futuri combattenti per la ricerca del vero quelli assai più fertili e potenti che vanno sotto il nome di Fermat e Descartes, Steiner e Chasles, Möbius e Cremona.

9. — La riforma, di cui ho tracciate le linee generali, appare agli occhi miei attuabile tenendo conto delle giovani e preziose energie in quest'ultimo trentennio reclutate a servizio della pubblica istruzione, grazie alle quali il livello intellettuale del corpo insegnante arrivò ad un'altezza che fa la patria nostra lieta e superba. Ed è appunto ai giovani, come di regola meno affetti di scetticismo e misoneismo, che io raccomando le idee che io, animato dal soffio di rinnovamento, che alita nel mio pensiero, ebbi il coraggio di esporre, e che molti condividono. Non credano che i risultati ottenuti da essi quando erano studenti e che ora conseguono come professori dipendano dal piano di studi seguito; la loro intelligenza e il loro zelo porgono sicuro affidamento cho lo stesso sarebbe avvenuto anche con uno più moderno. Nè temano essi che il vagheggiato mutamento sia per arrecare un deplorevole aggravio agli studenti; chè l'impossessarsi delle idee generali, su cui poggia la matematica moderna, riesce di regola meno faticoso e più attraente pel giovane del seguire le lunghe e spesso artificiose dimostrazioni dell'antica geometria. D'altronde fosse pure che, in conseguenza di quella riforma crescessero le difficoltà degli studi secondari, sarebbe ciò gran male? La selezione dei giovani da natura veramente chiamati professioni liberali menerebbe in tal caso, meglio d'adesso, a risultamenti più conformi alla realtà; si diminuirebbe quello che Bismarck, con frase scultoria improntata a superbo disprezzo, chiamava «l'infinito proletariato dei baccellieri»; e forze considerevoli verrebbero utilizzate in altri campi, non meno nobili, ma sgraziatamente non abbastanza tenuti in onore presso di noi.

10. — Nell'atto di prendere commiato da Voi non mi è dato nutrire la seducente lusinga di avervi tutti consenzienti alle idee di cui mi sono dichiarato fautore. Ma quello che mi pare ragionevole di chiedere a Voi, a cui l'onesto lavoro mantenne la tranquillità e la pacatezza dell'animo, è di esaminarle con la serena e benevola imparzialità a cui hanno diritto le proposte di chi, pure essendo animato da altri ideali, non è di-

---

(1) Con profonda soddisfazione noto come, in seguito alla presente lettura, parecchi insegnanti di istituto tecnico (e fra gli altri i Prof. BARDELLI e CIANI) mi dichiararono avere essi da tempo adottato il sistema di stabilire mediante coordinate cartesiane le proprietà fondamentali delle sezioni coniche.

Digitized by Google

mentico della realtà. Ritornati alle Vostre sedi, meditate sulla riforma che con fede sincera io sottoposi al Vostro illuminato giudizio; tentate di attuarla nella misura che le leggi consentono ed il Vostro retto criterio consiglia; date notizia ai competenti dei frutti delle osservazioni fatte e delle esperienze compiute, e se le une e le altre saranno conformi alle mie previsioni, preparate la pubblica opinione in favore del desiderato rinnovamento. Gli è soltanto quando tali osservazioni e tali esperienze saranno state fatte su vasta scala e ripetute in ambienti diversi, che sarà possibile decidere se i pensieri e i desideri che ho manifestati debbono giudicarsi come riflesso di sogni dileguantisi al lume di una critica rigorosa, oppure come lontana preparazione a tempi migliori per la nostra scienza e la nostra patria.

VI.

LA SCUOLA MEDIA E LA SUA ATTUALE CRISI DI SVILUPPO

Discorso inaugurale del V Congresso della Società « Mathesis », pronunziato a Padova il 20 Sett. 1909

1. — Il 15 Aprile dell'anno che or volge al tramonto la Germania ha solennemente commemorato il primo centenario della nascita di Ermanno Grassmann; il preclaro pensatore, sommo tanto come matematico, quanto come filosofo; l'autore dell'imperitura *Ausdehnungslehre* e di ricerche sopra la scienza del linguaggio così profonde, originali e fruttifere da procurare a chi le compì, da parte dell'Università di Tubinga, il titolo di dottore in filosofia *honoris causa;* quel Grande il cui nome io pronunzio con riverenza, come quello di un Nume propiziatore, nell'istante in cui mi avventuro in un mare terribilmente ricco di scogli pericolosi e di correnti traditrici.

In quella occasione — come vuole la moda — vennero minuziosamente investigate le più ascose latebre della sua vita e della sua mentalità; fra l'altro venne dimostrato che all'Università di Berlino, che lo annoverò fra i propri studenti, egli non seguì alcun regolare corso di studi matematici o filologici, sicchè in entrambi i campi in cui regnò da sovrano, egli apparve ed è un autodidatta.

Questa singolare circostanza valse a rievocare in me il ricordo dell'ingenuo racconto, lasciatoci da Gilberta Pascal, intorno alla scoperta delle prime proposizioni di Euclide, compiuta da suo fratello Biagio,

Digitized by Google

quando, appena adolescente, di geometria non conosceva se non un'imperfetta definizione, strappata al padre, che mirava avviarlo verso altri campi di studio. Per associazione di idee, si riaffacciarono alla mia mente i nomi di coloro che validamente contribuirono al progresso della nostra scienza, senz'avere seguito quel regolare piano di studi, oggi reputato necessario alla formazione d'un matematico di professione: dal mercante Leonardo Fibonacci al magistrato Fermat, dal « maître de requêtes » Vieta al medico Ruffini, dal commesso-viaggiatore Bessel all'avvocato Genocchi. E tutto ciò m'induceva a domandarmi, con un senso d'invincibile tristezza, se i reiterati sforzi, che da secoli si vanno facendo ovunque e che non accennano a cessare, per dare ai nostri sistemi di istruzione contenuto e forma, essere e fattezze sempre migliori, non costituiscano per avventura uno sperpero di forze inutile epperò deplorevole e se non sia giunto il momento di dare, con un energico colpo di timone, un nuovo orientamento all'attività dei pedagogisti.

Ma, mentre una metà del mio *io* si abbandonava a tali melanconiche considerazioni, l'altra reagiva, obbiettando che Ermanno Grassmann e Biagio Pascal erano creature eccezionali, non foss'altro perchè erano figli di geometri di valore (1); incalzando, quella seconda metà del mio *io* osservava che, al modo istesso che i terreni ricchi di naturale fertilità non sono abbastanza estesi per indurre a lasciare incolti quelli capaci di fruttificare soltanto in seguito a raffinata coltura, così i fenomeni di autodidattismo non sono abbastanza frequenti per giustificare l'abbandono alla loro sorte di coloro che, ben guidati, possono riuscire a farsi apportatori di qualche pietra atta a consolidare od innalzare il nostro edificio scientifico. Ed in realtà, non fu forse il celebre sistema didattico del Pestalozzi quello che fece sbocciare e meravigliosamente fiorire il genio latente nel povero pastorello bernese, famoso nella storia della geometria sotto il nome di Jacopo Steiner? E non è forse l'istruzione sempre più diffusa la causa prima di quel brusio lento, indistinto, incessante in cui si fonde, a chi l'ascolta da lungi, l'immensa opera dell'uomo, quell'opera che prepara i grandi avvenimenti storici e determina ad intervalli la comparsa di geni rappresentativi, di eroi dello spirito umano? Come, dunque, stupirsi se, malgrado certe rare piante sporadiche, presso tutti i popoli civili ed in tutte le epoche, le questioni relative al pubblico insegnamento destarono il più intenso interesse nelle classi dirigenti? Perchè dunque, ci si dovrebbe meravigliare constatando che popoli e governi convennero sempre, e sempre si accordano, nel ritenere

(1) Il primo, anzi, fa parte di una dinastia di matematici, simile a quella dei BERNOULLI, dei RICCATI, dei NEUMANN, dei CASSINI e degli STRUVE.

Digitized by Google

che il denaro speso nell'educare ed istruire sia un capitale impiegato ad alto interesse?

D'altronde, non è certo a voi, Signori, che quotidianamente spente il fior fiore delle vostre forze a spianare la via che guida alla conoscenza della verità, che fa mestieri dimostrare quale immensa energia sia rinchiusa nel ministero che voi esercitate. Piuttosto, ciò che va esplicitamente rilevato si è che la necessità da parte dello stato di disciplinarla ed accrescerla fu riconosciuta, non solo presso le nazioni ove tacevano le lotte politiche, ma anche in seno a quelle ove l'aspirazione all'indipendenza tutti spronava e tutti infiammava; e per dimostrarlo io vorrei presentarvi un parallelo fra gli avvenimenti politici della patria nostra e le vicende della pubblica istruzione nel millennio che corre fra il famoso editto dell'imperatore carolingio Lotario il Buono e la promulgazione dell'altrettanto famosa Legge Casati, che tuttora ci governa. Ma poichè a tanto non bastano il tempo e le forze di cui dispongo, mi è giocoforza limitarmi ad alcune notizie frammentarie ed a poche osservazioni e proposte, che mi auguro siano da voi giudicate con una benevolenza non dissimile da quella, così lusinghiera, a me dimostrata dal nostro Consiglio Direttivo, quando volle fossi io il primo a prendere la parola in questo nostro autunnale convegno.

2. — Vi fu un tempo — che molti fra noi ricordano ancora — in cui, in Italia, gli sguardi di tutti erano volti verso l'*istruzione primaria*. Ma stabilito, almeno teoricamente, il principio dell'insegnamento elementare obbligatorio, la nazione lasciò al proprio governo la cura di organizzare e dirigere la lotta contro l'analfabetismo persistente e si occupò di altro.

Più tardi essa si propose il bel problema di dare alla *istruzione superiore* un'organizzazione meglio rispondente allo spirito dei tempi, di quella che le avessero date le leggi del 1859 e del 1862. Ma l'impossibilità di fissare principi generali universalmente accettabili la costrinse a rimetterne la soluzione ad un avvenire forse molto lontano. Da un ventennio la questione venne lasciata in disparte, non già perchè non si trovi chi, di quando in quando, ne proclami ad alta voce l'importanza; ma forse perchè i meravigliosi progressi che andò compiendo l'Italia nella scienza e nell'industria, appunto per opera di giovani usciti dalle nostre scuole superiori, giustificarono coloro che negavano l'urgenza di deliberare e si facevano apostoli della mite e comoda Dea Procrastinazione.

E non faticarono a raccogliere intorno a sè un esercito di proseliti, anche perchè, per generale consenso, ad un'altra questione era indispensabile consacrarsi *toto corde*, se si voleva che il nome Italia fosse, non soltanto la sintesi di una grande storia morta, ma il simbolo risplendente di un grande popolo vivo; la questione, cioè, di riordinare l'*istruzione*

Digitized by Google

secondaria, questione della massima gravità pei molteplici interessi che ad essa collegansi, della massima complessità pei molti ordini di scuola a cui si riferisce, della massima urgenza perchè è evidente farsi ognor più stridente ed intollerabile il contrasto tra il pulsare sempre più rapido e vivo della vita moderna ed il lento e fiacco procedere di metodi didattici, le cui origini risalgono ad epoca ormai remota.

In Italia — è cosa nota a tutti — ci troviamo, riguardo all'insegnamento medio, nella condizione stabilita, per l'appunto mezzo secolo fa, dalla Legge Casati. Che l'ordinamento da essa fissato non fosse capace di soddisfare, neppure in via provvisoria, è dimostrato dal fatto che forse nessuno dei trentacinque o trentasei ministri, che in questi ultimi cinquant'anni governarono alla Minerva, si ritenne esonerato dal farvi dei ritocchi più o meno profondi. Che fosse estremamente malagevole il determinare la direzione da imprimersi alle progettate riforme, è dimostrato da moltissimi fatti, ma in special modo da due, che vi chiedo licenza di segnalarvi (1).

Michele Coppino fu quattro volte ministro della Pubblica Istruzione, ed ogni qualvolta fu detentore del potere propose od attuò riforme di varia natura nell'organizzazione delle nostre scuole medie. L'ultimo, in ordine di tempo, de' suoi progetti fu presentato al Senato nel 1887 ed alla Camera dei deputati nel Febbraio successivo. Della Commissione, a cui la Camera deferì l'esame di quel disegno di legge, fu presidente Domenico Berti, relatore ed anima Ferdinando Martini; gli studi da essa compiuti furono talmente seri, profondi e fruttiferi che diedero per risultato un contro-progetto del tutto nuovo, che però la Camera elettiva non potè esaminare e discutere a cagione della sopravvenuta crisi ministeriale. Ma è tipico il fatto che il Martini, divenuto allora ministro, presentò al Parlamento un piano di studi secondari ben diverso da quello che aveva suggerito dal suo banco di deputato. Infatti, mentre per Martini deputato alla scuola elementare doveva tener dietro un corso quadriennale *con* l'insegnamento del latino, per Martini ministro questo doveva essere triennale e *senza* il latino; e, mentre per il primo il Liceo non doveva presentare alcuna diramazione, per il secondo doveva comprendere ben quattro sezioni, ciascuna preparatoria ad una delle Facoltà universitarie.

Neppure tale disegno di legge trovò amica la sorte, sicchè tutto continuò su per giù all'istesso modo, con mediocre soddisfazione generale, finchè il 19 Novembre 1905 un oculato ministro affidò ad un gruppo di persone competenti lo studio dell'intricato e vasto problema del-

(1) Cfr. G. CHIARINI, *La scuola classica in Italia dal 1860 ai giorni nostri* (Nuova Antologia, 15 luglio 1894).

Digitized by Google

la riforma della scuola media. Così ebbe vita quella famosa Commissione Reale, di cui, con mal celata impazienza, tutti aspettano l'autorevole responso. Malgrado il segreto di cui essa volle circondarsi, qualche cosa intorno alle sue decisioni è pur trapelato, e dalle indiscrezioni, che la stampa si è industriata di provocare e si è poi affrettata di raccogliere, sembra emergere che gli egregi commissari siansi accordati nel proporre, come proseguimento del corso elementare, una scuola triennale unica *senza* il latino.

Molti al leggere tale notizia, con l'indifferenza un po' scettica che è prerogativa italiana, si saranno probabilmente stretti nelle spalle, tutt'al più osservando che stava per accrescersi di un elemento la collezione dei ritrovati moderni caratterizzati dalla mancanza di qualche cosa; come si avevano polvere senza fumo e romanzi senza intreccio, telegrafi senza fili e musica senza motivi, si sarebbe avuto anche l'insegnamento secondario *senza* una base classica.

Ma chi nelle questioni d'istruzione sa scorgere la fondamentale importanza che in realtà posseggono sarà stato colpito da un altro fatto (il secondo di quelli a cui appunto facevo allusione dianzi); e cioè che, mentre la Commissione Reale sta per dare forma ufficiale a quella sua conclusione, nell'universalità degli insegnanti va sempre più diffondendosi e radicandosi l'idea di scindere tutta la scuola media, dal principio alla fine, in due tipi, non aventi alcun anno di corso in comune, l'una con l'insegnamento del latino, l'altra esente. Sicchè, dunque, o sotto l'irresistibile pressione dell'opinione pubblica la Commissione reale dovrà finire per orientare verso altri lidi le sue proposte, o queste sono fatalmente destinate a frangersi contro un'opposizione formidabile, che non mancherà di fare echeggiare la propria voce anche in seno al Parlamento nazionale.

3. — Tale incertezza e varietà di opinioni, anche in persone di alta ed indiscussa competenza in controversie didattiche, spiegano, almeno in parte, come nessun governo in Italia sia riuscito a trasformare in legge dello stato un piano generale di riforma delle nostre scuole secondarie. E ciò fu la causa precipua dei gravissimi mali che le travagliano. Perchè i ministri, trovando sbarrata la via maestra della pubblica discussione, sospinti dall'ambizione nobilissima che il loro passaggio per la Minerva non fosse

Qual fumo in aere ed in acqua la schiuma,

presero a percorrere gli angusti e perigliosi viottoli dei Decreti ministeriali. E, sotto l'assillo di legare il proprio nome a qualche innovazione, imposero, spesso in fretta e furia, persino ad anno già cominciato, mo-

Digitized by Google

dificazioni, in generale di apparenza modesta, ma sovente sovvertitrici, non di rado dannose all'insegnamento e sempre deleterie per il principio di autorità, giacchè resero popolare fra gli studenti l'opinione che le leggi ed i regolamenti non siano qualche cosa d'immutabile ed eterno, ma possono essere cambiati dall'oggi al domani, per effetto di pressioni, non sempre ispirate al culto disinteressato del pubblico bene.

Tutti voi, egregi e cari Commilitoni, sapete benissimo che io non carico le tinte per rendere meno arida questa accorante esposizione di fatti; chè non v'è alcuno in cui non sia presente il ricordo di riforme perpetrate per semplice decreto, quali, ad esempio, l'abolizione della prova scritta di matematica nelle scuole classiche e la concessione, agli studenti delle stesse scuole, del diritto di opzione fra il greco e la matematica.

E poichè siffatti mutamenti, giunti sempre a metà dell'anno, producono una perturbazione profonda e sovente insanabile nella carriera scolastica dei giovani migliori, così io vorrei che *Mathesis,* alleandosi alle associazioni sorelle, si facesse iniziatrice di un movimento inteso ad ottenere che il Parlamento stabilisca come canone fondamentale della pubblica istruzione che *uno studente entrato in una scuola sotto l'impero di certe norme didattiche, sotto l'egida delle stesse debba percorrerla per intero* (1); meglio assai per un giovane il procedere sotto la guida di norme non perfette che il subire, nel corso dei propri studi, deviazioni profonde, aventi per immancabile effetto, inutili ripetizioni e deplorevoli lacune nella sua cultura.

4. — L'organizzazione data all'insegnamento classico dalla legge Casati è nelle sue linee generali conforme a quello che esso ebbe in Italia sino all'epoca della rivoluzione francese e che si ritrova nel corso del sec. XIX in Francia, in Germania ed in Inghilterra; onde, nel tracciarne il piano, il legislatore italiano poteva in parte uniformarsi alle tradizioni paesane ed in parte avvantaggiarsi delle molteplici esperienze fatte al di là delle Alpi.

Invece, di fronte al problema di porre i capisaldi dell'istruzione tecnico-professionale, egli si trovò in condizioni diametralmente opposte. E' vero che da noi, come altrove, abolita la Compagnia di Gesù (che fino al termine del secolo XVIII aveva accentrato in sè stessa tutta la pubblica istruzione, improntandola al più puro classicismo), qua e là furono fatti tentativi per colmare l'abisso separante la scuola dalla realtà, per diminuire l'enorme diversità esistente tra la vita intellettuale dell'alunno e la vita sociale dell'uomo. E' pur vero che, in Francia, la caduta dell'an-

(1) Un provvedimento dello stesso genere fu già adottato nell'istruzione superiore.

Digitized by Google

tico regime venne a moltiplicare ed intensificare tali sforzi e che, tanto nell'antico Piemonte, quanto nelle provincie soggette all'Austria, sorsero e prosperarono scuole così dette *reali*. Ma tutto questo non offriva una collezione di modelli abbastanza ricca e varia per essere realmente utile ed istruttiva; per ciò le difficoltà che si incontrarono nel dare un governo regolare, stabile, generale all'insegnamento secondario non classico erano tali e tante che bisogna essere indulgenti verso chi non è riuscito a tutte superarle.

Tuttavia l'indulgenza non deve trasformarsi in cecità. E non si può fare a meno di osservare come un grave difetto vizii tutta la compagine dell'istruzione tecnica ed è il non tendere essa ad un fine unico schiettamente determinato, o, se meglio piace, il proporsi essa parecchi intenti sostanzialmente diversi. Ciò spiega come e perchè i relativi istituti siano successivamente passati dalla dipendenza del Ministero dell'Istruzione a quella del Ministero di Agricoltura, per poi ritornare sotto la protezione di Minerva, la quale, a quanto si va sussurrando, li trattò di regola da matrigna, riserbando agli istituti classici le cure affettuose di una tenera madre.

Dato pure, e non concesso, che ciò sia realmente accaduto, non è questa la causa precipua dei limitati risultamenti che diede l'istruzione tecnica, i quali devono ascriversi in massima parte all'inconsulta mania di far convergere una medesima scuola a scopi differenti. La nostra Scuola tecnica è una vera e propria *bonne à tout faire* ed il nostro Istituto tecnico richiama alla mente l'*en-tout-cas* delle nostre nonne, quell'ombrello d'incomoda ampiezza pel modesto ufficio di riparare dal sole e di dimensioni troppo minuscole per servire come schermo alla pioggia. Ed invero la Scuola tecnica deve accogliere nel proprio seno i giovinetti che non dispongono dei mezzi intellettuali ed economici necessari ad un lungo corso di studi, al pari di coloro che agognano raggiungere le più eccelse vette del pubblico insegnamento; mentre, dal canto suo, l'Istituto tecnico deve tanto preparare alle « professioni minori » di ragioniere, agrimensore e simili, quanto porre in grado lo studente di gareggiare con i giovani educati in una scuola classica; ora nemmeno uno, a cui natura avesse largito il genio meccanico di Leonardo da Vinci, saprebbe concepire ordigni di così raffinata complicazione da prestare così svariati servigi.

Tale difetto dell'intima struttura degli istituti non classici venne già da tempo avvertito ed è ormai universale la convinzione che l'unico mezzo per correggerlo stia nel ricorrere al rimedio eroico di un'operazione chirurgica, che stacchi dalle altre la sezione fisico-matematica per farne, dopo una conveniente ampliazione, una completa *scuola moderna*, in continuazione della scuola elementare. Fatto ciò, nelle altre sezioni

Digitized by Google

dell'Istituto tecnico le materie professionali dovrebbero e potrebbero ricevere maggiore sviluppo, mentre quelle di coltura generale si troverebbero in condizioni di assumere un'impronta meglio conforme al genere di vita a cui i loro allievi sono destinati; la Scuola tecnica poi cesserebbe dall'esercitare la funzione, a cui non è adatta, di lontana preparatrice ad una laurea scientifica.

Detto così con libera parola perchè l'istruzione tecnica non abbia corrisposto alle speranze nutrite dagli architetti di essa, siami lecito di soggiungere con pari schiettezza (ed in questo momento credo non mi annebbii l'intelletto l'affetto di non immemore figlio) come, nell'additarne le deficenze, alcuni ciechi adoratori di Omero e Virgilio, abbiano oltrepassato i limiti che separano il vero dal falso. E per dimostrare che i risultati di essa non furono così sconfortanti come alcuni pretendono, basterebbe redigere una statistica degli antichi alunni d'istituto tecnico che furono giudicati degni di occupare un posto nel pubblico insegnamento. Ma, per non tediarvi, Signori, con un'arida enumerazione di persone, mi limito a citare i nomi illustri e cari dei professori Veronese e Volterra; e li scelgo, non soltanto perchè essi bastano da soli alla fama di una scuola, ma anche con l'intenzione di rettifica, perchè in un'occasione recente con grande stupore mi accadde di udirli additati, da un valentuomo in cui il fervido amore pei classici non era pari all'esattezza delle informazioni, appunto come testimoni viventi della mirabile efficacia del Greco e del Latino nel preparare alla ricerca scientifica.

5. — Se avessi la malinconica idea di fare una completa diagnosi dei mali che affliggono la parte mediana dell'ente « scuola italiana », dovrei occuparmi, e non di sfuggita, anche delle Scuole Normali; di quelle scuole che, malgrado gli svariati e nobilissimi uffici che devono disimpegnare, furono sempre o così trascurate o così maltrattate dai governanti che, se lo scherzo fosse ammissibile in argomento sì grave, sarebbe il caso di denominarle *Scuole anormali*. Ma poichè è superfluo che io mi dilunghi ad esporre malamente cose a voi ben note, mi limito ad osservare che la più recente legge sopra l'ordinamento delle scuole elementari fa obbligo al Governo di provvedere al riordinamento delle Scuole Normali *entro un anno* dalla promulgazione di essa (1); ciò non ostante cinque anni sono trascorsi e la situazione è immutata. Ora siccome è ufficio delle associazioni del tipo della nostra il richiamare i governi al mantenimento dei loro precisi impegni e di agevolarne il non facile compito con studi profondi e proposte pratiche, così io mi auguro che dall'attuale nostro convegno tragga origine un moto inteso ad ottenere che lo stato si occupi

(1) Art. 8 della Legge 8 luglio 1904.

Digitized by Google

alacremente della preparazione dei maestri di scuola, di quei funzionari umili e modesti, ma valorosi e rispettabili, a cui è affidato il grande compito di plasmare le piccole anime, di perfezionare la macchina umana, di far sì che le generazioni venture raggiungano un livello morale, civile, intellettuale superiore a quello a cui è arrivata la nostra.

6. — Ma è tempo che smettiamo di occuparci della patria nostra per spingere lo sguardo al di là delle Alpi, onde vedere se, anche altrove, sia stato avvertito un malessere analogo a quello che turba le nostre scuole medie e se si sia riusciti a sottrarsi al giogo di consuetudini non più conformi allo spirito dei tempi nostri.

La prima fra le nazioni civili a segnalare la necessità di una *instauratio ab imis fundamentis*, fu la Francia, la quale, per bocca di un suo ministro (1), osservava che: « A partire dall'epoca in cui vennero organizzati gli studi classici, cioè a partire dal secolo XVII, il mondo ha percorso molto cammino. Avvennero fatti importantissimi, che trasformarono la società e ne sconvolsero le condizioni di esistenza. L'industria, il commercio e l'agricoltura divennero i più possenti fattori della prosperità nazionale. Se non che tali forze, per produrre un effetto utile, esigono non soltanto braccia vigorose ed armamentari perfezionati, ma eziandio intelligenze illuminate, capaci di dirigere le une e porre in azione gli altri. Meno d'un secolo fa l'insegnamento non era destinato che a pochi eletti; ora invece si dirige alla nazione intera. Oggi il problema che deve risolvere l'insegnamento è duplice. Nell'interesse delle collettività dei lavoratori, nell'interesse dello stesso proletariato, noi dobbiamo preparare una classe scelta, illuminata, liberale, un'aristocrazia dell'intelligenza che, elevandosi al disopra del realismo utilitario, si consacri alle ricerche disinteressate, alle alte speculazioni e divenga tutrice degli interessi permanenti e superiori del paese. D'altra parte noi dobbiamo costituire fortemente l'esercito dei lavoratori, col fornirlo di stato maggiore e di quadri » (2).

Il problema così enunciato non è evidentemente prerogativa della nostra simpatica vicina di Ponente; ma ad essa, Signori, spetta la gloria di averne per prima ideata una soddisfacente soluzione. La Francia che, quando tutta Europa gemeva sotto il giogo ferreo di Euclide, vide Pietro Ramo sventolare il vessillo della rivolta contro la pesante autocrazia del sommo alessandrino; che, mentre compiva l'immane sforzo di abbattere un regime politico consacrato da secoli, poneva le basi della più

(1) Il LEYGUES.

(2) Plans d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons (Paris, 1903).

Digitized by Google

celebre scuola del mondo, di quella Scuola politecnica di cui è ancora sempre titolo di onore l'essere stato alunno; che, in quella stessa epoca, richiamava in vita la geometria, immersa in sonno profondo; che poco dopo creava la fisica matematica e additava all' analisi la via che doveva guidarla a glorioso porto; la Francia, sempre antesignana di ogni radicale progresso, sempre pronta alle imprese più audaci, sin dal 28 aprile 1887, in una memorabile seduta della Camera dei deputati, affidava ad una Commissione composta di personalità eminenti il duplice ufficio di raccogliere e coordinare le opinioni dei competenti intorno al presente ed all'avvenire della scuola media e di formulare in conseguenza un completo nuovo piano per gli studi secondari.

Quanto intenso sia stato l'interesse mostrato per la questione da tutti gli ordini di cittadini francesi è chiaramente provato dai processi verbali delle sedute che tenne quella Commissione. Quanto questa abbia corrisposto alle aspettative di coloro che ne avevano promosso la creazione è attestato dal fatto che le conclusioni a cui essa addivenne furono approvate dalla Camera dei deputati il 4 febbraio 1902 ed il 31 marzo seguente furono tradotte in una legge fondamentale dello Stato.

Fra le disposizioni ivi contenute giova notare anzitutto la creazione di corsi popolari biennali destinati a quei giovani che, compiute le scuole elementari, intendono di acquistare i rudimenti di qualche lingua moderna e di quei rami di scienza che si prestano a più frequenti applicazioni pratiche.

A coloro invece che aspirano al titolo di baccelliere, lo stato francese offre un corso settennale di studi, ripartito in due cicli. Il primo triennale è diviso in due sezioni: una con il Latino ed il Greco, l'altro con gli insegnamenti delle Scienze e del Disegno, entrambi organizzati per modo che l'alunno, al termine di ciascuno, si trovi in possesso di un gruppo di cognizioni costituenti un tutto. Quadriennale è invece il secondo ciclo e diviso in quattro sezioni, che è costume caratterizzare così:

A. Latino e Greco
B. Latino e Lingue moderne
C. Latino e Scienze
D. Scienze e Lingue moderne

Compiuto il secondo ciclo di studi, all'alunno vincitore in tutte le prove viene consegnato un diploma, il quale può rivestire quattro differenti aspetti, ma che gli conferisce sempre gli stessi diritti, schiudendogli le porte delle medesime scuole superiori (1).

(1) E' questa una disposizione che alcuni giudicheranno eccessivamente liberale, ma che è di importanza altissima, giacchè prova la fiducia nutrita dal legislatore che

Digitized by Google

Scendendo a qualche particolare più minuto relativo alla scienza di nostra pertinenza, noteremo in primo luogo che la sezione *D* del secondo ciclo (Scienze e Lingue moderne) ha il precipuo ufficio di fungere come vestibolo delle grandi scuole di scienza pura od applicata (Scuola normale superiore, Scuola politecnica, Scuola centrale delle arti e manifatture, ecc.) ed ha un programma di matematica molto simile a quello del primo biennio delle nostre Università, Osserviamo poi che in tutte le sezioni del secondo ciclo un posto preponderante è accordato al concetto di funzione e alla relativa rappresentazione grafica, al disegno geometrico ed alle applicazioni pratiche; nè mancano le nozioni fondamentali di geometria descrittiva, di calcolo vettoriale e dell'algoritmo differenziale.

Benchè ai professori francesi venga accordata la più ampia libertà nella scelta dei metodi e nell'ordinamento delle materie, pure dalle istruzioni annesse ai programmi ufficiali (alla cui compilazione non fu estraneo un geometra del valore del Darboux) è agevole desumere entro quali limiti ed in quale indirizzo il legislatore intendeva dovesse mantenersi l'insegnamento. Così, in un punto di quelle istruzioni, è detto non esservi interesse alcuno nell'esigere dai ragazzi l'uso esclusivo di procedimenti aritmetici, quando l'algebra conduce allo stesso scopo per una via più semplice e diretta; ora, non si legge qui fra le linee il tacito consiglio di sostituire qualche nozione sopra le equazioni di primo grado a quel gruppo di vecchi procedimenti aritmetici complicati, avente per nocciolo la regola del tre? ... Altrove il legislatore francese dichiara non esservi alcuna utilità nel dimostrare l'eguaglianza degli angoli retti o degli angoli corrispondenti o l'esistenza dell'intersezione d'una circonferenza con una retta di cui un punto è interno a quella, perchè l'alunno, non giungendo ad afferrare la necessità della dimostrazione, si limita ad imprimere nella propria mente le parole del maestro e ripeterle materialmente, giudicandole però prive di senso. In un certo passo troviamo il consiglio di fare largo uso dell'idea di movimento; in altro vedesi affermata l'importanza del disegno come ausiliare nello studio della geometria; ed in altro ancora si osserva come, oltrepassato lo stadio più elementare dell'insegnamento della geometria, giovi riunire prima tutto ciò che è descrittivo e poi tutto ciò che è metrico e, in particolare — in omaggio alle idee di cui in Francia fu apostolo il Méray — di fondere, nei limiti del possibile, la Geometria del piano con la Geometria dello spazio.

---

ogni studente sappia scegliere proprio quel tipo di studi secondari atto a procurargli la somma di cognizioni sufficienti a costituire una solida base per le sue occupazioni scolastiche superiori.

Digitized by Google

7. — La brevità dell'ora e la discrezione non mi consentono di dilungarmi in più minuti particolari. D'altronde, l'avere scienziati del valore d'un Hadamard, d'un Borel, d'un Giulio Tannery mostrato, con ottimi trattati scolastici, in qual modo sia da tradursi in atto il nuovo piano di studi, abilita chiunque a formarsi, anche senza il mio aiuto, un'idea chiara e completa del valore didattico di esso.

Giova, invece, osservare come la trasfigurazione subìta dalla scuola media francese abbia prodotto un'impressione profonda in Germania, ove da molti fu giudicata genialissima e meritevole di essere presa a modello dopo di avervi arrecati quei ritocchi suggeriti od imposti dalla diversità d'indole dei popoli francese e tedesco e dalle lievi disparità negli scopi da conseguire.

Tale attitudine dell'antica rivale della Francia non stupirà chi ha presente come, sin dal 1891, la Società dei medici e naturalisti, caldamente appoggiata poco dopo dalla Società degli ingegneri tedeschi, avesse affermato l'imprescindibile necessità di accostare alla realtà l'insegnamento secondario delle scienze in genere e della matematica in specie. Tali voti diedero come risultati immediati le radicali modificazioni che, per impulso di Felice Klein, vennero arrecate nell'organizzazione didattica dell'Università di Gottinga e la istituzione nella stessa di corsi feriali tenuti da docenti universitari e destinati ad imprimere una nuova orientazione nella mentalità e nella coltura dei professori secondari. Ben presto però risultò evidente come, per attuare l'invocato rinnovamento, fosse indispensabile arricchire la base della matematica elementare classica di altri concetti che per consuetudine solevano venire annoverati fra gli ingredienti caratteristici delle matematiche superiori: gli è quanto il Klein ebbe a dire, con la cristallina lucidità che lo distingue, nel corso di quella celebre conferenza scolastica, tenuta a Berlino nel Giugno del 1900 per iniziativa del Ministero prussiano, la quale ebbe per precipuo effetto il non meno celebre Decreto del 26 Novembre di quell'anno, col quale il Re di Prussia ed Imperatore di Germania conferì lo stesso grado ed i medesimi diritti al Ginnasio, al Ginnasio reale ed alla Scuola reale superiore, i tre tipi di scuole secondarie tedesche.

Le parole del Klein ebbero un'eco in tutta la Germania ed accesero discussioni vivissime; alle quali diedero nuovo impulso le conferenze da lui tenute a Gottinga nei giorni di Pasqua del 1904, in cui quel grande Maestro, incoraggiato dallo spettacolo di quanto erasi attuato al di là del Reno, si propose di dimostrare come la introduzione nell'insegnamento secondario del concetto di funzione, illustrato geometricamente mediante il metodo cartesiano e svolto elementarmente ricorrendo ai fondamenti del calcolo infinitesimale, costituisse una riforma imposta dall'in-

Digitized by Google

dole dell'epoca nostra. Da quel momento il Klein non ha cessato di combattere per il trionfo di tali idee, mettendo a profitto tanto l'incontrastata autorità del suo nome, quanto l'irresistibile fascino della sua persona, coadiuvato validamente in tale campagna da una schiera di ammiratori e discepoli e specialmente dalla Commissione d'insegnamento che, durante un quinquennio, funzionò in seno della Società dei medici e naturalisti tedeschi.

Per quanto concerne il concetto di funzione e la relativa rappresentazione grafica, la causa si può oggi considerare per vinta, essendo ormai generale l'opinione che l'una cosa e l'altra non oltrepassino il livello medio dell'intelligenza di un adolescente.

Più gravi ostacoli incontra tuttora l'introduzione nelle scuole medie tedesche dei concetti fondamentali dell'analisi infinitesimale e, se non m'inganno, derivano in massima parte dal fatto che molti attribuiscono gratuitamente al Klein l'idea di trasferire *sic et simpliciter* nell'insegnamento secondario i corsi universitari di calcolo infinitesimale. Ad essi si può replicare con l'osservazione fatta da Cesare Balbo riguardo alla metafisica: « Di che cosa non s'abusa? Ma il peggior degli abusi è fuggir l'uso per tema dell'abuso »; si può farlo perchè quel trasferimento è ben lungi dagli scopi che si prefigge il manipolo di scienziati capitanati dal Klein. Il quale, invece, muove dall'osservazione che nel concetto di *limite* si accentra tutta la forza dell'analisi, la quale col sussidio di esso, trae dal materiale inferiore dell'aritmetica elementi del tutto nuovi. A quel concetto si deve fare appello ogni qual volta si voglia generare qualche cosa di realmente nuovo o paragonare fra di loro due o più cose di qualità differenti. Esso è il potente strumento con cui la matematica, usando il materiale numerico, per sua natura *discreto*, giunge al *continuo*. Ora se in tutta la matematica elementare si potesse evitare quel concetto, verrebbe naturalmente tracciato un confine tra essa e la matematica superiore. Ma invece, in geometria, la rettificazione della circonferenza, la quadratura del circolo e la cubatura della piramide; in algebra, la teoria degli irrazionali, la sommazione delle progressioni geometriche illimitate e la ricerca dei valori massimi e minimi; in meccanica, il dare definizioni precise di velocità e di accelerazione; sono tutte cose che richieggono l'intervento dell'idea di limite. E poichè di regola lo stesso succederà ogni volta si dovrà compiere qualche indagine relativa a mutamenti con continuità, così è ben ragionevole l'aspirazione di collocare la matematica sopra una base così ampia e solida da esonerare dall'uso di considerazioni non rigorose o di quegli artifici a cui, caso per caso, sono costretti a ricorrere i fautori degli antichi procedimenti. Ciò appare tanto più ragionevole quando riflettasi che, secondo gli ultimi portati della critica

Digitized by Google

storica, Archimede stesso avrebbe usato come metodo di scoperta un embrionale calcolo infinitesimale, cioè considerazioni somigliantissime a quelle ben note ai lettori della *Geometria degli indivisibili* di Bonaventura Cavalieri; se egli non se ne servì come metodo di esposizione gli è che esso sarebbe apparso non sufficientemente conclusivo in un'epoca in cui il culto pel rigore logico era generale e vivo quanto lo è fra noi, posteri di Cauchy e di Abel.

8. — Se al Klein non ha finora arriso una completa vittoria (forse perchè la legge d'inerzia impera autocraticamente nel campo morale, come governa la materia ponderabile), egli però ha già ottenuto due risultati, di cui invano si tenterebbe di negare la grande importanza.

Il primo consiste nell'essere stata esuberantemente colmata la lacuna da lui segnalata nella letteratura matematica della sua terra, cioè la mancanza di libri atti a fungere come testi per un insegnamento informato ai nuovi concetti; sicchè, se non fosse la mia riluttanza a fare sfoggio di una facile erudizione, potrei raccomandare parecchie opere eccellenti a coloro che intendono di formarsi un esatto concetto del modo in cui vennero tradotte in atto le idee del pugnace e brillante professore dell'Università di Gottinga (1).

L'altro non meno importante risultato sta nel favore che va acquistando in molti paesi il moto verso un radicale svecchiamento dei classici programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole medie.

E primo fra tutti va citato l'altro dei nostri alleati, l'Austria, che, in parecchie occasioni ed in molti modi, si mostrò favorevole al nuovo ordine di idee; è questo, o Signori, un fatto sul quale credo mio dovere richiamare le vostra attenzione; perchè, mentre *Mathesis* è e deve rimanere un'associazione apolitica, ciascuno de' suoi membri è un italiano avente l'imprescindibile dovere di tenere l'occhio sempre intento a tutto quanto succede al di là dell'Isonzo.

Non dissimile è l'attitudine che vanno assumendo la Svizzera, l'Ungheria e l'Olanda; in conseguenza risulta evidente che dovunque, mentre alcuni timidi si tengono disperatamente aggrappati agli antichi sistemi, quasi fossero àncore di salvezza, molti danno prova di dividere l'opinione di Giulio Tannery, secondo il quale «quelle nozioni e quei

(1) Giudico opportuno però ricordare due opere recenti; cioè *Die Elemente der Geometrie* di H. THIEME (Leipzig, 1909) che — benché lavoro inteso a surrogare il vecchio BALTZER — ha come parte integrante la geometria analitica, ed il *Mathematisches Unterrichtswerk* di SCHWAB-LESSER (Hamburg, 1908-09) ove è svolto il notissimo «Programma di Merano» della Società dei medici e naturalisti tedeschi. Altri lavori congeneri sono noti ai fedeli lettori del *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche.*

Digitized by Google

metodi sono indispensabili a chi voglia capire qualche cosa di questo movimento scientifico che si accelera, alle applicazioni che si moltiplicano e che di giorno in giorno tendono a modificare più profondamente tutto il nostro modo di pensare e di vivere».

E chi potrebbe negare che la comparsa ed il successo di un rivoluzionario quale il Perry sia sintomo certo di una tendenza della vecchia Inghilterra, il paese del più austero conservatorismo, verso una scienza meno compassata e più agile di quella che da secoli insegna il grave ed austero autore degli *Elementi*?

9. — Se si prescinde da un parziale movimento concernente la preparazione dei futuri ingegneri, che suscitò calde discussioni in seno alla nostra Società per il progresso delle scienze, l'Italia si è mostrata sino ad oggi, se non ostile, indifferente di fronte a tutta questa universale agitazione in favore di un'elevazione del livello della istruzione media; sicchè si direbbe che, in quest'occasione, le Alpi siano state ostacoli insormontabili al rinnovarsi presso di noi di quei benefici fenomeni di esosmosi ed endosmosi nel regno del pensiero, che vedemmo accadere attraverso il Reno, attraverso la Manica, attraverso il Danubio, anche fra popoli divisi da storiche ostilità. Eppure manifestazioni di ciò che direi «democratizzazione delle teorie», per essere sempre e dovunque accadute, si dovrebbero ritenere fatali e potrebbero a ragione interpretarsi come prove della incessante evoluzione del genere umano (1). D'altronde, l'azione elevatrice delle ultime conquiste della scienza sopra il modo di considerarne e trattare l'insegnamento delle parti più umili può ben riguardarsi come una delle mille prove dell'influenza retrograda esercitata dalle scoperte veramente decisive, di cui sarebbe agevole citare esempi impressionanti in tutti i campi in cui si svolge l'umana attività (2).

Dall'attitudine, che sarei tentato di dire «cinese», assunta dall'Italia in tale circostanza, qualcuno potrà forse scoprire la più profonda radice nell'antipatia, inconfessata e latente, che i nostri padri ci tramandarono in eredità, per gli stranieri, nostri antichi oppressori. O forse in una rea-

---

(1) Così (per non abbandonare gli oggetti delle nostre quotidiane occupazioni) gli *Elementi* di EUCLIDE che, nell'epoca newtoniana, erano il tema consueto di corsi universitari, scesero rapidamente dalla cima alla base della nostra istruzione matematica; così il terrorizzante *calcolo sublime* dell'epoca bordoniana trovasi oggi piuttosto al primo cha all'ultimo piano del nostro edificio analitico; e quello che a MICHELE CHASLES appariva comé *geometria superiore* doveva divenire, in breve volger d'anni, elemento indispensabile della coltura di qualsiasi ingegnere.

(2) Giova forse chiarire questa trasformazione con un esempio: la trasformazione della vecchia diligenza nella tramvia a cavalli fu senza dubbio una retroconseguenza delle rotaie necessarie alla trazione a vapore.

Digitized by Google

zione (esagerata come tutte le reazioni) contro quella supina sistematica ammirazione per ogni cosa ci arrivasse con marchio di fabbrica forestiera, che Giosuè Carducci rimproverò aspramente all'Italia coi ben noti versi:

Al cappellino, o all'elmo in ginocchione
Sempre: ma lesta e scaltra
Scoto la polve di un'adorazione
Per cominciarne un'altra.

In un caso o nell'altro ci si trova in presenza di un sentimento a cui, non solo la ragione ma anche l'antica maestra della vita, ci consiglia di resistere. Sfogliando, infatti, il gran libro della storia si apprende che la fondazione delle Scuole politecniche, causa prima dell'attuale egemonia della Germania nel campo industriale, fu ispirata dall'esempio della Francia, le cui armate vittoriose in campi tedeschi erano capitanate appunto da antichi alunni della grande scuola fondata da Monge. D'altronde, è tuttora vivo il ricordo di un viaggio d'istruzione fatto nel 1830 da Victor Cousin, per incarico del Governo francese, onde rendersi esatto conto dell'organizzazione e del funzionamento delle scuole tedesche, che sin da quell'epoca erano salite in altissima fama. Finalmente è noto che nel 1884 il Governo del Regno Unito, a ragione allarmato dalla decadenza che notavasi nelle industrie inglesi, corse ai ripari, affidando ad apposita commissione la determinazione delle cause del deplorevole fatto; ed avendola essa riscontrata nell'inferiorità dell'istruzione tecnica in Inghilterra in paragone a ciò che era avvenuto altrove, nel 1889 il Parlamento ne decise una radicale riforma, ispirata ai concetti adottati sul continente: così ebbe vita quel « Technical education act » che va famoso nella storia parlamentare inglese, come rappresentante il primo intervento del Governo britannico in questioni relative al pubblico insegnamento.

Ora se non si mostrarono sorde alle voci ammonitrici provenienti dall'estero nazioni che sentono altamente di sè, come la Francia, di cui è proverbiale la boria nazionale; come la Germania, che suole imprimere nelle tenere menti de' suoi figli la massima, suonante come uno squillo di battaglia, *Deutschland über Alles*; come l'Inghilterra, che fa echeggiare in tutti i continenti e sopra tutti i mari il superbo inno di vittoria *Rule Britannia*; dovremo noi spontaneamente condannarci ad uno sterile isolamento, apparendo agli occhi del mondo come compresi dal gretto sentimento di un misero orgoglio di un tempo che fu, invece che dalla feconda aspirazione di mostrare la terza Italia degna continuatrice delle tradizioni lasciate dalle nostre gloriose università medievali?

Che se, finalmente, la cagione recondita del contegno assunto dall'Italia di fronte alla grave questione che ci occupa fosse da ricercarsi

Digitized by Google

nel timore che il nuovo ordinamento didattico portasse al collocamento in onorato riposo di teorie d'indiscutibile valore scientifico, storico ed anche estetico, ma che manifestano indubbi segni di decrepitezza; di teorie che molti giudicano elementi indispensabili di qualunque istruzione matematica sol perchè le studiarono essi da fanciulli e, prima di loro, i loro padri ed i loro nonni, si sarebbe di fronte ad un sentimento, certo elevato, ma da cui occorre non lasciarci dominare, se non si vuole trasformare la venerazione dovuta ai nostri maggiori in una deplorevole e perniciosa necrofilia. Eleviamo ai nostri cari defunti monumenti che provino il culto che tributiamo alla loro memoria e l'ammirazione che ci scalda per l'opera loro; ma non lasciamo che i morti seppelliscano i vivi!

Non v'ha dubbio che il tradurre le nuove aspirazioni in un piano di studi formativo per l'intelligenza ed improntato al più puro ed elevato utilitarismo sia impresa irta di difficoltà, che sarebbe stoltezza negare o nascondere. Esse, però, non sono tali da indurre senz'altro a rinunziare alla speranza di superarle, specialmente in un paese, come il nostro, in cui abili insegnanti riuscirono a fare apprendere a centinaia di studenti le fini ma artifiziose argomentazioni di cui è intessuto il 5° Libro di Euclide; in un paese che, fedele agli ammaestramenti dati da Luigi Cremona, seppe sempre volgere i progressi della scienza a beneficio della scuola; in un paese che, anche in questi ultimi anni, ha prodotto parecchi trattati di geometria di alto pregio, che gli stranieri c'invidiano e si sforzano di imitare.

Anzi, così profonda e salda è la mia fede nell'energia e nel valore degli insegnanti italiani, che sono convinto che se *Mathesis*, per prendere parte attiva al movimento di cui descrissi le varie fasi ed i vari aspetti, volesse accogliere la proposta che faccio di bandire un concorso sopra *i concetti di limite e d'infinito nelle matematiche elementari*, molte belle pagine verrebbero aggiunte alla nostra biblioteca scolastica e sarebbe una nuova volta luminosamente dimostrato come l'Italia sia oggi qualche cosa di assai più e meglio della classica terra dei suoni e dei canti.

10. — Da quanto ebbi l'onore di esporre una conseguenza sembra scaturire per ineluttabile necessità logica.

Se, come ebbe a dire uno dei nostri migliori pedagogisti — Aristide Gabelli — «avvertire un periodo di trasformazione quando appare e adattarvisi onestamente e ragionevolmente è forse il massimo avvicinamento alla perfezione, di cui son capaci uomini e nazioni»; e se soltanto chi è cieco per non voler vedere può negare che noi oggi, per quanto concerne l'insegnamento medio della matematica, attraversiamo appunto una fase critica di tale specie; a noi, dalla sorte chiamati ad amministrare e trasmettere alle generazioni future il patrimonio scientifico relitto dai nostri mag-

Digitized by Google

giori, incombe lo stretto dovere di adoperarci a che l'Italia faccia udire potentemente e nobilmente la propria voce nei dibattiti che avvengono attualmente da un capo all'altro del mondo. Accendere l'interesse pei temi in discussione e provocare e dirigere gli studi relativi, ecco un còmpito al quale l'Associazione nostra non si può sottrarre, a meno che non voglia condannarsi ad un inglorioso suicidio. Tale, per fermo, non è l'idea che ci ha spinti ad accorrere qui da ogni parte d'Italia.

Poniamoci, dunque, al lavoro con fede e concordia, senza nutrire scettici pregiudizi od ingiustificati entusiasmi, senza lasciarci traviare da fallaci illusioni o da un sistematico misoneismo, alieni dal volere ad ogni costo fare « tabula rasa » del passato e non paralizzati dalla prospettiva di divenir complici o pupilli di sognatori ultramontani.

E nella fondata speranza che i nostri studi riescano vantaggiosi alla scuola ed al progresso e valgano ad accrescere l'alta rinomanza che l'Italia matematica gode presso le altre nazioni civili, ispiriamo l'opera nostra al fatidico motto che il primo Napoleone volle scritto sul labaro della Scuola politecnica: *per la patria, per la scienza, per la gloria.*

Digitized by Google

Digitized by Google

ARTICOLI STORICI

Digitized by Google

Digitized by Google

VII

CONTRIBUTI DATI DAI VARI POPOLI ALLO SVILUPPO DELLE MATEMATICHE

Dalla Rivista *Scientia*, T. XXI, 1921

PARTE I: *Avvenimenti memorabili e personaggi rappresentativi nella Storia delle Matematiche.*

Siccome le grandi conflagrazioni hanno per conseguenza — la storia lo attesta! — profondi mutamenti morali, intellettuali e sociali persino nei popoli che non vi ebbero parte diretta, è naturale che noi, che assistemmo ad una lotta talmente gigantesca che, a paragone di essa, le guerre d'Annibale, di Cesare e di Napoleone appajono di proporzioni modeste, ci chiediamo qual posto sarà fatto alla scienza nel nuovo ordine politico e sociale alla cui ricerca l'umanità va oggi penosamente in traccia. Siamo noi giunti ad una cima da cui dovremo discendere? Il mondo è desso inesorabilmente minacciato da un periodo di tenebre comparabile a quello che tenne dietro allo sfacelo dell'impero Romano? Ovvero ci troviamo noi ad un semplice svolto della storia, nel quale l'umanità si arresta titubante, per riprendere tosto la corsa gloriosa iniziatasi al Rinascimento? Nel primo caso presenta una indiscutibile utilità compilare un esatto bilancio del nostro patrimonio intellettuale all'alba del Secolo XX, affinchè i nostri posteri, il giorno dell'immancabile risveglio, conoscano il punto donde dovranno prendere le mosse; invece nella seconda vi è un vero vantaggio pratico a tracciare la via che condusse le scienze al loro stato presente ed a determinare le circostanze che ne agevolarono o ne ostacolarono il progresso, onde trarne utili lezioni, giacchè non è che esaminando, per ogni branca dello scibile umano, ciò che essa *era ieri* e come essa divenne ciò che *è oggi*, che si possono adunare gli elementi per prevedere ciò che *sarà domani*.

Ora, la ricerca di tale presunta legge di sviluppo può essere affrontata con una certa speranza di successo per una disciplina così conser-

Digitized by Google

vatrice come è la Matematica, la quale non distrugge l'opera dei periodi anteriori per innalzare in loro luogo edifici del tutto nuovi. Ma questo stesso carattere e la circostanza che lo studio dei numeri e delle più semplici figure geometriche è coeva alle origini della civiltà, esigono si parta

> Dal dì che nozze e tribunali ed are
> Diero alle umane belve esser pietose
> Di sè stesse e d'altrui. . . . .

Però le informazioni che abbiamo intorno allo stato primitivo delle scienze in Asia ed in Africa sono talmente scarse e frammentarie e — ciò che è ben peggio! — esse recano traccie così evidenti di fantasia orientale e di boria nazionale, che è più prudente limitarsi a risalire a coloro che sono indiscutibilmente i nostri progenitori scientifici: i Greci, popolo privilegiato dalla natura, il quale, non appena uscito dalla barbarie, portò la ricerca matematica al posto eminente che essa ha poi sempre conservato, somministrando ai curiosi della natura armi talmente perfette che li fecero uscire vittoriosi in mille battaglie.

Che noi realmente proseguiamo sempre nella via aperta e spianata dai Greci gli è quanto è agevole riconoscere osservando che la geometria elementare è sempre insegnata nello spirito che anima gli *Elementi* di Euclide; che gli scritti di Archimede furono guida sicura per coloro che contribuirono a creare, da un lato, la nostra analisi infinitesimale e, da un altro, la teoria dei moti e delle forze; che Apollonio Pergeo scrisse un grande trattato sulle curve che furono poi riconosciute per le trajettorie percorse dagli astri, trattato ove si trovano i germi dei più possenti metodi geometrici moderni; che Ipparco e Tolomeo tracciarono con mano sicura le prime linee della geometria del cielo; che finalmente, Diofanto fu ed è tuttora maestro venerato ed ascoltato da tutti coloro che coltivano l'aritmetica superiore.

Gli sforzi di questi robusti e coraggiosi pionieri e dei loro immediati successori, assicurarono solide basi alla geometria ed alla meccanica, alla teoria dei numeri ed all'astronomia. Ma scomparsi che furono, lo slancio verso la ricerca matematica e la vigoria intellettuale necessaria per compiere ulteriori progressi si spensero gradatamente nel popolo ellèno; di modo che ai valorosi campioni che abbiamo ricordati successe una pallida coorte di anemici scoliasti che, nell'impossibilità di far vela verso nuovi continenti, si limitarono a visitare le terre già note, a descriverle e, possibilmente, a porle in valore. Di questo fenomeno di paralisi progressiva, non raro negli annali della scienza, ma che qui s'incontra per la prima volta, si cerca indarno una spiegazione plausibile. Infatti, l'albero che era stato coltivato con amore non scompagnato da

Digitized by Google

genio, durante il periodo aureo della matematica greca, era ben lungi dal trovarsi in istato di esaurimento, giacchè, quando si ricominciò ad occuparsene, lo si vide meravigliosamente rifiorire; d'altronde i metodi d'investigazione di cui si era in possesso non erano impari alle questioni a cui si sarebbe dovuto applicarli, dal momento che ad essi si fece appello, e non indarno, quando l'umanità risentì lo stimolo alla ricerca di nuovi veri e l'energia necessaria per raggiungerli; finalmente, neppure le condizioni politiche della Grecia bastano per render conto di tale deplorabile arresto, dal momento che la storia c'insegna che popoli schiavi, divisi, dispersi manifestarono appunto nelle discipline più astratte la loro perenne vitalità, la loro infrangibile unità spirituale.

Fu immensa sciagura che il popolo il quale sulla scena del mondo assunse la parte di protagonista prima affidata ai Greci, abbia dato prova di un'assoluta negativa per quanto concerne la ricerca dei rapporti esistenti fra numeri e fra figure: infatti Roma apprese quanto l'antica Ellade insegnò per bocca di Sofocle, Demostene, Pericle e Fidia, ma non comprese quanto era in grado d'insegnare al mondo la nuova e vasta Ellade cosmopolita, costituitasi in una delle varie monarchie in cui erasi frantumato il regno di Alessandro Magno. Al triste spettacolo offerto dai soldati di Silla, che abbattono i platani secolari dell'Accademia in cui avevano filosofato Platone ed i suoi discepoli, ed i boschetti del Liceo, che aveva accolto Aristotele ed i suoi seguaci, fa tristo riscontro il grossolano legionario di Marcello che fredda Archimede assorto nelle sue sublimi meditazioni; fatti disonoranti i quali più e meglio di qualunque altra considerazione caratterizzano la sprezzante attitudine assunta di fronte alla scienza pura dai conquistatori e legislatori del mondo antico. D'altra parte, fu lo studio delle opere d'Ipparco che spinse Giulio Cesare alla riforma del calendario, eseguita poi dal greco Sosigene; gli è coll'aiuto del celebre geodeta alessandrino Erone che venne eseguito il calcolo della superficie dell'impero; ed è con la scorta di una biblioteca composta di opere greche relative alla poliorcetica ed alla scienza dell'ingegnere che il conquistatore delle Gallie si preparò alla più memorabile delle sue imprese: fatti tutti che provano in modo irrecusabile che i Romani, vincitori dei Greci sui campi di battaglia, s'inchinavano dinanzi ad essi quali maestri nelle regioni più elevate del pensiero.

Neppure dopo che le aquile romane ebbero conosciuta la fuga, lo studio delle matematiche riacquistò l'antico favore, giacchè da un lato le invasioni dei barbari, le migrazioni dei popoli e le guerre di religione, che tennero in perenne agitazione tanta parte del mondo durante il medio evo, non permisero si raggiungessero quelle tranquille condizioni di vita che sono indispensabili al geometra per condurre ad un lavoro fe-

Digitized by Google

condo; d'altronde in un'epoca nella quale regnavano il culto per la glossa, pel dogmatismo e pel misticismo, come sarebbe possibile un lavoro libero, epperò realmente fruttifero?...(1)

Fu per un capriccio della fortuna che in Europa la rinàscita nel campo delle scienze esatte sia avvenuta prima che riguardo alle altre branche dello scibile; essa fu determinata da un modesto mercante di Pisa, Leonardo Fibonacci, il quale, rimpatriando verso la fine del Secolo XII, comunicò ai propri concittadini quanto aveva appreso dai popoli con cui era venuto in contatto durante le proprie peregrinazioni nel bacino mediterraneo; si trattava di idee e metodi che Indiani e Arabi avevano in gran parte attinti nelle opere classiche dell'antica Grecia, che essi si erano assimilati e che avevano poi svolti secondo direttive lor proprie, eccezion fatta pei segni numerali da essi inventati e di tanto superiori a quelli in uso presso i Greci ed i Romani; sono quelli che, adottati allora in Europa, non furono più abbandonati. Ma l'efficace apostolato in favore di questa così utile innovazione non è l'unica benemerenza di Leonardo di Pisa, giacchè egli ha ancora quello — assai superiore da un certo punto di vista — di avere risvegliato nell'umanità lo spirito di ricerca nel campo aritmetico, partecipando a pubbliche sfide (fors'anche prendendone l'iniziativa) sopra problemi numerici e insegnando, in opere giustamente celebri, metodi geniali e sicuri per risolvere questioni di tal fatta. All'intensificazione e diffusione dell'interesse per le matematiche non fu estraneo l'umanesimo, che cominciò allora ad esercitare una benefica influenza sugli spiriti; esso infatti, dirigendo i pensatori verso i classici greci l'attenzione delle persone colte, ripose in circolazione in Europa idee e procedimenti di cui gli Arabi avevano allora il monopolio.

L'algebra primitiva, questa esotica pianta trapiantata in Europa da Leonardo Pisano, al pari del ciliegio portato da Lucullo qual ricordo delle sue peregrinazioni in Oriente, trovò presso di noi un terreno ed un clima estremamente favorevoli, cosicchè, durante parecchi secoli, il maneggio di questa disciplina rappresentò per gl'Italiani un indiscusso privilegio. Quantunque la storia della prima fase di sviluppo della nuova disciplina presenti oscurità e lacune che non potranno sparire che in seguito ad uno studio esauriente di documenti non ancora esplorati, pure è possibile farsi un'idea abbastanza precisa del grado di perfezione

---

(1) L'unico grande matematico greco noto nel Medio Evo è EUCLIDE; che ARCHIMEDE fosse allora del tutto sconosciuto risulta dal fatto che DANTE (che conosceva pienamente la scienza del suo tempo) non lo pone nella «filosofica famiglia» (*Inferno*, Canto IV) ove troviamo, oltre l'autore degli *Elementi*, CLAUDIO TOLOMEO, il celebre astronomo.

Digitized by Google

raggiunta, percorrendo le opere di un contemporaneo di Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, testo delle lezioni che — quasi fosse titolare di una cattedra ambulante di matematica — egli fece nelle più colte città d'Italia. E per valutare l'influenza da lui esercitata è indispensabile tener conto della organizzazione e della grande fama delle nostre Università, gloria dell'Italia medioevale, ove accorrevano giovani stranieri attratti dal desiderio d'apprendere (1).

Il poderoso *in-folio* recante la firma di Luca Pacioli pone in grado di riconoscere che l'arte di risolvere problemi aritmetici non erasi allora innalzata considerevolmente sul livello toccato dai Greci, giacchè il dotto frate, al pari degli Arabi medioevali, non era in grado di risolvere col calcolo che problemi di 1° e 2° grado. Ma poco dopo alcuni matematici italiani, con un mirabile sbalzo, insegnarono a risolvere le equazioni dei due gradi seguenti: magnifico risultato alla cui realizzazione parteciparono Scipione Ferro, Nicolò Tartaglia, Gerolamo Cardano e Ludovico Ferrari, e di cui tutta l'importanza dottrinale si rivelò soltanto ben più tardi, quando cioè fu dimostrato che questi sommi avevano raggiunto l'estremo limite a cui può giungere l'algebra, dal momento che oggi è noto che le radici delle equazioni letterali di grado superiore al quarto non possono esprimersi col mezzo di funzioni algebriche dei coefficienti.

Generale era la speranza che questa memorabile vittoria ottenuta sotto il nostro cielo avrebbe incoraggiato e spronato altri valorosi italiani a compiere gesta congeneri; ma, per uno di quei fenomeni, la cui spiegazione forma il tormento dello storico della scienza, il manipolo dei combattenti andò gradatamente assottigliandosi e scettro e corona del regno delle matematiche pure passarono tacitamente in Francia. Tale trapasso fu determinato dall'opera di un giureconsulto al servizio di Enrico IV, Francesco Viète, il quale, arricchendo la nostra scienza di alcune nuove verità e più ancora rendendo più perfetta, più vigorosa, più agile la simbolica algebrica, chiuse il periodo d'infanzia che l'algebra, come tutte le creature, doveva traversare. Non appena essa ebbe così toccata la maturità, una folla di problemi poterono venire raccolti sotto un unico enunciato e venire risolti col mezzo di un'unica formula, nuove importanti questioni poterono venire sciolte, furono scoperte affinità profonde fra verità apparentemente eterogenee e si giunse a conseguenze

(1) Conviene rilevare a loro lode, che i preposti a questi istituti di istruzione erano animati dalle più larghe vedute nello scegliere i professori; nulla può servir meglio a dimostrare questo fatto dell'invito rivolto a KEPLERO d'insegnare nell'Università di Bologna, in quel celebre Ateneo che aveva visto fra i propri alunni COPERNICO giovinetto.

Digitized by Google

di una generalità ignota agli antichi. Mentre che grazie a tali evidenti qualità la nuova disciplina conquistò senza stento la stima ed il rispetto dei contemporanei, vi è una sua dote di carattere teorico che si manifestò solo col tempo a chi ne scrutò i fondamenti ed i caratteri; giacchè con la sostituzione metodica del numero concreto col simbolo astratto, ma di significato chiaro, determinato, invariabile, col simbolo dotato di proprietà rigorosamente determinate dalle corrispondenti definizioni, la matematica compì un nuovo passo della sua corsa fatale, troncando un altro dei vincoli che la tenevano legata al mondo materiale (1).

Constatata che fu l'influenza profonda e benefica esercitata dall'algebra sopra tutte le regioni sino allora governate dall'aritmetica, nacque l'idea di estenderne i benefici sino a raggiungere la geometria; è gloria imperitura del filosofo Descartes e di un suo contemporaneo e conterraneo, il grande giureconsulto Fermat, di aver pienamente soddisfatto tale desiderio, insegnando una procedura, primo germe dell'odierna geometria analitica. Applicandola, ogni curva piana o superficie descritta con una determinata legge si sostituisce con un'equazione che ne riassume tutte le qualità (2); aggiungasi che la sostituzione di una figura con una formola rese possibile concepire e studiare enti geometrici tanto complicati e strani che nessuna mano d'artista sarebbe in grado di disegnare; perciò la celebrazione del connubio fra il calcolo e la geometria determinò un nuovo passo verso il distacco della matematica dalla realtà, di cui poco dianzi segnalammo una precedente manifestazione.

Mentre la metamorfosi operata da Viète nella tecnica aritmetica e la metodica applicazione alla geometria della risultante disciplina, rappresentano i più noti servigi resi ai matematici dalla Francia durante il secolo di Luigi XIV, essi non sono certamente gli unici. Per mostrarlo basta ricordare che fu appunto allora che Fermat, meditando sugli scritti di Diofanto, di recente esumati e posti a disposizione degli studiosi, scoprì una folla di qualità recondite possedute dai numeri ed insegnò a risolvere un grande numero di problemi, la cui importanza è pari alla difficoltà, così assumendo la dignità di creatore dell'aritmetica superiore moderna, di quella affascinante disciplina non a torto chiamata la «chimica dei

---

(1) Questo carattere proprio della matematica, del quale troveremo più oltre nuove conferme, trovasi segnalato nel Discorso *Le trasfigurazioni di una scienza*, riprodotto nel presente volume, nonchè nell'articolo sopra *La legge d'evoluzione propria delle matematiche*, inserito nel Vol. XLI, 1927, della rivista *Scientia* [1935].

(2) Dall'equazione di una figura traggono origine i concetti d'ordine di una curva o superficie, poi la considerazione degli enti algebrici e quindi una parte cospicua della nostra letteratura matematica.

Digitized by Google

numeri »; con l'enunciare poi molte nuove proposizioni di cui non aveva agio di porre in carta le dimostrazioni e coll'invitare a sopperire al suo silenzio, contribuì indirettamente, ma efficacissimamente, allo sviluppo di una disciplina che si direbbe essere il monopolio dell'aristocrazia dell'umanità pensante.

Dal canto suo un altro filosofo francese, B. Pascal, ed il suo eminente compatriotta e maestro Desargues mostrarono che la geometria analitica, se è metodo eccellente per studiare le proprietà dell'estensione figurata, non è l'unico capace di guidare a tale scopo; applicando infatti il concetto di projezione, la cui fecondità era sfuggita agli antichi, essi seppero imprimere alla nave già pilotata da Apollonio un energico colpo di timone, che permise ad essa d'intraprendere un glorioso viaggio di scoperta, che non è peranco compiuto.

Circa nello stesso tempo, un altro capitolo delle matematiche, modesto ma di sommo valore pratico, subiva una trasfigurazione radicale, non in Francia, ma al di là della Manica: parliamo del Calcolo numerico, dell'umile logistica, per la quale i Greci nutrivano un indiscutibile disprezzo, documentato dal fatto che non la ritennero meritevole di una metodica esposizione. Malgrado il perfezionamento arrecatovi dalla numerazione decimale, specialmente dopo che Stevin ne estese la portata alle frazioni, le operazioni a cui dovevano sottoporsi gli astronomi erano talmente laboriose, pesanti e, per dir tutto, nojose, che le forze dei calcolatori venivano poste alla più dura prova. Ora è gloria della rozza Scozia l'avere dato i natali all'uomo che insegnò due diversi espedienti per semplificare i calcoli numerici, epperò rendere meno frequenti gli errori: è Nepero, il quale, inventando i logaritmi e costruendo le prime macchine calcolatrici, s'innalzò al rango, non solo di matematico geniale, ma anche di benefattore dell'umanità. La commemorazione (1914) del terzo centenario della pubblicazione della più cospicua delle sue opere, solennità a cui parteciparono con sincero entusiasmo teorici e pratici di tutto il mondo, servì a provare che, contrariamente al sentimento di alcuni scettici, la gratitudine è un sentimento che può talora germogliare nel cuore dell'uomo.

Questa prima e brillante affermazione della Granbretagna nel dominio matematico doveva, a breve distanza, essere seguita da un'altra di una portata ancora maggiore, la quale per molti decenni assicurò a questa nobile terra il primato nelle scienze fisico-matematiche; e ciò a giusto titolo, perchè la scoperta a cui rivolgesi attualmente il mio pensiero chiude, con una clamorosa vittoria, la lotta iniziata da secoli per sottoporre a ferree leggi il concetto d'« infinito ».

Gli storici della filosofia, rendendo conto dei geniali lavori compiuti

Digitized by Google

dagli atomisti della setta eleatica, c'insegnano da quanti secoli questo concetto turbasse i pensatori, i quali non avevano tardato ad avvedersi come da un esauriente studio di esso dipendesse la possibilità di penetrare nei misteri del microcosmo e del macrocosmo; dal canto loro gli storici delle matematiche designano le geniali idee di Eudosso da Cnido, contemporaneo di Platone, come quelle che permisero ai geometri di servirsi in molti casi, con piena sicurezza ed intera confidenza, di un concetto del tutto differente da quelli usati da essi di consueto. Gli stessi storici raccontano poi come, riposte in circolazione le più eminenti produzioni dei matematici grec,i a cui numerosi secoli di tomba non avevano tolto freschezza e fecondità, i procedimenti applicati da Archimede con insuperabile abilità, avevano ricevuto importanti perfezionamenti per opera di Galileo e dei suoi più eminenti discepoli, Cavalieri e Torricelli. Ora se si ha presente che, durante il Secolo XVII le Università di Padova e Bologna erano regolarmente frequentate da giovani stranieri, desiderosi di giovarsi delle primizie delle scoperte che i nostri grandi scienziati facevano sulla terra e nel cielo, e che fra essi gl'inglesi emergevano per numero ed intelligenza, si vedrà non essere destituita di fondamento la supposizione che gli è nel nostro paese che fa mestieri rintracciare i germi del « metodo delle flussioni » che permise a Newton di stabilire le leggi governatrici del corso degli astri.

Vero è che, come la priorità della scoperta della gravitazione universale fu disputata al sommo inglese da uno de' suoi compatriotti, così l'invenzione di questo metodo (il quale, in fondo, non differisce dal nostro calcolo infinitesimale) fu rivendicata, e non senza buone ragioni, dalla prima personalità eminente grazie a cui la Germania — non appena le fu concesso di sormontare lo stato di prostrazione in cui era caduta in causa della guerra dei Trent'anni (1618-1648) — potè prender posto fra le nazioni cultrici delle scienze esatte. Riguardo alla lunga ed accanita contesa che in conseguenza si accese fra Newton e Leibniz e che durante parecchi anni fece l'Inghilterra e la Germania implacabili nemiche (1), la storia ha ormai pronunciato un giudizio in ultima istanza, dichiarando che i procedimenti ideati da quei due geni per applicare l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo all'investigazione dei fenomeni geometrici erano opera originale di ciascuno: i tempi essendo maturi per venire a capo della fondamentale questione, le soluzioni proposte avendo basi

(1) Per particolari più minuti sopra questa famosa controversia, che è la più clamorosa fra quelle registrate nella storia delle matematiche, siami lecito di rinviare al mio opuscolo *Newton*, pubblicato nella collezione di *Profili*, edit. Formiggini (Roma, 1920).

Digitized by Google

filosofiche del tutto differenti e recando tracce evidenti delle mentalità dei due rivali, non era il caso di parlare di plagio; perciò le due nazioni in competizione possono andare entrambe orgogliose di avere posto il tetto ad un sontuoso edificio, fondato dai geometri dell'antica Grecia ed a cui avevano efficacemente collaborato l'Italia e la Francia.

Le argomentazioni caratteristiche del metodo flussionale, quantunque aritmetiche nel loro scopo, sono di natura geometrico-cinematica ed esigono da chi intende usarne una penetrazione ed una profondità di spirito che sono il privilegio di pochi eletti; onde molti dei matematici che vissero in Inghilterra durante il Secolo XVIII, nell'incapacità in cui erano di perfezionare quel metodo o di applicarlo a nuovi problemi, si limitarono a discutere intorno all'essenza dottrinale dei procedimenti newtoniani (1). Invece la tecnica dell'algoritmo leibniziano avendo per fulcro una simbolica che, grazie alla sua analogia con quella algebrica, era da tempo familiare a tutti i matematici, non offriva grandi difficoltà a chiunque intendeva di usarne. Nessuna meraviglia pertanto che il filosofo dell'ottimismo abbia trovati efficaci collaboratori fra pensatori anche mediocri, senza parlare dei sommi matematici di cui va superba la città di Basilea (Giacomo e Giovanni Bernoulli e Leonardo Eulero), del più grande dei geometri italiani (G. L. Lagrange, creatore del «metodo delle variazioni») e di una brillante coorte di matematici della nostra terra (Gabriele Manfredi, Vincenzo Riccati, Giulio Carlo de' Fagnani). Grazie alle loro produzioni, il calcolo infinitesimale raggiunse ben presto un'insperata perfezione e si mostrò in grado di risolvere i problemi più elevati che s'incontrano nella teoria delle curve e delle superficie e nella meccanica dei solidi e dei liquidi. Tale gigantesco sviluppo delle idee di Leibniz ebbe per conseguenza che il metodo newtoniano finì per essere considerato come un procedimento ormai superato, da collocarsi nel museo delle antiche glorie e non nei laboratori destinati a far progredire la scienza.

La Francia, che, durante i lavori di preparazione dei nuovi calcoli, era stata degnamente rappresentata da Fermat, Roberval e Pascal, si presenta a noi nella seconda metà del Secolo XVII come semplice spettatrice delle battaglie che venivano allora combattute e delle vittorie che venivano allora celebrate. Ma alla fine del secolo successivo si manifestò ivi un fenomeno inatteso e del massimo interesse: mentre che l'immane sforzo necessario per abbattere le secolari barriere che sepa-

---

(1) Cfr. F. CAJORI, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse* (Chicago and London, 1919), passim.

Digitized by Google

ravano le varie classi sociali doveva, secondo ogni ragionevole previsione, assorbire totalmente le sue migliori energie, cosicchè non ne sarebbero rimaste disponibili per una fruttifera ricerca scientifica, si vide lo spirito rivoluzionario trionfante comunicare una vitalità ed uno slancio inauditi a tutte le manifestazioni del pensiero (1), non escluse quelle che sembrano più lontane da qualunque applicazione al civile consorzio. Gli è allora che un ardente rivoluzionario appartenente alla politica militante, G. Monge, creò due nuove discipline: una, la *Geometria descrittiva*, destinata a radunare in un corpo di dottrina le pratiche applicate da pittori ed architetti nel loro quotidiano lavoro; l'altra, la *Geometria infinitesimale*, chiamata a risolvere i problemi più delicati e sublimi che s'incontrano studiando l'estensione figurata. Nella medesima epoca, il grande stratega a cui fu conferito l'invidiabile epiteto di «organizzatore della vittoria», L. Carnot, mosse il primo passo nella via che, gloriosamente percorsa da Poncelet e Chasles, doveva condurre all'odierna *Geometria di posizione*. Inoltre, mentre crollava la Bastiglia, Legendre faceva il primo tentativo riuscito per comporre in un tutto organico i teoremi di aritmetica superiore enunciati da Fermat ed in gran parte dimostrati da Eulero, Lagrange e Legendre stesso, e così dava vita alla *Teoria dei numeri*. Lo stesso egregio matematico gettava poi le basi di una specie di trigonometria superiore a quella fondata sull'impiego delle funzioni circolari, così creando la *Teoria delle funzioni ellittiche*, che un ventennio più tardi, grazie al norvegese Abel ed al tedesco Jacobi, raggiunse una perfezione che era follia sperare. Finalmente, le profonde ferite inferte dal regime del terrore non erano peranche cicatrizzate, quando, quasi a dimostrare che le ricerche di scienza pura non sono monopolio di alcun partito, uno dei più convinti e fedeli difensori dei principi legittimisti, L. A. Cauchy, rinnovava *ab imis* tutte le varie parti dell'analisi matematica classica, i cui fondamenti sino allora prestavano il fianco a critiche ragionevolissime, e vi aggiungeva alcuni nuovi capitoli, fra cui basti a sua gloria citare la *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*.

Questa febbrile partecipazione della Francia al progresso di tutti i rami delle matematiche non è l'unico grandioso fenomeno che presenti la storia delle scienze esatte nel periodo di tempo che va dall'ultimo quarto del Secolo XVIII al primo del XIX, giacchè è appunto allora che s'iniziò il costante intervento della Germania in ricerche concernenti i numeri e le figure. A Leibniz, spirito filosofico, mente multilaterale,

---

(1) V. la mia conferenza *Scienze e scienziati nel periodo della rivoluzione francese*, pubblicata nel 1915 nel periodico *Conferenze e prolusioni* [1935].

Digitized by Google

matematico piuttosto d'occasione che di professione, assorbito durante gran parte della sua vita da ricerche archivistiche a fini più politici che storici, mancò tempo, volere o forse circostanze favorevoli per creare in Germania una scuola di matematici; i suoi più valorosi seguaci non sono tedeschi, il che è confermato dal fatto che Federico il Grande, per popolare l'accademia creata da suo padre, appunto sotto la direzione di Leibniz, dovette sempre ricorrere all'estero (1). Ma, come alla fine della guerra dei trent'anni la Germania potè partecipare efficacemente al progresso delle matematiche con la creazione del calcolo infinitesimale, così, poco dopo la firma della pace che pose termine alla guerra dei sette anni (1756-1763), diede i natali a Gauss, il « princeps mathematicorum », secondo la denominazione usata con ragione dai suoi connazionali. A lui la teoria dei numeri deve un trattato dotato di grande originalità e da cui traggono tuttora ispirazione e lume tutti coloro che aspirano a risolvere nuove questioni di aritmetica sublime; a lui si deve poi una classica memoria di geometria infinitesimale, base delle principali fra le moderne ricerche sopra questa importante branca delle matematiche; a lui la geodesia e la meccanica del cielo devono perfezionamenti che i competenti in materia giudicano fondamentali; e parecchie altre discipline matematiche registrano con parole entusiastiche nei loro fasti il nome di Gauss, specialmente dopo che furono tratte dall'inedito molte pagine che, nella sua caratteristica incontentabilità, il grande matematico non aveva giudicate del tutto perfette.

L'impulso dato da Gauss allo studio delle scienze esatte in Germania è semplicemente meraviglioso; non soltanto la teoria dei numeri vi fu da quel momento studiata con tale assiduità che uno scienziato che ne fece oggetto di continue ricerche, non esitò a dichiararla — non senza un po' di esagerazione — scienza completamente tedesca (2): non soltanto furono coltivate tutte le altre branche a cui egli dedicò le proprie veglie; ma lo stesso accadde per quelle verso cui la sua attenzione (a quanto sembra) non erasi rivolta. Infatti la geometria fece memorabili progressi con Steiner, von Staudt, Möbius, Plücker e una plejade di loro valorosi seguaci; mentre la teoria delle funzioni ebbe in Riemann e Weierstrass investigatori capaci di sostenere il paragone con Cauchy. Questa lussu-

---

(1) Si ricordi infatti che i principali membri di questa compagnia durante il Secolo XVIII furono EULERO, LAMBERT, CASTILLON, MAUPERTUIS e LAGRANGE, per non parlare di D'ALEMBERT che ne fu per molto tempo il vero direttore.

(2) Cfr. la prefazione del volume *Das Fermatsproblem in seiner bisherigen Entwickelung dargestellt von* P. BACHMANN (Leipzig, 1919), che, benchè scritta in un tono insolito in opere scientifiche, contiene parecchie indiscutibili verità.

Digitized by Google

reggiante produzione farebbe ritenere che, durante i secoli d'inerte riposo, la terra d'Arminio abbia accumulata una massa di germi fecondi, pronti a dar frutti non appena trovassero condizioni propizie.

Un terzo fenomeno sommamente importante al quale il mondo assistè in questo medesimo periodo di tempo è la diffusione della critica, insegnata con l'esempio dagli enciclopedisti francesi, e l'applicazione di essa a discipline in cui una discrepanza di opinioni sembra a prima giunta, inammissibile. Non parliamo della critica sofistica che nulla produce, ma del sano spirito critico in aperta antitesi con il pedissequo rispetto per l'autorità, di quella preziosa fiaccola che lo scienziato non deve mai abbandonare se non vuole smarrire la diritta via o fare pericolose cadute. Ora questa tendenza che portò a strappare parte dei lauri generosamente conferiti ad Aristotele, a Tolomeo, a Galeno preparò pure ad Euclide la sgradevole sorpresa di un vigoroso attacco secondo le regole dell'arte. Il punto debole che da secoli era stato riscontrato nei suoi *Elementi* fu la teoria delle parallele; l'assalto venne da terre che sino allora non avevano unita la loro voce al coro dei matematici di tutta Europa; ne furono autori gli ungheresi Bolyai, padre e figlio, ed il russo Lobacefsky, i quali procedettero con logica talmente rigorosa da assicurare completo trionfo ad idee di apparenza rivoluzionaria e portarono completa luce in una regione sino allora ravvolta in profonde tenebre. Vinte che furono le resistenze di misoneisti intransigenti — resistenze che non meraviglieranno coloro che ricorderanno la geniale osservazione di Leopardi « è assai più facile insegnare una verità che assiderla sulle rovine di un errore » — calmate le dispute provocate da coloro che si ostinavano a proclamare l'infallibilità di Euclide, non si tardò a constatare con soddisfazione, come anche sulla geometria la sana critica aveva operato, non come le spada che uccide, ma come l'aratro che scava solchi profondi; giacchè, mentre la maestosa costruzione eretta dai Greci stava sempre solida sopra basi incrollabili, ai suoi lati ne sorgevano altre, non meno degne d'ammirazione, ma ove si riflette una struttura spaziale differente da quella rivelata dagli organi dei nostri sensi.

Veniva così compiuto un nuovo passo importante verso il distacco della matematica dalla realtà, distacco che, iniziatosi con la creazione dell'algebra, si era accentuato con l'invenzione della geometria analitica ed era aumentato con l'applicazione metodica dei concetti di « infinitamente grande » e « infinitamente piccolo ». Nuovo passo, ma non l'ultimo di quelli compiuti dalla nostra scienza nel corso del glorioso secolo XIX. Infatti, verso la metà di questo, molti matematici (e sarebbe troppo lungo indicare a quale nazionalità appartenessero questi pionieri) arrivarono ad emanciparsi dall'obbligo di studiare esclusivamente varietà estenden-

Digitized by Google

tisi al massimo secondo tre direzioni; e come dalla rinuncia al postulato su cui Euclide aveva innalzata la teoria delle parallele era nata una disciplina del tutto nuova, la *Geometria non euclidea*, così, vinta che fu la ripugnanza ad ammettere la possibilità di procedere in altre direzioni oltre a quelle tradizionali (lunghezza, larghezza, profondità), si costituì la *Geometria degli spazi a più dimensioni*, splendida creazione che abbraccia, all'infuori di proprie colossali ricchezze, tutto l'avito patrimonio geometrico e permise di projettare una luce inattesa sopra teorie che dianzi eransi giudicate ormai perfette. Coltivata in origine con la vivida scorta delle coordinate, essa è riuscita più di recente ad emanciparsi da tale sussidio, dando prova di una forza e di un'agilità ben degne di suscitare il più schietto entusiasmo. Non è tutto. Incoraggiati dal successo che coronò queste meritorie fatiche, i matematici (e forse sarebbe giustizia dire gli analisti) furon portati a concepire e riuscirono a studiare gli *spazi ad un numero infinito di dimensioni*; d'altra parte essi, malcontenti della presenza, nelle formole relative alla meccanica degli spazi a n dimensioni, di una quantità variabile in un solo senso (parliamo del tempo), spinsero l'audacia sino ad estendere queste formole al caso di un tempo a parecchie dimensioni, nella segreta speranza che un giorno venga in cui l'umanità sarà sufficientemente evoluta per raggiungere un concetto che sembra oggi oltrepassare i limiti dell'intelligenza umana. Sarebbe imprudente pronunciare oggi un giudizio sul valore di una tale coraggiosa generalizzazione; ma era dover nostro farne cenno come una nuova prova dell'insofferenza di qualunque freno che sembra caratterizzare la mentalità dei matematici odierni.

PARTE II: *Carattere internazionale dell'odierno pensiero matematico.*

I limiti di spazio imposti alle presenti considerazioni, le difficoltà che s'incontrano quando ci si propone di caratterizzare le successive fasi di sviluppo di una scienza, senza entrare in minuti particolari tecnici, la legge che noi ci siamo imposta di non parlare degli uomini che si trovano tuttora sulla breccia, ci costrinsero a passare sotto silenzio buon numero di nomi e di fatti che indubbiamente erano degni di miglior sorte. Tuttavia, se non c'inganniamo, quanto scrivemmo nella I Parte di questo studio basta a dimostrare che, da due millenni, le matematiche procedono gloriosamente di scoperta in scoperta, arrestandosi talora esitanti, ma mai cadendo in errori sistematici, sormontando spesso ostacoli ritenuti per qualche tempo superiori alle loro forze, ma non mai promettendo più di quanto fossero in grado di mantenere, estendendo senza posa la loro sfera d'influenza e, finalmente, manifestando sempre una tendenza ad infrangere i legami provenienti da un troppo stretto

Digitized by Google

legame col mondo reale, per potere applicare, senza ostacoli realistici, le leggi generali ed eterne della logica pura, ma rendendo sempre i più preziosi servigi alla tecnica ed all'investigazione dei fenomeni naturali (1).

La fiaccola della ricerca matematica, accesa dai maggiori pensatori dell'Ellade antica, si oscura, vacilla e quasi si spegne nella mefitica atmosfera medioevale; ma brilla di nuovo splendore nell'aria vivificante della rinàscita; a partire da questo momento essa, durante tre secoli, è tenuta dalla nostra patria. Quando questa, più che dar segni di debolezza, si orientò verso altre mète, la Francia fu pronta a sostituirla nella nobile funzione di guida verso regioni inesplorate; alla sua volta la nostra sorella latina dovette per qualche tempo cedere tale nobile ufficio all'Inghilterra, per riprenderlo più tardi, dopo avere concessa larga ospitalità a Lagrange, questo ammirabile seminatore d'idee, che in un'epoca nella quale la sua patria era troppo angusta per un tale genio, trovò degna scena per le sue gesta, prima nella Prussia dl Federico II, poi nella Francia di Luigi XVI, di Robespierre e di Napoleone.

Durante queste vicissitudini, nel corso di queste eterne peregrinazioni la nostra scienza conservò inalterate le sue grandi linee ed il suo carattere manifestatosi sino dall'alba della civiltà; se il rigore logico, predicato con l'esempio dai matematici del periodo classico della scienza greca, fu trascurato in certi momenti nella foga di scoperte che si affollavano alla mente di matematici di genio, non tardò a venire riposto in onore in epoche più tranquille, quasi a conferma della legge fisiologica che alle corse sfrenate deve tener dietro un riposo riparatore. Se talvolta (e purtroppo anche oggi) si misurò il valore di una scoperta in base all'utile che se ne poteva trarre immediatamente, l'importanza della scienza pura non tardò a rifulgere nella sua più vivida luce. Inoltre i fenomeni di esosmosi ed endosmosi che spesso si verificano attraverso i confini politici, rendono grande la difficoltà di ritrarre con precisione la storia delle matematiche presso un determinato popolo; tale difficoltá, che diviene sempre più grave di mano in mano che ci accostiamo all'epoca nostra, fu segnalata con ragioni molto convincenti da M. Cantor (2);

---

(1) A sostegno di quest'asserzione ricordiamo che i matematici posero a disposizione di KEPLERO una completa teoria delle curve che egli riconobbe essere le trajettorie dei corpi celesti, che fu grazie a preziosi strumenti analitici che NEWTON poté sostituire una solida teoria alle idee ancor vaghe sovra la gravitazione universale, e finalmente che fu mediante un prezioso algoritmo moderno che EINSTEIN poté creare la relatività generale.

(2) *Sur l'historiographie des mathématiques* (Compte rendu du Deuxième Congrès international des mathématiciens; Paris, 1902, p. 35).

Digitized by Google

volendo porla in luce sotto tutti gli aspetti ci si trova in presenza di alcuni problemi d'ordine generale che ci proponiamo di esaminare qui rapidamente, senza perdere contatto con la scienza a cui è consacrato questo articolo.

La prima questione che si presenta è la seguente: dal punto di vista della storia della coltura, quale è il significato da attribuire al vocabolo « popolo » ? Non è possibile determinarlo basandosi sopra considerazioni politiche, visto il loro carattere transitorio; non meno incerto è il criterio linguistico, giacchè nei paesi di frontiera si manifestano miscele di linguaggio estremamente perturbatrici; non resta dunque che ricorrere al criterio etnografico. Ma allora Eulero, i Bernoulli, Lambert, Steiner dovrebbero venire annoverati fra i matematici tedeschi; Quetelet, Lhuillier e C. Sturm tra i francesi; e si dovrebbe domandarsi se, in una storia delle matematiche nella Granbretagna, fa mestieri considerare in disparte gli scrittori irlandesi: onde, anche adottando questo sistema, non si riuscirebbe ad evitare controversie ardenti quale è quella non ancora spenta, relativa alla nazionalità di Copernico. E non va taciuto che la difficoltà che offre il problema di determinare la nazionalità d'interi gruppi di personaggi ripresentasi spesso per pensatori isolati; per convincersene basta ricordare gli sforzi sempre rinnovantisi compiuti dalla Francia per annoverare Lagrange fra i propri figli, sforzi che non condussero allo scopo, chè gli argomenti addotti, applicati in casi analoghi, condurrebbero, ad esempio, a collocare Bernardo Bolzano fra gli italiani (1).

Gli ostacoli che s'incontrano quando si vuole determinare *a priori* la cornice del quadro che deve colorire la storia del pensiero scientifico presso un determinato popolo, potrebbero venire evitati, per quanto ci concerne, se i matematici appartenenti a popoli differenti avessero qualche carattere comune che permetterse distinguere gli uni dagli altri; ora è possibile ravvisare qualche qualità di tal fatta?

Notiamo anzitutto che non si è condotti allo studio delle scienze esatte da fenomeni connessi al clima od al suolo (quali sarebbero i terremoti, così frequenti nel paese del Sole levante, che fecero dei Giapponesi i primi sismologi dell'universo), nè da considerazioni sociali o politiche (del tipo di quelle che fecero dei Romani i più eminenti legislatori del mondo). Quindi, per scoprire un criterio discriminatore sembra doversi fare esclusivamente appello a ragioni intrinseche, tratte cioè dall'esame della sostanza e dalla forma dei loro scritti. Riguardo alla forma notia-

(1) V. l'articolo DOROTHY MAUD WRINCH, *Bernhard Bolzano*, (*1781-1848*) (The Monist, January 1917).

Digitized by Google

mo che tutti i trattati di geometria facenti testo — persino quelli recanti la firma di qualche Arabo medioevale — sono scritti in uno stile fedelmente modellato sopra quello di Euclide e che l'eleganza dello stile e dell'apparato analitico, di cui gli odierni matematici francesi vanno giustamente orgogliosi, s'incontra dopo il soggiorno di Lagrange a Parigi (per convincersene basta consultare gli scritti di d'Alembert, Vandermonde, Clairaut e persino Laplace); sarebbe quindi ingiusto considerare questa qualità come una dote innata dei nostri vicini. Giova anche rilevare che certe particolarità stilistiche traggono origine da circostanze affatto fortuite; così è certo che Galois non avrebbe usato la ben nota disperante concisione se non avesse scritto le migliori sue pagine nelle scarse e e febbrili ore precedenti il fatale duello in cui egli perdette la sua giovane vita, e Riemann avrebbe certamente trovato tempo sufficiente per svolgere completamente le sue idee troppo rapidamente schizzate, se un morbo che non perdona non l'avesse tratto a morte immatura. Viceversa, lo stile eccessivamente diffuso, in cui sono scritte alcune opere pubblicate in Germania prima della recente guerra, trova forse la propria spiegazione nella generosità, un tanto alla pagina, di cui davano prova alcune grandi case editrici.

Emerge da ciò che le considerazioni stilistiche non possono essere che di ben scarsa utilità a chi cerca di caratterizzare le produzioni matematiche apparse in una determinata parte del mondo; vediamo se possano servire considerazioni di sostanza.

P. Duhem, in un suo volumetto ben noto (1), sembra inclinare a considerare prorogativa dei tedeschi la pazienza nel calcolo; ora se si hanno presenti i lavori di scrittori di altra stirpe, quali Brioschi, Hermite, Cayley, si sarà riluttanti ad accettare la tesi dell'illustre storico francese, tanto più che per dimostrarla egli cita G. Cantor, le cui più grandi scoperte — teoria degl'insiemi, numeri transfiniti — sono frutti di un pensiero filosofico e certamente non di qualche calcolo (2). Nè ci

(1) *La science allemande* (Paris, 1915) p. 110.

(2) Chi volesse difendere la tesi del DUHEM potrebbe essere tentato di sostituire il nome di G. CANTOR con quello di A. CLEBSCH; ma in una lettera di HERMITE si legge quanto segue « Un élève de Clebsch, qui a suivi mes lecons, M. Pasquier, astronome, professeur à Louvain, m'a appris que l'éminent géomètre qui a produit tant de beaux Mémoires, travaillait très peu. Les idées lui venaient heureuses et abondantes, il les livrait à des jeunes ouvriers, enchantés de travailler sous ses yeux, avec sa direction, qui lui supprimaient, en faisant les calculs avec grand soin, tout travail matériel, et c'était au grand profit de la Science, comme de ses auxiliaires » (*Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de* B. BAILLAUD et H. BOURGET, T. II, Paris 1905, p. 134).

Digitized by Google

sembra applicabile la sottile distinzione proposta da E. Rignano fra pensatori *sintetici* e pensatori *analitici* (1), dal momento ch'esistono nella letteratura matematica di tutti i paesi pensatori dell'una e dell'altra specie.

Se si ricorda che Legendre (seguendo l'esempio di alcuni suoi conterranei) attentò alla purezza del metodo euclideo introducendo nella geometria elementare considerazioni aritmetiche e così riscosse il plauso di molti francesi, mentre invece Staudt volle e seppe espellere dalla geometria di posizione ogni traccia di numero e Weierstrass insegnò a trattare l'analisi senza mai ricorrere a illustrazioni geometriche, si potrebbe ritenere che i metodi « puri » siano caratteristici dei matematici tedeschi e i metodi « misti » lo siano dei francesi; ma che questa conclusione sia affrettata è dimostrato dal fatto che F. Klein espose nelle sue lezioni la teoria dei numeri ricorrendo ad illustrazioni geometriche, la teoria delle equazioni di 5° grado ragionando sopra modelli in gesso dei poliedri regolari e la teoria degl' integrali delle funzioni algebriche con l'aiuto di considerazioni attinte a fenomeni elettrici.

Similmente è ben vero che i tedeschi sono sempre disposti ad accogliere le idee nuove, qualunque ne sia la provenienza, mentre i Francesi si mostrano spesso ostili a trovati esotici; ma che neppur questo sia un criterio atto a separare nettamente la mentalità dei due popoli separati dal Reno, viene dimostrato dalle numerose produzioni analitiche tedesche, tradotte in francese dopo la guerra del 1870-71 per la liberale influenza di Hermite (2) ed inoltre del fatto che Poincaré non esitò a dare i nomi di Fuchs e Klein alle nuove funzioni, a cui deve gran parte della sua gloria. Così, è indiscutibile che gl' Inglesi nella scienza come nella politica sono inclini, in generale, allo splendido isolamento caratteristico dell'era vittoriana; ma d'altra parte è noto che, subendo l'influenza animatrice d'intelligenze potentemente illuminate, non

---

(1) *Psicologia del ragionamento* (Bologna, 1920). Per maggior chiarezza citiamone il seguente passo: « A questo duplice aspetto, assunto dalla evoluzione del ragionamento, corrisponde la divisione fondamentale delle mentalità logiche in sintetiche e in analitiche. Le prime, più portate alla scoperta di concetti nuovi o all'allargamento di concetti antichi; le seconde, più portate alla combinazione ponderata, paziente e perseverante delle operazioni od esperienze, suscettibili di venire semplicemente immaginate, onde trarre in via deduttiva dal patrimonio già esistente di concetti tutto ciò che esso può dare »; p. 267.

(2) La giustificazione di questo apprezzamento sull' influenza esercitata dall'eminente analista francese si può trovare nelle *Briefe von Ch. Hermite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren 1875-1888* pubblicate per cura di E. LAMPE (Archiv für Math. und Physik, III Ser. T. CXIV, 1916).

Digitized by Google

mancarono di misurare di quando in quando il pregiudizio che tale attitudine produceva nella coltura matematica nazionale e si affrettarono a porvi riparo.

Ancora: è indiscutibile che la specializzazione è generale nei tedeschi; ma quando si ammira la sorprendente disinvoltura con cui Helmholtz passò dalla fisiologia alla fisica e da questa alle matematiche, imprimendo in ciascuna di queste discipline traccie indelebili del suo genio (1), si è forzati a concludere che non esiste in ciò un carattere suscettibile di differenziare le ricerche matematiche tedesche da quelle compiute presso altre nazioni. Del resto, come nutrire ragionevole fiducia di scoprire qualche caratteristica comune a tutti i matematici di una stessa stirpe, quando si hanno presenti le acute osservazioni fatte da V. Volterra (2) sopra le mentalità radicalmente diverse di tre analisti che furono onore d'Italia nello scorso secolo e che, grazie ai loro frequenti mutui contatti, avrebbero dovuto offrire intima rassomiglianza?

Altri fatti di natura differente ma di indiscutibile importanza conformano, se non c'inganniamo, la vanità di qualunque sforzo inteso a definire con precisione la mentalità matematica di coloro che sono nati in una stessa regione del globo; citiamone alcuni che ci sembrano più impressionanti:

a) Parecchie scoperte furono compiute indipendentemente da vari matematici, quasi si trattasse di frutti maturi a disposizione di persone in grado di coglierli. Così le espressioni delle radici d'un'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche dei coefficienti è dovuta agli sforzi concomitanti ma indipendenti di tre matematici appartenenti a popoli differenti (Hermite, Kronecker, Brioschi), mentre il risultato analogo per quelle di sesto porta due firme, di Brioschi e di Maschke. Così la proprietà letteraria sulla geometria non euclidea dovrebbe ripartirsi fra G. Bolyai (ungherese) e N. Lobacefsky (russo), ove non venisse da alcuno avanzata l'ipotesi che essi subirono l'influenza di Gauss (tedesco) e che non furono ad essi ignoti gli sforzi non del tutto sterili di G. Saccheri (italiano). Finalmente la scoperta delle « superficie unilatere » (3) merita di essere attribuita tanto al Möbius quanto al Listing (4).

---

(1) Cfr. L. KOENIGSBERGER, *Hermann von Helmholtz* (Braunschweig, 1902-03).

(2) *Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse* (Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens, Paris 1902), p. 43-57.

(3) Le superficie più note (piano, sfera, coni, cilindri) hanno ciascuna due facce distinte, onde sono dette « bilatere »; per le unilatere la distinzione di due lati è impossibile.

(4) Naturalmente i fatti citati non sono che alcuni del genere registrati nei fasti

Digitized by Google

b) Alcune teorie nacquero dalla collaborazione di persone appartenenti a razze differenti. Così la Logica matematica, schizzata da Leibniz, deve la condizione in cui si trova attualmente all'opera, concorde nei fini ma diversissima nei mezzi, dell'inglese Boole, del tedesco Schröder e dell'italiano Peano (1). E la teoria dei gruppi di trasformazioni, nuovo ramo di recente nato sull'antico tronco, creato per merito del norvegese S. Lie, in seguito a profonda meditazione sopra le opere del francese Galois, non avrebbe potuto probabilmente raggiungere la perfezione a tutti nota se il suo creatore non avesse trovato in Germania attivi discepoli e zelanti collaboratori.

c) Certi risultati furono raggiunti in conseguenza di lavori successivi ma indipendenti di parecchi investigatori. Si ha un esempio tipico di tal fatto nella risoluzione del problema della quadratura del cerchio; infatti l'impossibilità di risolverlo con la riga ed il compasso fu bensì stabilita per la prima volta dal tedesco Lindemann; ma il ragionamento da lui immaginato allo scopo è modellato da altro concepito qualche anno prima dal francese Hermite; perciò, siamo noi in presenza di una scoperta francese o tedesca?... Non si può dirla francese, poichè l'applicazione dei concetti hermitiani non era ovvia (infatti ha necessitato sei anni di attesa); ma d'altronde non si può dirla tedesca, dal momento che gli strumenti per compierla furono costruiti a Parigi. Un dubbio analogo ci assale riguardo al celebre teorema che afferma essere ogni numero intero scomponibile al più in quattro quadrati; intuito nell'antichità da Diofanto, venne esplicitamente enunciato da Fermat, contemporaneo di Descartes, ma non fu dimostrato che un secolo dopo da Lagrange, che recò a perfezione ricerche di Eulero. Finalmente a quale nazione devesi attribuire il merito dell'invenzione delle famose macchine calcolatrici del tipo Brunsviga, quando gli storici (2) assicurano che l'ingegnere svedese Odhner, a cui si è debitori del primo modello, non fece che applicare un'antica idea del Poleni, ben noto professore dell'Università di Padova?

d) Certe teorie, che recano il marchio di fabbrica di una nazione de-

---

della matematiche; per esempio non abbiamo parlato, per amore di brevità, della scoperta del pianeta Nettuno fatta contemporaneamente da ADAMS (inglese) e LEVERRIER (francese) in base a considerazioni teoriche, confermate mediante l'osservazione dall'astronomo GALLE (tedesco).

(1) Cfr. C. I. LEWIS, *A Survey of symbolic logic* (Berkeley Cal., 1918).

(2) Cfr. l'articolo E. M. HORSBURGH *Calculating Machines* presentato all' Istitution of Engineers and Shipbuilders in Scotland il 23 dicembre 1919 e pubblicato per cura di questa Società.

Digitized by Google

terminata, si sono poi sviluppate mirabilmente altrove; limitandoci ad un solo esempio (per non oltrepassare i limiti imposti al presente articolo) ricorderemo che una delle discipline che giunsero a maturità, sotto l'influsso dell'ardente sole della Rivoluzione francese, la Geometria descrittiva, trovò (chi mai poteva prevederlo?) nelle regioni gementi sotto la ferula di Metternich un così grande numero di cultori che l'ex-impero austro-ungarico si glorificava del nome di « paese della geometria descrittiva » (1).

Nell'or constatata assenza di doti specifiche su cui ci si possa fondare per caratterizzare dal punto di vista matematico i vari popoli della terra, nasce l'idea di giungere ad una classificazione razionale ricorrendo a considerazioni di altro genere. Così è indubitabile che l'abitudine (assai diffusa in Germania a partire da Jacobi) di esporre dall'alto delle cattedre universitarie le scoperte che i professori andavano compiendo, fu estremamente favorevole al progresso della scienza; ed io ricordo che Max Simon narrava, con ben giustificata soddisfazione, che i perfezionamenti arrecati da Weierstrass ad alcuni concetti fondamentali della teoria delle funzioni analitiche furono suggeriti da obbiezioni da lui mosse al sommo analista di Berlino, dopo averne ascoltate le lezioni. Così se la Germania potè condurre a termine opere di lunga lena dovute al concorso di molte differenti energie, è non solo grazie allo spirito di disciplina da cui è animato quel popolo, ma anche per effetto della cordiale fraternità che unisce colà i cultori della medesima disciplina (2). Invece se alcuni matematici francesi e tedeschi poterono contribuire al progresso della nostra scienza in più larga misura di italiani dotati di non inferiori mezzi intellettuali, gli è che seppero resistere vittoriosamente ai seducenti inviti della politica: e così dicendo, non intendiamo svalutare alcuni preziosi servigi resi alla loro patria da Betti, Brioschi, Cremona e Dini, ma soltanto rilevare che gli allori che conquistarono come uomini pubblici vietaron loro di porre la loro firma ad un maggior numero di scoperte matematiche.

La tinta uniforme delle produzioni matematiche dei vari popoli, se forse può stupire quando si studia la scienza di epoche precedenti la no-

---

(1) V. la mia *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai nostri giorni* (Milano, 1921).

(2) In appoggio a questa osservazione può citarsi il colossale contributo dato dalla Germania alla Commissione internazionale per l'insegnamento matematico: chi desidera farsi un'idea del modo in cui si conseguì questo risultato consulti l' interessante opuscolo di A. GUTZMER, *Die Thätigkeit des deutschen Unterausschlusses der internationalen mathematischen Unterrichtskommission 1908-1916* (Leipzig, 1916).

Digitized by Google

stra, risulta spiegabilissima quando si volge lo sguardo all'epoca attuale, giacchè oggi, mentre le pubblicazioni periodiche (giornali e atti accademici) diffondono con regolarità e rapidità tutte le invenzioni e scoperte, le frequenti riunioni, nazionali e internazionali, lo scambio di professori fra nazioni amiche, le borse di studio concesse a giovani promettenti, rendono vivi e frequenti gli scambi d'idee fra coloro che coltivano la stessa disciplina. E poichè tale sistema si manifestò così utile in quest'ultimo secolo da produrre un raddoppiamento del nostro patrimonio, generale è il voto che esso non venga abbandonato.

Non ostiniamoci, dunque, a voler scoprire differenze profonde e indelebili ove non esistono che lievi varietà di tinte; non sforziamoci di elevare barriere ove tutto consiglia di costruire ponti. Adoperiamoci piuttosto a riunire i matematici di tutto il mondo (ed in realtà oggi non esiste angolo della terra ove non si trovi qualche cultore delle scienze esatte) in un unico immenso luminoso laboratorio, ove tutti siano cordialmente e festosamente accolti, ove ognuno trovi il proprio posto e gli strumenti che meglio convengono al suo personale lavoro. Così contribuiremo, ciascuno nella misura delle proprie forze, ad innalzare maggiormente l'imponente edificio di verità matematiche di cui lo spirito umano va giustamente orgoglioso.

VIII.

PSICOLOGIA DEI MATEMATICI

Dalla Rivista *Scientia*, Gennaio 1934.

1. — La matematica fu il primo dei soggetti di studio che abbia assunto contenuto e forma prettamente scientifici, l'unica disciplina di cui vennero revocati in dubbio i diritti alla dignità di scienza soltanto dai profani che ne ignoravano le recondite bellezze ed è per avventura la sola che serbò intatti i lineamenti generali che le impressero, duemila anni or sono, i sommi pensatori dell'Ellade antica che la crearono. Tale posizione privilegiata spiega perchè da tempo l'attenzione degli psicologi siasi volta alla mentalità dei matematici ed alla determinazione delle condizioni in cui si verificarono le scoperte registrate nei fasti delle scienze esatte. Sgraziatamente i dati di fatto indiscutibilmente sicuri, donde trarre le desiderate risposte, sono di estrema rarità; chè, da un lato, sono assai poco numerosi i matematici che si attardano a registrare e si inducono a rivelare le circostanze in cui giunsero alla scoperta di qualche verità dianzi ignorata e, d'altra parte, la maggior parte delle biografie

Digitized by Google

— specie quelle che riguardano antichi pensatori — sono costituite da aneddoti gustosi ed impressionanti, ma di assai dubbia autenticità, framezzati da altisonanti epifonemi laudatori, dai quali non è possibile trarre alcuna conclusione (1).

Sfortuna vuole che in tale condizione si trovino in generale (esclusi quelli che recano la firma dell'Arago e pochi altri) anche gli elogi accademici di personaggi di recente defunti, benchè, nel loro insieme, costituiscano il più ricco materiale che si trovi a disposizione di chi voglia compiere una fruttifera indagine sulla psiche dei matematici. Preziosi elementi si trovano, invece, nella splendida letteratura biografica di cui va a ragione superba l' Inghilterra e nelle generalmente brevi, ma succose necrologie pubblicate, specialmente in Germania, nel corso di quest' ultimo secolo (2).

2. — Assai spesso vengono a torto riuniti in un fascio i matematici ed i calcolatori miracolosi, benchè appartengano a tipi nettamente differenziati; chè se Gauss, sino dalla più tenera età, eseguiva, con rapidità e sicurezza meravigliose, complicate operazioni aritmetiche e tale prerogativa conservò durante tutta la sua vita (3), il Poincaré, che certamente non gli è inferiore, ebbe a confessarsi incapace di eseguire a dovere una semplice addizione (4). D'altronde, lo studio compiuto da specialisti (5) sopra i più sorprendenti calcolatori mise in luce che questi costituiscono una speciale categoria di virtuosi, i quali, dalla incessante contemplazione della serie dei numeri naturali e da una memoria specifica, robusta per natura e resa più vigorosa dal continuo esercizio, acquistarono la facoltà di ritenere e combinare con procedimenti semplici numeri assai grandi e costituenti collezioni foltissime. Tolti da tale

---

(1) Altrettanto devesi ripetere riguardo all'autobiografia (*De vita propria*) di G. CARDANO, chè in ogni pagina vi s'incontrano sapienti reticenze che, in un pubblico dibattimento, avrebbero portato all' incriminazione, come falso testimonio, del famoso medico lombardo.

(2) V. anche numerosi passi del notevole volume di W. LOREY, *Das Studium der Mathematik an der deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts* (Leipzig und Berlin, 1916).

(3) Il piacere che egli provava nel calcolare lo spinse una volta ad esclamare, durante una lezione: « quanta poesia si trova in una tavola di logaritmi! ».

(4) V. la conferenza *L'invention mathématique* pubblicata in « L'enseignement mathématique », t. X, 1908, p. 359.

(5) A. BINET, *Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs* (Paris, 1894). Non è ivi considerato DANIELE NOBILE, da giovinetto calcolatore così prodigioso, che nel 1847 FERDINANDO II, re di Napoli, gli assegnò una pensione; finì oscuramente la vita come bidello di un collegio di Chieti (R. DE CESARE. *La fine di un regno*, Parte II, Città di Castello, 1900, pag. 109-110).

Digitized by Google

ristrettissimo campo, si rivelano come persone di mediocre levatura ed incapaci, non solo di arrecare la più modesta aggiunta al nostro patrimonio scientifico, ma perfino d'intendere le meno umili teorie della scienza di cui ragioniamo. Siffatta diversità di contegno non recherà meraviglia a chi rifletta che le calcolazioni aritmetiche seguono norme rigorosamente fisse, le quali, per essere applicate, non esigono partecipazione alcuna da parte di chi le applica; quest'osservazione porge, anzi, una spiegazione plausibile del fatto (da taluno giudicato incredibile) che l'esecuzione di calcoli numerici possa venire affidata ad apparati *ad hoc* ed induce ad equiparare i grandi calcolatori a macchine calcolatrici viventi.

Tale assoluto distacco fra calcolatori di professione e veri matematici, toglie quasi ogni valore alle ricerche istituite dal celebre Gall e proseguite da P. I. Möbius (1), per determinare la sede nel cervello dell'attitudine matematica ed il sintomo anatomico della presenza di essa; esse, infatti, hanno per punto di partenza i risultati dell'esame diretto dei crani di alcuni calcolatori di abilità eccezionale e lo studio dei ritratti di alcuni grandi matematici; ora quando fra questi troviamo Euclide ed Archimede, di cui non esiste alcuna figurazione degna di fede, ed altri più recenti, ma che appartengono ad un'epoca anteriore a quella in cui Daguerre insegnò a rendere pittrice la luce, forza è nutrire fondatissimi dubbi intorno alla solidità dell'ingegnoso edifizio eretto dal celebre scienziato tedesco ed abbellito, se non rafforzato, da alcuni suoi discepoli.

Per le ragioni esposte noi escludiamo completamente dalle nostre considerazioni coloro che guadagnano la vita compiendo sui palcoscenici esercizî sbalorditivi di *sport* aritmetico.

3. — Volgendoci a coloro i cui nomi figurano nella storia delle scienze esatte, la prima questione che ci si affaccia è se l'attitudine alla ricerca matematica si trasmetta o non per eredità. Ora, è ben vero che in alcune famiglie (come i Riccati, i Fagnano, i Bernoulli, i Cassini, i Carnot, i Neumann) si trovano parecchie generazioni di distinti geometri; è ben vero che alcuni grandi matematici (come Eulero) ebbero figli, ed altri (come Archimede e B. Pascal) ebbero padri tutt'ora onorevolmente ricordati nella storia della matematica; ma si tratta di fenomeni isolati, spiegabili con l'educazione familiare o con l'esempio paterno, piuttosto che con una irresistibile vocazione e che quindi non autorizzano a trarre da essi qualche illazione di carattere generale. Tanto più che ad essi si

(1) *Ueber die Anlage zur Mathematik* (Leipzig, 1900).

Digitized by Google

possono contrapporre innumerevoli esempi di matematici sbocciati in mezzi assolutamente ageometrici e le stupefacenti apparizioni di personalità di primo ordine in ambienti privi di tradizioni matematiche debitamente controllate: a questo riguardo è veramente tipico ed impressionante il sorgere di una stella di prima grandezza, come Abel, in una terra, come la Norvegia, che non aveva dianzi dato contributi cospicui alla nostre cognizioni matematiche.

4. — La leggenda (la vera nemica della storia degna di tal nome) si è compiaciuta a creare un tipo del matematico, il quale ricevette una diffusione invidiabile e deplorevole e di cui giova esaminare l'esattezza. Assumendolo per conforme al vero, il matematico propriamente detto sarebbe un individuo incapace di comprendere ed apprezzare qualunque manifestazione di genio estranea alla propria specialità; e per stabilire la regolarità di tale pretesa forma tipica viene riferito l'aneddoto secondo cui un celebre professore del Collegio di Francia — il Roberval — dopo aver assistito ad una tragedia di Racine, a chi gli chiedeva quale impressione avesse ricevuta, sorridendo avrebbe risposto: « Qu'est-ce que cela prouve? ».

Ora che la continua ed intensa meditazione su un dato soggetto e la gioia prodotta dalle scoperte fatte possa avere in taluno resa ottusa la facoltà di debitamente apprezzare altri prodotti dell' ingegno umano, è un fenomeno spiegabilissimo, del quale sarebbe facile trovare altre manifestazioni in tutte le categorie di specialisti. Ma è assolutamente contrario a tutto quanto si conosce in generale riguardo alla psiche dei matematici il ritenere che essi abbiano la mente chiusa a qualunque produzione estranea alla disciplina a cui hanno dedicata la vita. A dimostrarlo basti ricordare come parecchi eminenti matematici (e mi basti citare Gauss e Jacobi), nel momento di scegliere la propria carriera, rimasero a lungo oscillanti tra la matematica e la filologia e durante tutta la loro vita manifestarono una spiccata attitudine per lo studio delle lingue. A conferma di quanto sopra milita il fatto che Cardano e Giovanni Bernoulli erano medici, che Viète e Fermat erano giureconsulti apprezzatissimi, che H. Grassmann, il creatore del nuovo ramo di geometria da lui chiamato col nome di « Ausdehnungslehre », disgustato e scoraggiato, vedendo infruttuosi gli sforzi che andava facendo per far accogliere nella geometria ufficiale i nuovi metodi da lui escogitati, abbandonò le matematiche per consacrarsi al gruppo delle lingue indogermaniche, con tale e tanto successo che il suo *Wörterbuch zum Rigveda* e la versione di quest'opera classica della letteratura sanscrita gli procurarono lodi unanimi da parte delle più spiccate autorità del tempo e distinzioni estremamente lusinghiere da corpi accademici competenti.

Digitized by Google

D'altra parte, di gran numero di matematici si conosce l'amore appassionato per le arti (specialmente per la musica e la letteratura), nelle quali trovavano sollievo da più gravi occupazioni. Di più, chi ignora come furono matematici buon numero di coloro che sono venerati quali legislatori nel campo filosofico, da Pitagora, il creatore dell'originale confraternita nota sotto il nome di Scuola italica, a Descartes che col *Discours de la méthode* gettò le basi del razionalismo, da Leibniz, il filosofo dell'ottimismo, ad Augusto Comte che viene costantemente vantato come primo dei filosofi positivisti?

Perciò, se la ricerca matematica, come effetto delle difficoltà che presenta, lascia poco tempo per altri studi, certamente, non fa perdere a chi vi si dedica la facoltà d'interessarsi ad altri ordini di idee — gli affari e la politica non esclusi (1).

E neppure si può asserire che ogni matematico elegga un campicello che continua a coltivare ed approfondire durante tutta la propria vita. Nessuno nega che fra i matematici si trovino esempi di pensatori di questo tipo, ma è pur vero che se ne trovano in qualunque categoria di studiosi, come è pur vero che si conoscono sommi matematici che giunsero ad abbracciare tutta la scienza del loro tempo: Eulero, Cayley, Poincaré e F. Klein si presentano spontaneamente a sostegno di tale asserzione; inoltre Lagrange e Cauchy non lasciarono forse traccie luminose del loro genio in tutti i campi dell'analisi e delle sue applicazioni all'investigazione dei fenomeni naturali?

5. Carattere comune ai matematici è la precocità; cosicchè non ha l'aspetto di assoluta eccezione il fatto, riscontrato in sè stesso da Gauss e da lui espresso dicendo che egli aveva «imparato prima a calcolare che a parlare»; basta a provarlo citare quanto narrano i biografi di Pascal, Clairaut, Ampère e ricordare come buona parte della matematica moderna porti impresso il marchio foggiato da Abel e Galois, i quali morirono prima di avere raggiunto i trent'anni. Ciò riceve una conferma dal fatto che anche ai nostri giorni (almeno quando non infuria il flagello dell'economia sino all'osso) i matematici conseguono di regola una cattedra universitaria molto prima dei loro condiscepoli dedicatisi ad altri rami dello scibile. Tale fatto si spiega ricordando — per usare le parole di un grande (2) — che «Nicht Fleiss und Gedächtniss sind es, die hier zum Ziele führen, sie sind hier die untergeordnesten Diener des

(1) V. più avanti (p. 112) il mio articolo *Matematici nella vita pubblica* [1935].

(2) JACOBI: cfr. LEJEUNE-DIRICHLET, *Gedächtnissrede von G. G. J. Jacobi*, riprodotto in principio del t. I di *Jacobi's Gesammelte Werke* (Berlin, 1881).

Digitized by Google

sich bewegenden reinen Gedankes»; e di vero la ricerca matematica non esige l'esame di migliaia di documenti che è imposto allo storico, non le lunghe notti insonni occupate dall'astronomo a seguire il corso dei corpi celesti o le esperienze rinnovate centinaia di volte necessarie al fisico, al naturalista, al medico, prima di scoprire qualche fenomeno sfuggito all'attenzione dei predecessori. Ed è notevole il fatto che, mentre la lunghezza della vita media dei matematici puri superi quella del comune degli uomini, l'entusiasmo che li spinse da giovani a consacrarsi alla investigazione delle qualità dei numeri e delle figure li accompagni sino all'ultimo respiro; così Eulero (per usare le parole di un suo coscienzioso biografo) «cessò di calcolare e di vivere» ed ai giorni nostri l'Hermite ed il Reye scrissero di matematica sino alla vigilia del viaggio che non ha ritorno (1). Così facendo essi giunsero a dimenticare molti dei dolori e parte dei disagi annessi alla vita quotidiana, ed è da notarsi il fatto che, mentre i matematici non hanno quasi rappresentanti nella triste coorte di suicidi (2), uno dei più illustri matematici italiani dello scorso secolo, Giusto Bellavitis, dettando ottantenne, con incredibile serenità di spirito, l'epigrafe da incidersi sulla propria tomba, vi incluse la caratteristica frase: «visse felice».

6. — La matematica, scienza due volte millenaria, possiede una letteratura di così straordinaria estensione che una bibliografia tuttora inedita — e che G. Valentin, il quale ne è autore, ebbe a dichiarare incompleta (3) — abbraccia 150 mila numeri. Naturalmente (e fortunatamente!) chi si avvia per la carriera di cui ragioniamo, non ha bisogno di conoscere tutto quanto scrissero i predecessori: tuttavia, se non vuole perdere il proprio tempo a vincere difficoltà già superate, a risolvere problemi già esauriti, deve conoscere i risultati principali ed i metodi che divennero già carne e sangue della scienza odierna. Ciò non ostante vi sono taluni (e ciò si verifica in qualunque categoria di pensatori) che

---

(1) Spesso i matematici, in età matura, sentirono il bisogno di entrare in contatto col mondo esterno, dedicandosi con fervore all'insegnamento (LAGRANGE), od a questioni relative alla pubblica istruzione (BRIOSCHI, CREMONA, DINI), od assumendo il governo di corporazioni culturali o la direzione di opere scientifiche collettive (F. KLEIN).

(2) L'unica eccezione a me nota è rappresentata da ETTORE CAPORALI, spentosi di propria mano per ragioni a me ignote. Non parlo del CARDANO, il quale, secondo una incontrollabile leggenda, si sarebbe lasciato morire d'inanizione per non smentire l'oroscopo da lui tratto su sè stesso.

(3) Cfr. il mio articolo *Intorno allo stato presente ed alla sorte futura di una bibliografia matematica*, pubblicato nel I fascicolo del «Bollettino di bibl. e storia della scienze matematiche» t. XIV, 1912.

Digitized by Google

rifuggono dalla lettura per tema di vedere in conseguenza minacciata di menomazione la propria originalità. Ora io non mi arresto a discutere l'esistenza di tale pericolo per le personalità di eccezione che possono presentarsi tutt'al più e forse una volta ogni secolo; affermo però che lo studio delle grandi opere del passato è in generale preparazione indispensabile per un fruttifero lavoro matematico. Infatti, gli è soltanto così che il giovane scienziato apprenderà a conoscere le grandi vie aperte, spianate e battute dai pionieri nel campo che intende percorrere e si formerà quello stile (abbracciando sotto questo nome anche quanto concerne l'algoritmo) che oggi si esige venga usato in qualunque lavoro matematico. Nè devesi tacere che buon numero delle scoperte analitiche o geometriche (secondo alcuni anzi tutte) debbono la vita al contatto di teorie che sino allora avevano proceduto separatamente, onde per chi aspira a farne di nuove è prudente conoscere le conquiste già fatte; altre invece consistono in generalizzazioni di verità già acquisite o provengono dalla constatazione che certe argomentazioni sono applicabili in ipotesi più ampie di quelle a cui si attennero coloro che le concepirono; finalmente chi contempla nel suo insieme tutta la letteratura matematica non tarda ad accorgersi come in essa s'incontrino certi tipi costanti di ragionamenti, che tutti gl'investigatori debbono conoscere per servirsene al momento opportuno; ora che cosa, se non lo studio della letteratura classica, rivela l'esistenza e la natura di codesti preziosi ausiliari per la scoperta della verità matematica?

Questa opinione, intorno all'opportunità per il ricercatore di non isolarsi, trova una preziosa conferma nelle note apposte da F. Klein alla testè compiuta ristampa delle sue memorie (1), note che nel loro insieme, malgrado il loro laconismo, costituiscono una preziosa autobiografia scientifica del geniale matematico tedesco. Emerge, infatti, da esse come buon numero delle scoperte che lo resero famoso, ebbe origine da contatti da lui stabiliti con i colleghi che trovò nelle varie Università nelle quali insegnò, o con altri matematici che incontrò durante i frequenti viaggi da lui compiuti in Francia, in Inghilterra, in America; cosicchè si può ben dire che i suoi trasferimenti da una ad altra sede furono veramente provvidenziali per il progresso delle scienze esatte.

7. — Le circostanze in cui avvennero le grandi (ed anche le mediocri) scoperte in tutti i campi in cui turbina l'irrequieto pensiero u-

---

(1) *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (Berlin, Springers, t. I-III, 1920-23). Mi sia lecito riferire la seguente frase assai espressiva: « Für mich ist die lebendige Verbindung mit gleichstrebenden Mathematiker immer die Vorbedingung zu eigenen mathematische Preduktion gewesen » (l. c. t. III, p. 610).

Digitized by Google

mano sono generalmente ignote (1); onde sono veramente preziose alcune dichiarazioni al riguardo fatte da Helmholtz e Poincaré, che ci asteniamo dal riferire perchè già riprodotte in opere che si trovano nelle mani di tutti gli studiosi (2). Emerge da esse che il processo psicologico che guida dall'ignoranza alla verità non si può che raramente ricostruire per intero, chè presenta lacune le quali vennero colmate soltanto ricorrendo a provvidenziali ipotesi, quali quella dell'esistenza subliminale. Giova rilevare che si tratta di un fatto, il quale si riscontra, non solo quando si tratti di ritrovati memorabili, ma assai spesso, cioè anche quando modesti investigatori sono alle prese con qualche nuova questione e che costituisce uno dei più tormentosi enigmi che avvolgono la vita cerebrale. Aggiungiamo che per conto nostro riteniamo prive di solida base le narrazioni di soluzioni ottenute durante il sonno: senza dubbio lo studioso trovavasi allora in uno stato di dormiveglia, durante la quale il suo cervello seguitava a rimuginare le idee che lo avevano dominato durante la giornata.

Qualche luce sul modo in cui vennero create alcune grandi opere si può trarre da una pagina scritta da Lagrange intorno al proprio metodo di vita (3), ove fra l'altro è affermata la necessità di «se donner chaque jour une tâche pour le lendemain. L'esprit est paresseux; il faut prévenir sa lachetè naturelle et le tenir en haleine pour en développer toutes les forces et les avoir prêtes au besoin». Altrettanto può ripetersi riguardo a molti passi del carteggio e degli appunti di Gauss, i quali raccolti e studiati ai dì nostri con intelletto d'amore (4), offrirono preziose informazioni intorno alla mentalità dell'incontentabile matematico, il quale, piuttosto che pubblicare qualche cosa non perfetta nella forma o non esaurita nella sostanza, si lasciò rapire la priorità di importantissimi ritrovati.

Ad accrescere la forza del proprio pensiero alcuni matematici (al pari di pensatori di altre specialità) usarono artifici di vario genere: ci basti ricordare, come assai originale, il sistema usato da B. Riemann di tenere sulle ginocchia un panno inzuppato di acqua gelata onde facilitare l'afflusso del sangue al cervello; gli è forse tale antigienica procedura che condusse il grande matematico ad una morte immatura.

---

(1) Accresce notevolmente la difficoltà di determinare tali circostanze il fatto che per molti scrittori (ARCHIMEDE, LEGRANGE, GAUSS, ecc.) il metodo di esposizione è totalmente differente dal procedimento che guidò alla scoperta.

(2) E. RIGNANO, *Psicologia del ragionamento* (Bologna, Zanichelli), pag 271.

(3) V. l'articolo firmato L. B. M. D. G. dei *Moniteur* del 26 febbraio 1814.

(4) P. STAECKEL, *Gauss als Geometer* (C. F. Gauss Werke, X Bd., II Abth., Göttingen 1923).

Digitized by Google

8. — Fra i cultori delle scienze esatte si possono distinguere gli analitici dai sintetici, gli intuitivi dai logici, i romantici dai classici, gli audaci dai timidi, i visivi dagli auditivi; ma si tratta di distinzioni che si sogliono applicare a tutte le categorie di studiosi (1). In passato ci si atteneva generalmente alla ripartizione di tutto l'esercito dei matematici in due corpi, nettamente distinti, comprendenti l'uno i cultori della scienza del numero, l'altro i cultori della scienza dell'estensione figurata. Ma, avvicinandosi all'epoca moderna, si notarono delle intersecazioni perturbatrici: chè, da un lato si ebbero frequenti esempi di matematici i quali da giovani s'interessarono alla geometria, mentre in età matura consacrarono tutte le loro forze ai fenomeni offerti dal mondo dei numeri. D'altra parte, l'applicazione sempre più estesa dell'algebra alla geometria finì per cancellare la barriera che divideva l'una dall'altra; onde oggi esistono floride regioni che sarebbe difficile assegnare all'uno piuttosto che all'altro dei due regni costituenti la matematica classica (2). Devesi aggiungere che nella nostra scienza la critica esercitò la più salutare e feconda influenza; gli è che si trattava non di un'astiosa critica distruttrice, ma di una procedura sana, serena e profonda che abbatteva gli edifici minaccianti rovina per sostituirli con altri d'indiscutibile solidità. Il fatto più noto atto ad illustrare l'azione benefica della critica intesa in tal modo è offerto dagli studi compiuti nel corso del secolo passato sopra i fondamenti della geometria, studi a cui debbono la vita le nuove geometrie che ora esistono accanto a quelle che portano i nomi di Euclide ed Archimede. Da tali studi emerse in piena luce non esistere in matematica contraddizioni permanenti: ogni volta che una se ne pre-

---

(1) E. RIGNANO, op. cit. pag. 269, 276, 281, 285.

(2) Ho escluso dalle mie considerazioni il sesso gentile per non ripetere quanto scrissi nella mia conferenza: *Donne matematiche*, riprodotta nel presente vol. Aggiungo che se avessi voluto occuparmi anche dei casi patologici non avrei potuto passare sotto silenzio la troppo vasta ed inesauribile classe dei pretesi risolutori di problemi insolubili, i quali presentano due principali caratteristiche, cioè l'ignoranza della scienza del loro tempo e l'invincibile resistenza che oppongono ad ogni tentativo inteso a convincerli dei loro errori A tale classe (nella quale però troviamo eccezionalmente personaggi non spregevoli, come GREGORIO DI S. VINCENZO) fa riscontro quella rispettabilissima costituita dai matematici che, essendo superiori al loro tempo, non furono compresi dai contemporanei, epperò non ne ebbero approvazioni ed elogi: tale PAOLO RUFFINI, il quale non riuscì a fare approvare dall'Istituto di Francia la sua dimostrazione dell'irresolubilità algebrica delle equazioni algebriche letterali di grado superiore a quattro; ed è notevole che, appunto per non accrescere tale rispettabile classe di genî incompresi e per il timore « des Geschrei der Böoter », GAUSS tenne per sè le sue profonde ricerche sulla teoria delle parallele e così, invece del posto di creatore, ha oggi solo quello di precursore.

Digitized by Google

senta, segno è che si trova una verità ignorata al cui apparire scompare il momentaneo dissidio.

2. — Dall'incessante contemplazione delle verità più sublimi che mente umana abbia concepite (perchè, lo disse Pascal, « tout ce qui passe la géométrie nous surpasse ») i matematici acquistano una serenità quasi ascetica, un'elevatezza d'animo che, se anche non sono ad essi esclusive, sono però diffuse fra essi più che in qualunque altra categoria di studiosi (1). I fatti altamente onorevoli ricordati nelle biografie di Pitagora ed Archita, di Euclide e di Archimede costituirono altrettanti esempi, i quali non vennero mai dimenticati e spesso seguìti. Cosicchè, volendo oggi delineare una figura tipica del matematico, si deve presentare una persona schiava del proprio dovere, che dalle profonde elucubrazioni abituali si distoglie solo per salire su una cattedra, dalla quale guida, incoraggia e sprona la gioventù a seguirlo nella via da lui illustrata. Tale modello io ho sempre dinanzi agli occhi ripensando ai miei antichi venerati maestri e sforzandomi di imitarli; possa questo modesto omaggio alla loro memoria, che io rendo con animo riconoscente e commosso, attestare come indimenticabile sia per tutti i loro discepoli l'esempio nobilissimo da essi dato, colla loro vita austera, tutta dedicata alla ricerca e all'insegnamento del vero.

IX.

MATEMATICI NELLA VITA PUBBLICA

Contributi storici alla psicologia dell'uomo di scienza.

Dal Vol. IV (1923) dell'*Archivio di storia della Scienza.*

1. — Nella storia dei Paesi Bassi durante la seconda metà del sec. XVII campeggia, circondata da fulgidissima luce, la figura di Giovanni de Witt, l'austero uomo di stato contro il quale indarno si esercitò l'azione corruttrice di Luigi XIV, che pur gloriavasi di avere espugnate tante virtù.

Nato il 24 Settembre 1625, ricevette un'educazione accuratissima

---

(1) Alcuni episodi, non encomiabili secondo i precetti della morale odierna, che sono attribuiti a LUCA PACIOLI, G. CARDANO e N. TARTAGIA, possono spiegarsi col fatto che il concetto di proprietà intellettuale è di origine moderna. Più difficile è giustificare l'attitudine denigratrice assunta dal B. PASCAL nei confronti di E. TORRICELLI. Taccio di un matematico italiano del secolo scorso e delle sue gesta in Francia.

Digitized by Google

dal padre suo, borgomastro di Dordrecht; iniziò la propria carriera nel mondo come avvocato all'Aja, ma poco dopo, cedendo alle lusinghe della politica, entrò nella vita pubblica e non tardò a divenire uno dei capi del partito repubblicano, che allora era in armi contro la fazione orangista. Chiamato nel 1652 a sostituire in via provvisoria il Grande Pensionario d'Olanda, l'anno seguente (a soli ventotto anni!) fu destinato ad occupare definitivamente tale importante carica governativa ed in essa venne riconfermato ben tre volte.

Lo stato di rovina in cui era allora la sua patria, indusse il de Witt a concludere frettolosamente la pace con l'Inghilterra di Cromwell. Consolidata poi la propria posizione con saggie disposizioni governative, seppe assicurare un'influenza preponderante agli Stati Olandesi sopra gli Stati generali delle Provincie Unite ed accrescere il credito e la considerazione di cui la propria patria godeva nel resto d'Europa. E quando l'Olanda venne violentemente attaccata dall'Inghilterra, seppe organizzare una così valida difesa che, nel 1667, gli fu dato di firmare a Breda una pace onorevole, la quale fu ed è tuttora considerata per un successo personale di Giovanni de Witt. Appunto allora si delineò il pericolo d'un'invasione dei Paesi Bassi da parte della Francia ed egli riuscì a fronteggiarlo mediante una triplice alleanza (trattato di Aquisgrana, 1668) nella quale entrarono l'Inghilterra e la Svezia; la costituzione di questa lega contrassegna l'apogeo della potenza e della gloria del sommo cittadino olandese. In quel momento non vi era alcuno che non s'inchinasse dinnanzi alla sua saggezza ed al nobile esempio di semplicità nella vita che egli dava ai propri connazionali presenti e futuri. Se non che, i preparativi di Luigi XIV contro la vicina repubblica facendosi sempre più minacciosi ed allarmanti, gli Olandesi, mal consigliati, decisero di abbandonare le oculate direttive politiche adottate dal Grande Pensionario e di ripristinare lo stadholderato in favore di Guglielmo d'Orange. Allora l'odio degli Orangisti contro la famiglia de Witt si scatenò senza limiti e freni. Il prode Cornelio, fratello di Giovanni, venne incarcerato sotto un'ingiusta accusa e, mentre egli riceveva la visita dello spodestato capo del governo (era il 20 Agosto 1672), fu tratto insieme a questo sulla pubblica via da una folla assetata di sangue, che entrambi assassinò, facendo scempio dei loro corpi.

2. — I disgustosi particolari di questa scena selvaggia non si possono leggere senza ribrezzo ed orrore. Se essa da un lato rievoca l'ombra di un'altra vittima innocente della bieca furia popolare — Ipazia d'Alessandria — porta d'altronde ad istituire un paragone fra Giovanni de Witt ed uno degli ultimi (ultimi in ordine di tempo) discepoli di Pitagora, Archita di Taranto; fra l'eminente statista olandese e colui che viene

Digitized by Google

dipinto siccome l'ideale dell'uomo ellènico. Chè questi, generale abilissimo, non subì mai l'onta di una disfatta; filosofo insigne, ha l'invidiabile gloria di avere annoverato Platone fra i propri discepoli; acuto e fortunato investigatore del vero nel campo geometrico, seppe attrarre su di sè l'attenzione di Orazio (*Ode* XXVIII del I Libro) che ne pianse la morte avvenuta nel corso di un naufragio e ne celebrò il valore. Ora il parallelo fra l'innocente vittima della furibonda plebaglia olandese e colui che rappresenta degnamente Taranto nella storia del pensiero scientifico, si offre tanto più spontaneo giacchè, se Archita abbracciò, svolse ed illustrò con esemplare fervore ed indiscutibile successo le dottrine professate dall'immortale filosofo di Samo, Giovanni de Witt ha un posto onorevole nei fasti delle matematiche, come uno dei primi che studiarono, compresero ed abbracciarono le teorie esposte da Descartes nella sua immortale *Géométrie* (1), ragione per cui alle edizioni latine di questa fondamentale produzione scientifica si trovano costantemente allegati gli *Elementa linearum curvarum* del Gran Pensionario d'Olanda e non vi è matematico che non ne conosca il nome e non ne apprezzi il valore.

3. — Gli esempi offerti a tanti secoli di distanza dal geometra greco a cui devesi la più originale soluzione a noi nota del celebre problema della duplicazione del cubo (2) e di colui che, con sguardo lungimirante, abbracciò tutta la fecondità del connubio consacrato da Descartes fra la geometria e l'algebra, porgono dati di fondamentale importanza per decidere se l'attitudine alla ricerca matematica sbarri la strada ad altre carriere aventi contatti diretti con la vita pratica o se, all'opposto, l'applicazione costante di una logica inflessibile — l'arma più potente in uso nelle scienze esatte — non prepari, meglio di qualunque altra disciplina, alla lucida visione degli avvenimenti, alla serena e profonda valutazione di tutti gli elementi di un fatto, alla rapida e sicura deliberazione, doti queste indispensabili ad un uomo di stato degno di tal nome.

D'altronde non sono essi gli unici fatti che può fornire la storia, a chi s'interessa alla psicologia dei matematici; giacchè se al giorno d'oggi la tendenza alla specializzazione — anzi l'ineluttabile necessità di essa — prodotta dall'enorme sviluppo assunto da ogni ramo dello scibile, costringendo coloro che si consacrano alle scienze esatte a proibirsi ogni scorreria in

(1) Per lo scopo nostro giova rilevare che dalla scienza pura egli non si è mai allontanato del tutto; infatti, in data 22 maggio 1659, CHR. HUYGENS scriveva a CARCAVY: « Il (de WITT) est bien savant en la Géométrie et s'y exerce toutjours non obstant les grands affaires qu'il a sur les bras (*Oeuvres complètes de Christiann Huygens*, T. II, La Haye, 1889, p. 411).

(2) V. p. e. *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (II ed., Milano, 1914) p. 99.

Digitized by Google

altre provincie, in passato ciò non era necessario, epperò non accadeva.

Si ricordi, infatti, come Pietro Fermat (1608-1665) — il creatore dell'odierna teoria dei numeri, colui che divide con Descartes la gloria di avere dato la vita alla geometria analitica e che Lagrange considerava come l'effettivo fondatore dell'analisi infinitesimale, — essendo stato dalla sua famiglia destinato alla magistratura, fu successivamente « commissaire aux requêtes » (1631), « conseiller de la chambre des enquêtes » (1634) e da ultimo (1638) membro della « chambre de l'édit »; nella magistratura rimase sino alla morte (12 Gennaio 1665), chè due giorni prima di morire aveva « rapporté un procès » e la considerevole pausa (1641-1654) che si è avvertita nella sua produzione scientifica non si spiega se non con la considerazione che i pesanti doveri imposti ad un giudice coscienzioso, mal si conciliano con una continuata contemplazione delle qualità più riposte dei numeri e delle figure.

4. — Si direbbe che Fermat, nel foggiarsi un'esistenza bifronte, seguisse l'esempio datogli da un suo celebre conterraneo, che di poco lo precedette: parliamo di Francesco Viète (1540-1603). Questi, che ha un posto eminente negli annali della matematica, come colui che contrassegna il trapasso dall'Italia alla Francia dello scettro algebrico, cominciò a guadagnarsi la vita facendo l'avvocato. Ma nel 1567 lasciò la professione libera avendo ottenuta la carica di consigliere al Parlamento di Bretagna; poco dopo si trasferì a Parigi, essendogli stato conferito il posto di « maître de requêtes de l'hôtel de Paris ». Caduto in disgrazia, fu allontanato dalla corte durante gli anni del regno del III Enrico, ma ritornò a Parigi col IV, il quale lo fece entrare nel proprio consiglio privato. Però, l'esercizio di questi svariati e gravosi uffici non gli fece trascurare la matematica, che aveva carissima sino dalla più tenera età; ed infatti vi si dedicava con intensità talmente straordinaria che (se si presta fede a quanto lasciò scritto un suo amico) lo si vide durare al lavoro per tre giorni e tre notti di seguito, senza interromperlo se non per prendere l'alimento strettamente necessario. All'epoca delle guerre della Lega fu incaricato di spiegare alcuni dispacci in cifra, vergati dagli Spagnoli e di cui i Francesi erano arrivati ad impadronirsi. Superando gravissime difficoltà Viète riuscì ad indovinarne la « chiave » e siffatto inaudito successo produsse nel nemico tale e tanta meraviglia, che gli Spagnoli mosser lamento al Papa perchè i Francesi li combattevano con un'arma (la stregoneria) contraria alla fede cattolica; l'acuto matematico venne in conseguenza citato dinnanzi al Sacro Collegio, come negromante e mago; sembra però che l'azione giudiziaria non abbia avuto un seguito increscioso, chè egli finì tranquillamente la vita a Parigi (12 Dicembre 1603), avendo raggiunta la rispettabile età di sessantatrè anni.

Digitized by Google

5. — Quest'ultima faccia dell'attività mentale di Viète ci porta ad osservare come i matematici abbiano dato prova in molte occasioni di possedere una spiccata attitudine a scoprire il senso delle scritture segrete. Lo prova — oltre a quanto asseriscono vagamente i biografi di Girolamo Cardano (1501-1576) e Giambattista Porta (1538-1615) — l'esempio offerto da una personalità eminente fiorita in Inghilterra al tempo di Newton, Giovanni Wallis (1616-1703). Egli, compiuti che ebbe gli studi universitari, fu scelto da Lady Vere come proprio cappellano; mentre viveva sotto il tetto ospitale di quella nobildonna riuscì, con due sole ore di lavoro, a decifrare un dispaccio relativo alla cattura di Chichester; da tale fatto fu stabilita per sempre la sua fama di criptologo abilissimo. Il Governo inglese ricorse a lui, e non invano, in molte occasioni, sicchè egli potè prestare alla propria patria preziosi servigi, di cui il Governo stesso seppe forse valutare la portata, ma non credette di compensare in misura adeguata, come risulta da frammenti di recente pubblicati del carteggio dell'egregio matematico. Ciò non ostante il Wallis non venne mai meno ai doveri imposti dal più schietto lealismo, come sta a provare il rifiuto da lui costantemente opposto alle insistenti richieste che ricevette da Leibniz, per avere comunicazioni dei metodi di scoperta di cui egli si serviva (1).

6. — Un osservatore superficiale può essere tentato di sentenziare che non deve recare meraviglia alcuna se i matematici siansi distinti nello spiegare scritture in cifra, dal momento che trattasi di una questione somigliante a quelle che essi ogni giorno sono chiamati a risolvere (2). « Somigliante » senza dubbio; ma che sia ben lungi dall'essere « identica » si vede notando che di regola la spiegazione di un enigma di detta

---

(1) D. E. SMITH, *John Wallis as a cryptographer* (Bull. of the Amer. math. Society, Nov. 1917).

(2) Non è fuor di luogo notare qui come poco o nulla si conosca intorno agli artifici usati da coloro che confezionarono i criptogrammi spiegati da VIÈTE, WALLIS e loro contemporanei; appartenevano essi alla specie di quelli di cui servivasi G. MAZZINI nel comunicare ai propri accoliti le più gelose istruzioni, oppure a quelli enumerati ed illustrati da W. W. ROUSE BALL nel Cap. XIV del suo bel libro *Mathematical Recreations and Problems* (X ed. London 1922)? Ciò che si può asserire con sicurezza è che essi non erano foggiati con il procedimento comunemente usato dagli scienziati del Sec. XVII *per prendere data* delle loro scoperte, chè i risultanti criptogrammi sono assolutamente indecifrabili; essi, infatti, nascevano indicando quante lettere di ogni specie si trovassero in una frase, del resto abbastanza sibillina. Uno di essi s'incontra nella storia dell'invenzione del calcolo infinitesimale (v. ad es. la mia *Storia delle matematiche*, T. II, Torino 1931, p. 566) e molti altri nei carteggi scientifici di HUYGENS (*Oeuvres complètes* Voll. VI-X nei passi segnalati dall'Indice per materie) e di GALILEO.

Digitized by Google

specie riposa sopra una felice ispirazione che guida ad identificare una parola misteriosa ad altra di significato conosciuto. È quell'intuito più che umano il quale guidò Champollion a dedurre il completo alfabeto in geroglifici dall'esame approfondito di una celebre inscrizione trilingue scoperta a Damietta. Per converso è la mancanza totale di quella dote tanto preziosa e rara che condusse al patibolo il Cavaliere di Rohan. Narrano, infatti, i cronisti del tempo che, tradotto questo gentiluomo alla Bastiglia sotto l'imputazione di alto tradimento, non si tardò a riconoscere come nessun fatto fornisse una prova contro di lui; l'unico pericolo sovrastante consisteva in quanto avrebbe potuto rivelare l'altro detenuto, Monsieur Latruamont, e gli amici del Cavaliere si erano impegnati di fargli conoscere, appena possibile, la deposizione di costui. Ed infatti, fedeli a tale impegno, gl'inviarono sopra una striscia di carta il seguente criptogramma: « Mg dulhxcclgu ghj yxuj im ct ulge plj »; ora, se egli avesse compreso che la seconda parola significa *prisonnier*, con tutta facilità ne avrebbe dedotto che il senso del provvidenziale messaggio era: « le prisonnier est mort il n'a rien dit »; non essendovi riuscito, finì col confessare la propria colpa e venne decapitato addì 27 Novembre 1674.

7. — In nessun periodo storico la partecipazione dei matematici alla vita pubblica fu più intensa che durante la rivoluzione francese; si direbbe che i cultori delle scienze esatte vissuti in quel tempo abbiano ricevuta la parola d'ordine da d'Alembert e Diderot, i quali, pubblicando la celebre *Enciclopedia*, educarono gli spiriti al libero esame in tutti i campi e spronarono alla pugna anche gli scienziati amanti del quieto vivere; più d'uno pagò con la vita il fallo — se fallo può dirsi — di avere, sia pure momentaneamente, preferita la patria alla scienza pura.

Di tale nobile schiera di martiri fa parte J. S. Bailly (1736-1793), celebre nel mondo scientifico come teorico e storico dell'astronomia e notissimo ai profani del tempo suo per avere scoperti e denunciati i trucchi che si annidavano nelle famigerate esperienze con cui Mesmer trascinava all'entusiasmo l'infrollita nobiltà parigina del tempo di Luigi XVI. L'amicizia con Beniamino Franklin lo indusse a scendere dal cielo alla terra, per dedicarsi alla carriera politica. Deputato di Parigi sino dal Maggio 1789, divenne ben presto presidente dell'Assemblea legislativa e ne diresse i lavori durante sedute storiche burrascosissime; chiamato poco dopo ad occupare la grave e pericolosa carica di sindaco di Parigi, fu tenuto responsabile del doloroso eccidio che tramandò ai posteri, macchiata di sangue, la giornata del 17 Luglio 1791. Appunto in memoria di tale fatto, due anni più tardi, benchè si fosse ormai ritirato a vita privata, venne citato dinanzi al tribunale rivoluzionario, il quale lo inviò alla ghigliottina il 12 Novembre 1793.

Digitized by Google

Altrettanto tragica fu la sorte del « ci devant marquis » Caritat de Condorcet (1743-1794). A soli ventidue anni egli erasi fatto conoscere come promettente analista mediante un *Essai sur le calcul intégral* e aveva poi dati alla luce altri pregevoli lavori scientifici che lo mostrarono ben degno di prendere, nella matematica francese, il posto di d'Alembert che si avviava alla tomba. Le ardenti discussioni politico-finanziarie del tempo gli fecero volgere il pensiero ai problemi dalla cui soluzione dipende il benessere degli stati, e della sua fiducia nella possibilità di applicarvi il calcolo è testimonianza il suo *Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix.* Eletto dai Parigini deputato alla prima Assemblea legislativa, prese parte attivissima alle discussioni intese a conferire alla Francia un assetto politico ed amministrativo conforme ad equità e giustizia. La provincia lo inviò più tardi alla Convenzione nazionale e, sedendo fra i giudici di Luigi Capeto, votò contro la condanna a morte. Dai « sans-culottes » del tempo tale attitudine fu interpretata come sintomo di tiepido civismo, donde la ragione per cui (3 ottobre 1791) venne incluso fra i quarantun Girondini chiamati a discolparsi dinnanzi al tribunale rivoluzionario. Sfuggito con la fuga all'arresto, venne dichiarato fuori della legge e le sue sostanze furono confiscate; scoperto, fu arrestato ed egli si sottrasse all'onta del patibolo ingojando un veleno che portava prudentemente con sè (29 Marzo 1794). Poco dopo la Convenzione nazionale pentita, quasi per fare pubblica ammenda del crimine commesso orbando la Francia di uno dei suoi migliori cittadini, decise di sottoscrivere per tremila copie all'edizione del suo *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain,* da lui scritto mentre, nascosto in casa amica, sforzavasi di sottrarsi al minacciato supplizio, e deliberava di distribuirle « dans toute l'étendue de la République de la manière la plus utile à l'instruction ». Tardivo omaggio e sterile pentimento!

8. — Meno crudele fu la sorte verso altri due sommi matematici francesi vissuti nel medesimo agitatissimo periodo.

L'uno, Gaspare Monge (1746-1818), il creatore di due nuove diramazioni della matematica (la geometria infinitesimale e la geometria descrittiva), nato da parenti in condizioni sociale ed economica umilissime, memore delle gravissime difficoltà per aprirsi una strada nel mondo da lui incontrate in un'epoca nella quale i gradi militari erano il monopolio di coloro che vantavano una nobile prosapia, abbracciò, con l'entusiasmo di cui è capace un carattere ardente, i principi dell'89 e conquistò ben presto una posizione così eminente fra coloro che si sforzavano d'incanalare il travolgente torrente che scaturiva dai cenacoli politici parigini, da ottenere, senza averlo chiesto, il dicastero della Marina nel Ministero

Digitized by Google

Roland. Benchè, per effetto del vertiginoso avvicendarsi dei partiti, egli abbia detenuto il potere soltanto per pochi mesi (Agosto 1792-Aprile 1793), pure l'apprezzatissimo contributo da lui prestato poco dopo alla determinazione di problemi pratici per fabbricare polveri da cannone (problema di primo piano nel momento in cui gli alleati si affollavano alle frontiere della Francia), l'essere stato prescelto dal generale Bonaparte come proprio compagno nella spedizione d'Egitto, la carica di senatore dell'impero ed il titolo di conte di Pélouse conferitogli dal I Napoleone, sono altrettante prove della pubblica estimazione che egli seppe conservarsi durante uno dei periodi politici più agitati che ricordi la storia. L'imbelle Luigi XVIII, cacciando brutalmente Monge dall'Istituto di Francia, in nulla diminuì la venerazione di cui egli era circondato, chè dall'Oceano al Reno egli fu sempre riguardato come una personalità di cui la Francia andava giustamente orgogliosa; macchiò, invece, sè stesso con un atto ingiustificato e partigiano, che sembrò allora ed appare tuttora come un'arma scoppiata nelle mani di chi volle incautamente servirsene.

Non molto dissimili furono le vicissitudini di Lazzaro Carnot (1753-1823), discepolo di Monge ed al pari del maestro considerato come uno di coloro a cui devesi la rinàscita della geometria pura, verificatasi all'alba del sec. XIX. Uscito dalla celebre Scuola militare di Mézières, non tardò a farsi conoscere come personalità di primo ordine, tanto da letterati quanto da scienziati. Avvertendo l'approssimarsi dell'uragano che nel 1789 si scatenò sulla sua patria, volse la sua attenzione e dedicò il meglio delle proprie energie intellettuali alle più vitali questioni che si dibattevano, con inaudito e forse mai superato fervore, in quell'epoca così decisiva per l'avvenire del genere umano. Scelto dal dipartimento del Pas-du-Calais come deputato, prima all'Assemblea legislativa e poi alla Convenzione nazionale, prese parte attivissima alle discussioni concernenti l'ordinamento militare della Francia e, sedendo come giudice nel processo contro l'ex re, votò per la morte. Chiamato ad uffici direttivi durante le epiche lotte che dovette sostenere la neonata repubblica, diede prova di tanta energia e di tale genio amministrativo e militare da essere proclamato «organizzatore» delle vittorie che portarono il pallido côrso ai fastigi del potere. Divenuto successivamente ispettore generale dell'esercito e ministro della guerra, cedette il potere di fronte all'invadenza napoleonica e fece ritorno ai suoi studi caramente diletti; così potè produrre opere matematiche di valore permanente, quali la *Géométrie de position* e le *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.* Patriotta ardente e costante ammiratore di Napoleone, dopo i rovesci militari subiti dalla sua patria nel 1814, chiese ed ottenne di venire richiamato in

Digitized by Google

servizio attivo e durante i Cento giorni rivestì la carica di ministro dell'interno. Tale attitudine francamente bonapartista lo fece incorrere nell'odio dei Borboni, che, non appena riconquistato il potere, lo espulsero dall'Istituto di Francia, di cui era uno dei più fulgidi ornamenti, e lo cacciarono in bando; ed in esilio egli morì (2 Agosto 1823) circondato sempre dall'ammirazione di coloro che, all'infuori di qualsia considerazione partigiana, sanno inchinarsi al vero merito.

8. — Mentre Lagrange (1736-1813), grazie alla sua condizione di straniero in Francia, durante la raffica rivoluzionaria, potè condurre un'esistenza relativamente tranquilla nella grande metropoli ove era stato chiamato dall'illuminata benevolenza di Luigi XVI, Laplace (1749-1827) venne strappato dalle fruttifere peregrinazioni che egli andava facendo nell'ambito sconfinato dei cieli, da Napoleone, il quale, dopo il 18 Brumajo, lo creò ministro dell'interno. Ma di tale scelta, non sufficientemente ponderata, ebbe ben presto a pentirsi perchè — come più tardi ebbe a dichiarare — egli trovò nel grande astronomo «un administrateur plus que médiocre», il quale «cherchait des subtilités partout et portait aux affaires l'esprit des infiniment petits».

Non si affretti il maligno lettore a trarre da tale insuccesso conclusioni generali sull'inettitudine congenita nei matematici a disimpegnare lodevolmente mansioni amministrative; chè, a mostrare affrettata, epperò destituita di solida base un'affermazione siffatta, sta l'esempio di un grande contemporaneo e conterraneo di Laplace, Giuseppe Fourier (1768-1830), uno dei fondatori dell'odierna fisica matematica. Sfuggito, per ben due volte, miracolosamente ad una citazione dinnanzi ai tremendi tribunali del tempo, in un'epoca nella quale imputazione equivaleva di regola a condanna a morte, riuscì a farsi notare favorevolmente da Napoleone, che lo volle seco quando deliberò la spedizione d'Egitto. Creato che fu l'Istituto scientifico-letterario del Cairo, sul modello dell'Istituto di Francia, Fourier ne fu eletto segretario perpetuo e ne fu in realtà il genio animatore e governatore. La buona prova da lui fatta nel disimpegnare detto ufficio, indusse il Governo francese ad affidargli delicatissimi incarichi di carattere politico; avendoli adempiuti in modo superiore ad ogni elogio, fu nominato prefetto del dipartimento dell'Isère; ed ivi, mentre promosse con saggie disposizioni la prosperità della regione affidata alle sue cure, trovò tempo e agio per scrivere la *Théorie analytique de la chaleur* ed altri importanti lavori di analisi pura ed applicata che sono destinati a tramandare il suo nome, circonfuso di gloria, alle più lontane generazioni. Meno pregevole fu la sua condotta durante il fortunoso periodo 1814-15, nel quale egli oscillò fra il Bonaparte ed i Borboni, scontentando, naturalmente, tanto il governo che tramon-

Digitized by Google

tava, quanto quello che sorse l'indomani di Waterloo. Tuttavia, grazie alla protezione di un amico, potè ottenere, dopo la Restaurazione, l'ufficio di direttore dell'ufficio centrale di Statistica; conservò anche il posto che occupava nell'Istituto di Francia, anzi divenne segretario perpetuo dell'Accademia delle scienze; così a lui fu concesso di finire la propria vita tranquillamente in patria (16 Maggio 1830).

L'appunto di convinzioni politiche soverchiamente labili ed oscillanti, che fu giustamente rivolto a Fourier, può trovare qualche attenuante tenendo presente lo stato convulsionario in cui visse le nostra sorella latina nel corso degli anni che corrono dallo scoppio della rivoluzione alla costituzione del secondo impero e ricordando quanto assillante per un uomo di scienza sia la necessità di assicurare a sè stesso la pace e la tranquillità d'animo che sono *conditio sine qua non* per una fruttifera elucubrazione scientifica. Tale scusante va anche ricordata quando si percorre la biografia di un altro matematico francese del medesimo periodo, a cui si devono alcune proposizioni fondamentali della teoria delle superficie. Il lettore ha probabilmente già inteso che alludiamo a Carlo Dupin (uno dei famosi *trois Dupin*) il quale inaugurò la propria carriera politica tessendo una brillante difesa di Monge e Carnot, in un momento in cui era pericoloso manifestare convinzioni intinte di repubblicanismo, ma poi accettò da Carlo X il titolo di barone, fu deputato e per qualche giorno ministro della marina. La sua scandalosa adesione al Governo impersonato in Napoleone *il piccolo*, gli valse il laticlavio, ma fece scemare notevolmente l'estimazione di cui godeva in patria; visse quasi novant'anni (6 ottobre 1784-18 Gennajo 1873), abbastanza a lungo per vedere Parigi sotto la terza Repubblica, ma lontano da ogni sorta di pubblici uffici.

9. — Mentre il turbine rivoluzionario del 1789 travolse ed impresse un solco indelebile nell'esistenza dei grandi pensatori che abbiamo testè nominati, i moti di rivolta che scossero tutta l'Europa nel leggendario anno 1848 perturbarono, almeno momentaneamente. il corso della vita di un sommo analista tedesco: Jacobi. Sino a quel momento, vuoi per l'intransigenza di una disciplina, quale è la matematica, la quale esige una dedizione quasi ascetica da parte dei propri cultori, vuoi per le condizioni di una salute che lasciava molto a desiderare, egli, a Königsberg come a Berlino, ove successivamente insegnò, erasi tenuto in disparte dalla vita politica attiva (tanto che egli soleva dire di sè stesso di essere una «politische Jungfrau»). Ma in quel periodo agitato in cui ardevano ovunque fiamme rinnovatrici, del tenersi in disparte era fatta colpa a chi occupava una posizione così elevata come quella di professore universitario. Conscio di siffatta condizione di cose, Jacobi s'inscrisse nel

Digitized by Google

Club costituzionale sorto a Berlino nel 1848, e partecipò a qualche seduta di esso, anche dietro suggerimento del proprio medico, che faceva assegnamento sui buoni risultati di un'azione stimolatrice sopra i nervi dell'illustre paziente. E nell'adunanza del 26 Aprile di quell'anno, il celebre matematico pronunciò una mirabile orazione politica, che, per l'assennatezza delle vedute, l'eloquenza e la dottrina produsse un'immensa impressione sull'assemblea; Jacobi, anche in tale occasione rappresentò in modo veramente degno la scienza a cui aveva consacrata la vita! Se non che, quando si trovò il suo nome fra i diciotto candidati proposti per le imminenti elezioni politiche, l'ammirazione cedette il posto ad un'opposizione implacabile quanto ingiustificata, a conferma della massima *invidia virtutis comes*. In conseguenza di ciò le successive sedute del Club costituzionale furono insolitamente affollate ed agitate, come non mai prima o dopo si vide; tutti gli atti della vita di Jacobi vennero allora malignamente analizzati e fu fatto a lui grave addebito della sua indifferenza verso la politica militante, procedura questa tanto più meravigliosa in quanto non era stata prima nè venne applicata poi ad alcun altro candidato. A tutti i velenosissimi suoi critici rispose vittoriosamente Jacobi, dando prova di ammirande qualità di lottatore e mostrando nella pubblica discussione una disinvoltura non comune negli uomini di scienza, con l'usare alternativamente la più fine ironia e la logica più stringente. Risultato di tale strenua difesa fu che il nome dell'eminente professore dell'Università di Berlino fu mantenuto nell'elenco dei candidati alla deputazione politica, presentato dal Club costituzionale. E' però da ritenersi che l'influenza di questo fosse limitata, giacchè a Jacobi non toccò allora nè poi un posto nella Camera elettiva prussiana. Perciò questo episodio (1) non rappresenta che un fugace intermezzo nella tranquilla esistenza di Jacobi, dal quale però emerge che, oltre di non comune genio matematico e di una spiccata attitudine per la filologia classica, egli disponeva, sia pure allo stato latente, di eminenti qualità parlamentari, le quali, forse per la sua immatura fine, rimasero celate alla moltitudine e sterili per la sua patria e la società.

10. — I fatti sin qui rapidamente esposti non sono per fermo gli unici avvenimenti politici nei quali ebbe parte qualche cultore delle scienze esatte; basta a provarlo il fatto che nomi di matematici s'incontrano percorrendo la storia parlamentare dei paesi governati con sistemi rappresentativi, cominciando dall'epoca in cui Newton sedette alla Camera dei

(1) Esso è narrato con esauriente documentazione nella memoria di W. AHRENS intitolata *Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobis* (Bibliotheca mathematica, T. III, T. VII, 1907).

Digitized by Google

Comuni, sino ai nostri giorni, in cui si vide un illustre analista francese — il Painlevé — alla testa del Governo francese, in un momento estremamente grave. Ma, se non c'inganniamo, essi sono per avventura i più significanti fra quelli registrati dalla storia (1).

Se coloro i quali pensano essere le generalizzazioni affrettate il massimo flagello per la scienza, possono essere titubanti a trarre dalle circostanze esposte la conclusione che i matematici posseggono di regola le doti necessarie per far da nocchieri alla nave dello stato, esse sembrano però più che sufficienti ad escludere che l'attitudine alla matematica renda inetti a partecipare utilmente alla vita pubblica. Per conseguenza impongono il dovere — specialmente in un'epoca, quale è la presente, in cui la vastità ed importanza dei problemi politici mostransi superiori alla capacità di molti fra coloro che sono chiamati a risolverli — di bandire vieti ed ingiustificati pregiudizi (2), epperò di non escludere *a priori* coloro i quali dedicano la vita alla più astratta delle scienze, dall'eletta schiera di cittadini a cui affidare, anche in momenti difficili, il governo della pubblica cosa.

---

(1) Avremmo dovuto dar posto anche a LEIBNIZ in questa nostra rassegna? La cosa è dubbia giacchè il sommo filosofo non ebbe mai alcuna carica di carattere politico; ma, come bibliotecario e consigliere dei duchi di Brunswick, fu ritenuto autore dei maneggi che portarono un membro di questa casa sul trono d'Inghilterra; secondo M. CANTOR (v. l'articolo *Sir Isaac Newton* inserito nei fascicoli di Gennajo e Febbrajo 1881 della rivista *Nord und Süd*) in ciò devesi ricercare la causa dell'accanimento con cui in Inghilterra fu combattuta la famosa questione di priorità relativa all'invenzione del calcolo infinitesimale. Non si stupisca poi il lettore di non trovare in queste pagine il nome del GALOIS; egli partecipò bensì al movimento che portò gli ORLÉANS sul trono di Francia, ma il duello in cui perdette miseramente la vita ebbe motivi del tutto estranei alla politica.

(2) Riguardo ai matematici essi rispecchiansi in un detto abbastanza volgare, che non è il caso di trascrivere quì.

Digitized by Google

Digitized by Google

BIOGRAFIE

Digitized by Google

Digitized by Google

X.

L'OPERA SCIENTIFICA DI ETTORE CAPORALI

Dal *Giornale di matematiche*. T. XXVII, 1889.

Quando, or son due anni, la morte improvvisa di ETTORE CAPORALI (1) gettò nel lutto tutti i cultori degli studi geometrici, un gruppo di colleghi, di amici, di ammiratori, a ricordare nel modo più duraturo l'egregio geometra estinto, si propose di raccogliere in un volume gli scritti che egli aveva dato alle stampe e quelli inediti che si giudicassero sufficientemente perfetti per poter vedere la luce. Da pochi mesi questo volume è stato pubblicato (2), e colla scorta di esso ci proponiamo di determinare, con quell'esattezza che le nostre forze consentono, il posto che il valoroso scienziato occupa nella storia della geometria moderna.

Ci servimmo anche dei manoscritti inediti che si conservano negli Archivi dell'Accademia di Napoli (3), grazie ai quali potemmo arricchire questo modesto nostro studio di notizie che confidiamo siano per essere giudicate non prive di interesse.

I lavori del CAPORALI trattano tutti questioni che appartengono alla maggior parte delle diramazioni della Geometria proiettiva, e si possono distribuire in parecchi gruppi comprendenti rispettivamente: le curve di 3^0 ordine, quelle di 4^0, quelle di n^{mo}, le superficie di 3^0 ordine, le trasformazioni piane univoche, la rappresentazione delle superficie su un piano la geometria della retta, la teoria delle configurazioni, la geometria a quattro dimensioni, lo studio delle varietà comunque estese, infine l'applicazione geometrica della dottrina delle forme algebriche.

(1) Nacque a Perugia il 17 Agosto 1855; morì di propria mano il 2 Luglio 1886 [1935].

(2) *Memorie di Geometria di* ETTORE CAPORALI, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Napoli (Napoli, B. Pellerano, 1888).

Volendo aver completa la raccolta delle pubblicazioni matematiche del CAPORALI bisogna anche tener conto delle *Soluzioni di questioni* che inviò al *Giornale di matematiche* quando egli era studente a Roma.

(3) Essi furono posti a nostra disposizione con una liberalità di cui rendiamo pubblici e vivi ringraziamenti ai Ch.mi Prof.ri BATTAGLINI e PADELLETTI.

Digitized by Google

Di ciascuno dei citati lavori diremo brevemente il contenuto, accennando agli scritti a noi noti che immediatamente li precedettero e quelli che ad essi servirono di continuazione; ci lusinghiamo di raggiungere in tal modo il fine che ci siamo prefissi.

I. *Curve piane algebriche.* — **1.** Nella teoria delle curve algebriche si possono considerare alcuni gruppi di punti analoghi o alle coppie o alle terne di punti coniugati rispetto a una conica; dei primi si occupò il BATTAGLINI nella memoria *Sulle forme ternarie di grado qualunque* (Atti della R. Accademia di Napoli, T. IV, 1868), dei secondi il REYE nella memoria *Trägheits-und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen* (Journal f. r. u. a. Math., T. LXXII, 1870). Per le curve di 3^0 ordine questi gruppi godono di proprietà suscettibili di enunciato elegante; in questo caso tre punti si dicono coniugati se uno qualunque di essi sta sulla polare mista degli altri due, quattro punti si diranno pure coniugati se tali sono tre qualunque. I *Teoremi sulle curve del terzo ordine* pubblicati dal CAPORALI nel Vol. I, Serie 3., 1877, dei Transunti della R. Accademia dei Lincei (v. Memorie di Geometria p. 46-52) concernono questi sistemi di punti. Le proprietà enunciate dal CAPORALI possono venir estese a curve d'ordine qualunque; ma questa estensione, che egli aveva promessa, fu fatta, in parte, solo molto tempo dopo dal DE PAOLIS nella memoria *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* (Mem. della R. Accademia dei Lincei, Serie IV; T. 3., 1886) (1).

2. L'argomento trattato nella nota di cui parlammo nel n. precedente continuò ad occupare a varie riprese il CAPORALI; egli espose i nuovi risultati a cui pervenne in un Corso di lezioni sulle curve di 3^0 ordine, tenuto nel 1883-84 all'Università di Napoli. Il Prof. ULDERIGO MASONI che ebbe la ventura di frequentarlo, riunì quei risultati in alcuni enunciati da inserirsi fra quelli della nota citata o da aggiungere ad essi. Approfittando dal permesso che egli ci ha gentilmente accordato (e di cui gli renderanno grazie i lettori, come noi ora facciamo), li riportiamo indicando il posto che ad essi spetta:

Al § 1 *si aggiungano i seguenti teoremi*:

a) Vi possono essere triangoli coniugati degenerati; così, sono tali quelli formati: 1° da un punto qualunque considerato come la riunione di due ed un punto della sua retta polare pura; 2° da due punti qualunque A e B e dal punto d'intersezione di AB con la polare mista di A e B.

---

(1) Cfr. anche la memoria dello SCHLESINGER che fa parte del T. XXX dei *Mathem. Annalen.*

Digitized by Google

b) Sopra ogni retta del piano vi è un numero doppiamente infinito di terne coniugate, le quali formano una involuzione doppia.

c) Sopra ogni retta del piano vi è una coppia di punti che con qualunque altro punto della retta forma una terna coniugata. Questi due punti sono rappresentati dalla coppia Hessiana della terna costituita dai tre punti d'intersezione della retta colla cubica.

d) Vi sono infinite coppie di punti le quali formano un triangolo coniugato con qualunque punto del piano; queste coppie sono sulla Hessiana della cubica.

e) Tre punti in linea retta sulla Hessiana formano una terna coniugata.

In fine della nota si aggiunga il presente § 6.

25. Un trilatero si dirà coniugato alla cubica quando uno dei suoi lati tocca la poloconica mista degli altri due. Se questa proprietà ha luogo per un lato avrà luogo anche per gli altri due. Per un trilatero l'essere coniugato equivale ad una condizione.

26. I lati di un trilatero coniugato non sono altro che le polari miste delle coppie di vertici di un triangolo coniugato. Questo triangolo è costituito dai punti di contatto dei lati del trilatero con le poloconiche miste.

27. I quattro trilateri contenuti in un quadrilatero inscritto nella Hessiana, sono coniugati.

28. I trilateri diagonali dei quadrangoli circoscritti alla Cayleyana, sono coniugati.

29. Si può fare un quadrilatero tale che i suoi quattro triangoli siano coniugati: questi quadrilateri sono in numero quattro volte infinito ed i loro triangoli diagonali sono coniugati. Essi sono i quadrilateri associati (v. Memorie p. 266) ai quadrangoli coniugati.

30. In un quadrangolo coniugato le terne di lati concorrenti nei vertici sono coniugate.

3. Scopo della nota *Teoremi sui fasci di curve del terzo ordine* (pubblicata nello stesso volume della precedente: v. Memorie p. 52-53) è l'esposizione di proprietà di alcuni luoghi covarianti a un fascio di cubiche e in ispecie all'inviluppo delle Hessiane di queste. Sarebbe prezzo dell'opera ricercare le proprietà analoghe per le curve piane di ordine superiore e per le superficie, ricerca che non crediamo sia stata ancor fatta.

4. Chiamiamo 1, 2, 3, 4 i vertici; A_1, A_2, A_3 i punti diagonali di un quadrangolo completo, r una retta del suo piano. Fra i punti della retta e le coniche circoscritte al quadrangolo si può stabilire una corrispondenza proiettiva tale che ai punti $r.\ A_2A_3$, $r.\ A_3A_1$, $r.\ A_1A_2$ corrispondano le coniche degeneri del fascio, cioè risp. 23-14, 31-24, 12-34.

Digitized by Google

Sia O un punto arbitrario del piano; per esso passa una conica del fascio: chiamiamo ϱ il birapporto che essa forma con le coniche suddette. Su ogni retta l uscente da O si determini un punto M tale che formi colle tracce su l dei lati del triangolo $A_1 A_2 A_3$ il birapporto ϱ; il luogo di questo punto è una conica passante per O e che diremo *conica di O.*

Fissata la proiettività nell'anzidetto modo, ad ogni punto O della retta r corrisponde una conica del fascio: facendo ruotare r attorno ad O, la conica corrispondente descrive un fascio proiettivo a quello descritto da r, e questi due fasci generano una curva del 3° ordine che si dice *cubica di* O. La conica e la cubica di O passano per O e hanno ivi comune la tangente. a cui si dà il nome di *retta di* O. Ogni retta del piano è *retta di suoi tre punti*: se quella descrive un fascio di centro O, questi percorreranno una curva di 4° ordine passante per O, non avente punti singolari e che si dice *curva di* O.

Dato un fascio sizigetico di curve del 3° ordine, la Jacobiana del fascio e di una retta qualunque r è una curva di 4° ordine la quale ha dodici flessi nei vertici dei triangoli sizigetici; essa è curva di quattro determinati punti O i quali sono in una retta r' e formano un birapporto equianarmonico. La Jacobiana ha altri dodici flessi che sono punti sizigetici per un secondo fascio di curve di 3° ordine, e la curva si può considerare come Jacobiana di questo e della retta r'; le rette r, r' scambiano i loro uffici rispetto ai due fasci.

Le proposizioni ora compendiosamente esposte furon desunte dal frammento intitolato *Alcuni teoremi sui fasci sizigetici di curve del terzo ordine* (Memorie p. 333-337); però alcune di esse si rinvengono anche nella comunicazione *Sopra una certa curva del quarto ordine* (Memorie p. 204-205) fatta dal CAPORALI all'Accademia di Napoli il 9 dicembre 1882; la quale comunicazione, al dir dell'autore, era destinata a preludere a una trattazione metodica delle proprietà di quella curva: il frammento testè analizzato porge gli elementi per una divinazione di questo lavoro che sgraziatamente l'autore non scrisse (1).

5. Occupiamoci ora dei frammenti *Sulla teoria delle curve piane del quarto ordine* (Memorie p. 344-378).

Vari son gli argomenti trattati nel I di essi. Anzitutto il CAPORALI espone alcune proprietà dei gruppi di punti coniugati rispetto a una quartica, analoghe in parte a quelle che si rinvengono nella nota analizzata nel n. 1 di questa rassegna. Poi si occupa delle proprietà polari di una curva di quarto ordine introducendo la nozione di Polohessiana

(1) Oltre a quelli testè esaminati, tratta di curve del terzo ordine lo scritto di cui diremo nel n. 18.

Digitized by Google

e di Polocayleyana di un punto (queste curve sono la Hessiana e la Cayleyana di quel punto rispetto alla sua prima polare). Infine studia, mediante coordinate, alcune particolari curve di 4° ordine, con ispeciale riguardo al modo in cui si particolarizzano le forme invariantive delle ternarie biquadratiche che le rappresentano.

Il II Frammento si compone di tre paragrafi completamente indipendenti l'uno dall'altro e che quindi riassumeremo separatamente.

§ 1. Il luogo dei punti le cui coniche polari rispetto a una curva f di 4° ordine sono coniugate rispetto a una conica (inviluppo) **A** è una conica α (1) che si dirà *polare di* **A** rispetto a f, mentre **A** si dirà l'*antipolare di* α rispetto ad f. Se la conica polare di **A** è coniugata a **B**, la conica polare di questa sarà coniugata a quella: due coniche in queste condizioni si diranno *congiunte*. Se la conica antipolare di α è coniugata a β, la conica antipolare di questa sarà coniugata a quella: due coniche in queste condizioni si diranno *associate*. Chiamando *antipolo* di una retta il suo polo rispetto alla conica antipolare di essa (essendo la retta considerata come conica degenere), si trova che l'inviluppo delle rette aventi il loro antipolo su una retta data è una curva di 3° ordine (la *cubica antipolare* di quella retta) e l'inviluppo delle rette che contengono il loro antipolo è una curva di quarta classe.

Riprendendo poi la considerazione della Polohessiana e della Polocayleyana di un punto (cfr. sopra) l'a. dimostra che quando un triangolo apolare (tale cioè che la retta polare mista de' suoi vertici è indeterminata) ha un vertice fisso, gli altri due percorrono la Polohessiana del primo, mentre il lato opposto ne inviluppa la Polocayleyana. Se la Polohessiana del punto A passa per B, la Polohessiana di B passerà per A. Il luogo dei punti posti sulle loro Polohessiane non è che l'Hessiana della curva data.

Infine l'a. considera l'inviluppo delle rette che secano la curva in quattro punti armonici o equianarmonici e ne determina alcune proprietà.

§ 2. In questa seconda parte (che, se non erriamo, è di non lieve importanza) il CAPORALI studia le quartiche come generate da due fasci di curve di secondo ordine e, dalle proprietà dei sistemi di coniche, ne deduce alcune delle curve di quarto ordine; in particolare egli si occupa di assegnare i vari casi in cui le curve generate acquistano punti doppi e cuspidi.

---

(1) Similmente: Il luogo dei punti le cui coniche polari rispetto a una curva d'ordine n sono coniugate rispetto a una conica è una curva d'ordine $n-2$. Se p. e. $n=3$, il luogo è una retta; in questo modo ad ogni conica corrisponde una determinata retta, ma viceversa ad ogni retta corrisponde un sistema lineare ∞^3 di coniche, ecc.

Digitized by Google

§ 3. L'ultima parte è dedicata allo studio delle quartiche omologico-armoniche col sussidio di considerazioni stereometriche. Si considerino — dice il nostro autore — tutte le coniche di un piano rispetto alle quali un punto e una retta fissi sono polo e polare; esse formano un sistema lineare ∞^3 che si può riferire proiettivamente ai piani dello spazio. Allora a tutti i piani tangenti di un cono quàdrico corrisponderanno ∞^1 coniche quadritangenti a una quartica omologico-armonica rispetto al punto e alla retta dati e tutte le proprietà di quelli si tradurranno in altrettante di queste. Si trova così p. e. che la quartica omologico-armonica ammette tre sistemi di coniche omologico-armoniche quadritangenti e una serie di indice 12 di coniche biosculatrici, fra cui sono da annoverarsi 12 coppie di tangenti di flesso.

Chiudiamo questo brevissimo sunto raccomandando lo studio del frammento che ci ha occupati a chiunque voglia approfondire lo studio delle curve di quarto ordine.

6. Il BERTINI, nella nota intitolata *Una nuova proprietà delle curve d'ordine* n *con un punto* (n — 2) — *plo* (R. Accademia dei Lincei, Rendiconti, Serie III, T. 1, 1877, p. 92 — 96) ha dimostrato che « pei 2 (n — 1) punti di contatto delle tangenti condotte a una curva d'ordine n da un suo punto (n — 2) — plo passano ∞^{n-2s} curve d'ordine n — s aventi O per) punto (n — s — 2) — plo ». Questo teorema condusse il CAPORALI a una ricerca più generale, i cui risultati son consegnati nella nota *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo* (Rend. della R. Accademia di Napoli, Giugno 1881; Memorie p. 164-170) la quale è una delle più notevoli che egli abbia scritte. Lo vedrà facilmente il lettore dai teoremi seguenti che ne compendiano il contenuto:

« Date due curve F , F′ risp. degli ordini n , n' che passano per un punto O risp. con k , k' rami, esiste una curva θ d'ordine $n + n' - 1$ la quale passa pei punti di contatto delle tangenti condotte da O alle due date curve, tocca nei punti comuni ad F e F′ le rette che li congiungono ad O e passa per O in generale con $k + k'$ rami, con $k + k' + 1$ se in particolare è $n - k = n' - k'$ ».

« Se le due curve F , F′ passano per O risp. $n - r$, $n' - r$ volte ed inoltre si segano in gruppi di r punti posti in $n + n' - r$ rette uscenti da O, i punti di contatto delle tangenti condotte da O alle due curve staranno su una stessa curva θ dell'ordine $r - 1$. Se invece le due curve F , F′ passano per O risp. $n - r$, $n' - r + 1$ volte e se inoltre F′ contiene i punti in cui F è ulteriormente incontrata dalle sue tangenti in O, la curva θ è d'ordine $n' + r - 1$ ed ha in O un punto ($n - r + 1$)— plo ».

Da queste proposizioni relative al sistema di due curve l'autore deduce quest'altra relativa a una sola:

Digitized by Google

« Data una curva F d'ordine n con un punto $(n-r)$—plo O, se

$$n > rs - \frac{(r-1)(r-2)}{2},$$

vi è un sistema lineare $\infty^{n-rs-\frac{(r-1)(r-2)}{2}}$ di curve θ d'ordine $n-s$ che passano per O con $n-s-2r+2$ rami e contengono i punti di contatto delle tangenti condotte da O alla curva F ».

Per $r=2$ si ricade nel teorema di BERTINI. Per $n=2p+1$, $s=p$ il teorema precedente mena a concludere che « una curva d'ordine $2p+1$ con un punto $(2p-1)$— plo O si può sempre generare con un fascio di curve d'ordine $p+1$ con un punto $(p-1)$— plo O e il fascio delle prime polari di questo punto ».

Il teorema precedente si può estendere al caso in cui le tangenti in O alla curva F abbiano ivi più di $n-r+1$ punti riuniti in O e suona allora così:

« Data una curva F dell'ordine n con un punto O $(n-r)$—plo le cui tangenti incontrino la curva in altri $r'-1$ punti, se

$$r' \leq r\ ,\ n \geq r+1+\frac{r'}{2}(2s+r'-5)$$

vi è un sistema lineare $\infty^{n-r-1-\frac{r'(2s+r'-5)}{2}}$ di curve Θ d'ordine $n-s$ che passano per O con $n-s-2r+2$ rami e contengono i punti di contatto delle tangenti condotte da O stesso alla curva F ».

II. *Superficie di terzo ordine* . — **7.** I *Teoremi sulla superficie del terzo ordine* (Rendiconti della R. Accademia di Napoli, Maggio 1881, Memorie p. 152-163) presentano delle analogie coi *Teoremi sulle curve del terzo ordine* dianzi discorsi (n. 1) perchè trattano di sistemi di punti i quali godono di proprietà simili a quelle delle coppie e terne di punti coniugati rispetto a una conica. Le definizioni di terne e di punti coniugati, di tetraedri e di pentagoni coniugati rispetto a una superficie cubica presentano tanta analogia con quelle riportate nel n. citato che non è necessario trascriverle qui; scorriamo piuttosto i vari §§ del lavoro di CAPORALI per rilevarne i punti più salienti.

Il § 1 contiene delle belle proprietà dei tetraedri coniugati contemporaneamente a una superficie di 2° ordine e a una di 3°. Troviamo fra esse le due seguenti: « Se il tetraedro principale di una curva gobba di quarto ordine e di prima specie posta su una superficie di terzo ordine è inscritto in questa, i piani tangenti alla superficie nei vertici fanno fascio attorno a una retta della superficie. Se una superficie di terzo ordine passa per gli otto punti comuni a tre quàdriche aventi un tetraedro coniugato comune inscritto nella superficie, i piani tangenti a questa

Digitized by Google

nei vertici del detto tetraedro concorrono in un punto della stessa superficie.

Nel § 2 sono studiati i pentagoni coniugati rispetto a una superficie del terzo ordine. Di questi ∞^1 sono anche inscritti ad essa, sono quelli i cui punti diagonali appartengono alla superficie stessa; è notevole che i piani tangenti alla superficie nei vertici di uno di questi pentagoni corrispondono a questi vertici rispetto a un determinato complesso lineare. E' pur degno di speciale menzione il teorema: « I punti di contatto dei cinque piani che si possono condurre per una retta di una superficie di terzo ordine a toccarla altrove, formano un pentagono coniugato e hanno quindi per punti diagonali dieci punti della superficie », teorema di cui è manifesta l'analogia coll'altro: « I punti di contatto delle tangenti condotte a una cubica piana da un suo punto sono vertici di un quadrangolo coniugato i cui punti diagonali appartengono alla curva ».

Nel § 3 ed ultimo, sono considerati i pentagoni coniugati a una superficie di quarto ordine con particolare esame del caso in cui questa sia l'Hessiana di una superficie di terzo; notiamo, come quella di maggiore importanza, la proposizione: « I ventisette pentagoni formati coi punti d'incontro delle rette di una superficie di terzo ordine prese a due a due, sono coniugati alla Hessiana della superficie e quindi a tutte le superficie di quarto ordine che contengono la curva parabolica di quest'ultima (1) ».

8. Altri studi del CAPORALI sulle superficie cubiche rimasero inediti; ecco in breve il tema di uno di essi: Sia data una superficie di 3° ordine F con quattro punti doppi, la quale sia rappresentata univocamente su un piano π e sia O un punto arbitrario dello spazio; alle ∞^2 terne di punti di F allineati col punto O corrisponderanno in π altrettante terne di punti: studiare il sistema da queste formato. Al lettore non isfuggirà certamente l'analogia che presenta questo problema con quello trattato dal KANTOR nella memoria *Ueber eine ein-dreideutige Abbildung einer Flächen dritter Ordnung* (Journal f. d. r. u. a. Mathematik, T. XCV, 1883, p. 147-164); ma il KANTOR trattò delle terne analoghe che si ottengono projettando una superficie di 3° ordine (e 3ª classe) avente tre punti biplanari, nell'intento di scoprire delle proprietà dei gruppi di punti su una cubica piana.

Riportiamo ancora i seguenti teoremi relativi alla configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie cubica, i quali sono forse non tutti noti:

---

(1) Ulteriori investigazioni sulle superficie cubiche si trovano nella nota *Sull'esaedro completo*, di cui parleremo nel seguente n. 16.

Digitized by Google

a) Tolte dalle 27 rette di una superficie di 3° ordine le nove rette comuni a due triedri conjugati, rimangono 18 rette che in tre modi diversi si possono distribuire in una bisestupla e in sei rette d'un iperboloide.

b) Tolte dalle 27 rette di una superficie di 3° ordine, sei rette di un iperboloide, le rimanenti si possono in un sol modo distribuire in una bisestupla e in nove rette comuni a due triedri conjugati.

c) Tolte dalle 27 rette di una superficie di 3° ordine le rette di una bisestupla, le rimanenti si possono in dieci modi diversi distribuire in sei rette di un iperboloide e in nove comuni a due triedri conjugati.

d) Tolte le sei rette allogate su due piani tritangenti, le rimanenti si possono distribuire in tre modi diversi in una bisestupla e nelle nove rette di un triedro di 2ª specie.

e) Vi sono 2160 triedri di 2ª specie; essi si distribuiscono in 36 gruppi di 60 coordinati alle 36 bisestuple.

III. *Trasformazioni piane involutorie.* — **9.** E' noto che il BERTINI intraprese per primo lo studio metodico delle trasformazioni piane involutorie; egli si propose specialmente di far dipendere tutte le corrispondenze di tale specie, mediante trasformazioni quadratiche, da un certo numero di involuzioni tipiche (v. Annali di matematica, Serie 2ª T. VIII e Rend. dell'Istituto Lombardo 1880).

Il CAPORALI, nella breve nota *Sulle trasformazioni piane univoche involutorie* (Rendiconto dell'Accademia di Napoli, Settembre 1879; Memorie p. 116-125) additò un metodo di investigazione affatto diverso, esprimendo il desiderio « che altri, riconoscendo l'importanza dell'argomento, lo approfondisse spingendosi nella via da lui proposta o mostrandone la poca convenienza ». L'appello che egli rivolse ai geometri non rimase senza risposta; e la nuova forma, più semplice e più elegante, che il BERTINI potè dare (v. Rend. dell'Istituto Lombardo 1883) alle sue antiche ricerche servendosi delle osservazioni del CAPORALI, dimostra come non fosse fondata la modesta congettura che il nostro autore faceva sulla non convenienza del seguire le sue tracce.

Il concetto principale che il CAPORALI pose a fondamento della nuova trattazione delle involuzioni (e sul quale proponeva di fondarne una classificazione diversa dall'ordinaria) è quella di *classe*; con questo nome egli designava il numero delle coppie di punti corrispondenti situate su una retta arbitraria. Insieme alla classe egli introdusse la considerazione delle curve Ω ognuna delle quali è il luogo delle coppie di punti corrispondenti allineati con un punto fisso O; il modo in cui esse si comportano sia in generale, sia quando O è un punto fondamentale, le proprietà della Jacobiana della rete che esse formano e la considerazione della curva u-

Digitized by Google

nita della trasformazione e de' punti uniti isolati di questa, convenientemente combinate servono, secondo il CAPORALI, a determinare tutte le involuzioni di data classe. Come esempio egli si occupò delle involuzioni di 1ª classe (le quali non sono altro che quelle ottenute dal GEISER nel Journal f. d. r. u. a. Mathematik, T. LXVII, 1867, p. 78, mediante una rete di cubiche passanti per sette punti fissi) e studiò le involuzioni di 4° e 8° ordine. Con procedimento simile il BERTINI (nell'ultimo dei citati lavori) determinò tutte le involuzioni di 1ª e 2ª classe, e il MARTINETTI (Annali di Matematica, Serie 2ª, T, XII e XIII) spinse la ricerca fino alle classi 3ª e 4ª (1).

Fra gli scritti inediti esistono alcuni sviluppi relativi a questo lavoro, nonchè parecchi esempi di trasformazioni piane involutorie. Inoltre vi è una generalizzazione del concetto di involuzione di cui ci sembra valga la pena tener parola. Si chiami *involuzione* nel piano o nello spazio un sistema infinito di gruppi di punti tale che un determinato numero di punti individui un gruppo che tutti li contiene. Studiare questo sistema dirigendo la propria attenzione alle linee o superficie luoghi di infiniti gruppi del sistema è un problema interessante che occupò il nostro autore in alcuni casi particolari, ove sempre fece l'ipotesi che tutti i punti di un gruppo fossero allineati con un punto fisso; altri casi particolari citammo nel n. 8. Possa questa rapida indicazione svegliare in qualcuno il desiderio di proseguire nella direzione che il CAPORALI ha additata.

IV. *Rappresentazione di una superficie su un piano.* — **10.** Il primo cenno delle superficie del quinto ordine con una curva doppia dello stesso ordine si trova nella nota che chiude la memoria di CLEBSCH *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (Math. Annalen, T. III, 1871, p. 45-75); ivi è fatto conoscere come la superficie si possa rappresentare su un piano mediante un sistema di cubiche passanti per quattro punti fissi ed è attratta la attenzione dei geometri sulla notevole distribuzione in terne doppie delle dieci rette della superficie.

Nello stesso volume dei *Mathematische Annalen* il NÖTHER (nello scritto *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen insbesondere in ihre Anwendung auf die Abbildung algebraischer Fläche*, p. 574), dallo studio del caso speciale della trasformazione birazionale di terzo grado corrispondente all'ipotesi che la sestica fondamentale di uno dei due spazi si spezzi in una cubica gobba, una retta e una conica, ricavò la dimostrazione degli enunciati di CLEBSCH.

---

(1) Si vegga anche il posteriore lavoro del BERZOLARI pubblicato nel T. XVI della Serie II degli Annali di Matematica.

Digitized by Google

Poco dopo il CREMONA notò (nel lavoro *Ueber die Abbildung algebraischer Fläche*, Math. Annalen, T. IV. 1871, p. 222-3) come quella stessa trasformazione di terzo grado considerata da NÖTHER mutasse una quàdrica contenente la conica fondamentale in una delle superficie di quinto ordine di cui è parola. Questa osservazione lo condusse tosto alla determinazione delle rette e delle coniche della superficie; facendo poi la proiezione stereografica di quella quàdrica pervenne, per un cammino diverso da quello a cui alluse CLEBSCH, alla rappresentazione piana della superficie che questi aveva indicata.

Senza ricorrere alla teoria delle corrispondenze univoche fra due varietà, le proprietà della superficie relative alle rette e alle coniche in essa contenute furon dimostrate, insieme ad altre, contemporaneamente (1) da STURM nel suo lavoro *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung* (Math. Annalen, T. IV, p. 249-283; v. specialmente n. 36, p. 278-280).

Tali sono le ricerche fatte sulla superficie in questione prima del 1875. In questo anno il CAPORALI fece di questa il soggetto della sua dissertazione di laurea (*Sulla superficie del quinto ordine dotata di una curva doppia del quinto ordine*; Annali di Matematica, 2ª Serie, T. VII; Memorie p. 1-46).

Questo lavoro si avvicina specialmente a quelli di NÖTHER e CREMONA in quantochè studia la superficie sulla sua rappresentazione piana, e questa ottiene stabilendo direttamente una notevole trasformazione birazionale fra due spazi Σ e S; nella quale ai piani di uno, Σ, dei due spazi corrispondono le superficie Φ di terzo ordine che passano per una quartica razionale fissa Q e hanno in un punto O lo stesso piano tangente T, mentre ai piani Ω di S corrispondono le superficie Ψ del quinto ordine aventi comuni una quintica doppia E e una conica C (secantisi in quattro punti) e per le quali un punto U, triplo per la curva E, è punto pure triplo. La rappresentazione di una superficie Ψ sul corrispondente piano Ω si ottiene quindi subito: alle sezioni piane di Ψ corrispondono le cubiche che passano per le tracce su Ω di Q (*punti fondamentali* del piano rappresentativo), il punto U ha per imagine una terna di punti (*punti principali* di detto piano) e la curva E una curva iperellittica di sesto ordine avente come doppi i punti fondamentali ed i principali. Questa curva iperellittica gode di molte belle prerogative che si possono facilmente far scaturire da quelle della curva E. L'indole di questo articolo ci vieta di arrestarci ad annoverare tutte le eleganti proprietà di una superficie Ψ che il CAPORALI ottenne studiandone la rappresentazione; ci

(1) Gli scritti di CREMONA e di STURM portano entrambi la data 1° Giugno 1871.

Digitized by Google

basti notare avere egli dimostrato che una rete di cubiche piane passante per sette punti arbitrari e una cubica passante per quattro di essi, determinano un sistema lineare triplicemente infinito il quale si può intendere nato dalla rappresentazione della più generale fra le superficie di cui si tratta. Come chiusa al suo lavoro, il CAPORALI stabilisce le formole che servono alla rappresentazione della superficie su un piano e quelle (non date da CAYLEY, NÖTHER e CREMONA) che individuano la trasformazione birazionale di spazio che gli servì di punto di partenza (1).

Una ricerca che il CAPORALI non fece è quella di un procedimento per generare la superficie; esso fu indicato dal DARBOUX (nella memoria *Sur une surface du cinquième ordre et sa représentation sur le plan;* Bull. des Sciences math. et astr., T. II, 1871, p. 40- 64) nel caso in cui sei rette della superficie concorrono nel punto triplo, in generale dal Del Re il quale trovò (v. la nota *Nuova costruzione della superficie del quint'ordine dotata di curva doppia del quinto ordine*, Rendiconti della R. Acc. di Napoli, 1886) essere essa il luogo de' punti d'intersezione dei piani di una stella colle rette corrispondenti della congruenza generata da due piani punteggiati proiettivi a quella stella (2): questa generazione fece rientrare la superficie di cui parliamo nella classe di quelle generabili con forme fondamentali in corrispondenza algebrica.

11. In principio della memoria *Ueber die Flächen vierter Ordnung welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (Journal f. d. r. u. a. Matematik. T. LXIX, 1868, pag. 142-184) il CLEBSCH ha fatto cenno di un'idea che ci sembra di capitale importanza nella teoria della rappresentazione univoca delle superficie su un piano: invece di supporre data la superficie e di dedurre dalle proprietà di essa la rappresentazione, conviene in molti casi di immaginar dato un sistema lineare ∞^3 di curve algebriche piane e, considerandolo come formato dalle imagini delle sezioni piane

(1) Un'altra trasformazione birazionale fra due spazi che il CAPORALI proponevasi di studiare (come si desume da' suoi manoscritti) ha: 1° per sistema omaloide in S l'insieme delle superficie d'ordine $(n+2)$, che hanno un punto $(n+1)$ — plo e passano per una curva d'ordine $(n+1)^2+2$ e genere $n(2n-1)$ ed avente O per punto (n^2+2) — plo, 2° per sistema omaloide in Σ l'insieme delle superficie d'ordine $(2n+1)$ che hanno comune una cubica gobba n — pla e una curva semplice d'ordine $(n+1)(n+2)-3$ e di genere $n(2n-1)$ la quale incontra la cubica in $2(n+1)^2-5$ punti. Una invece che egli studiò con molta cura è quella (involutoria) individuata dalle formule

$$\varrho x_i = \frac{a_i}{y_i} \; (i = 1, 2, 3, 4).$$

(2) Già il CAPORALI aveva notato (n. 18 della Dissertazione) che si può stabilire una corrispondenza univoca fra i punti della superficie e i piani passanti pel suo punto triplo.

Digitized by Google

di una superficie, proporsi di determinare le proprietà di questa. La stessa idea si incontra nelle pagine (v. specialmente i §§ 1 e 6) del lavoro posteriore *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen insbesondere der vierten und fünften Ordnung* (Math. Annalen, T. 1, 1869, p 253-316) nelle quali il CLEBSCH insegna a leggere sul piano di rappresentazione alcune particolarità della superficie obbiettiva. Essa veniva a stabilire un legame fra lo studio della rappresentazione di una superficie su un piano e quello di un sistema lineare triplicemente infinito di curve piane, il quale permetteva di tradurre ogni proprietà di una superficie suscettibile di rappresentazione univoca su un piano in una di questi sistemi. Questa idea, come la maggior parte di quelle che stabiliscono una relazione fra due campi di ricerca apparentemente eterogenei, ha un notevole valore; essa fu completamente sviluppata dal CAPORALI nella memoria *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* (pubblicata nei *Collectanea mathematica in memoriam Dominici* CHELINI, 1881; Memorie p. 171-203), che ora riassumeremo.

I sistemi lineari considerati dal CAPORALI hanno i punti fondamentali fra loro indipendenti. Si può inoltre supporre che non vi sia alcuna curva *(fondamentale*, cioè) tale che non sia incontrata in punti variabili dalle curve Φ del sistema, chè, ove questa condizione non fosse soddisfatta, assoggettando il piano a una conveniente serie di trasformazioni quadratiche, si finirebbe sempre per ottenere o un sistema senza curve fondamentali, oppure uno con due punti fondamentali congiunti da una retta fondamentale, caso quest'ultimo che si deve studiare direttamente e lo si può senza gran fatica.

Le Jacobiane Ψ delle ∞^3 reti contenute nel sistema delle curve Φ formano un nuovo sistema lineare di curve d'ordine $3(n-1)$ (se n è l'ordine delle Φ): invece la Jacobiana di una delle ∞^3 reti contenute nel sistema delle curve Ψ è formata da una curva Φ e dal luogo delle cuspidi di queste curve. Se si astrae da questo luogo, fra i due sistemi delle Φ e delle Ψ vige perfetta reciprocità; intanto si trova che detto luogo è d'ordine $4(2n-3)$ e passa $4(2r-1)$ volte per ogni punto fondamentale r-plo e due volte per quei punti di cui ciascuno ha per polari rette rispetto alle curve Φ i raggi di un fascio.

Il sistema di curve Φ si può sempre considerare come costituito dalle imagini delle sezioni piane di una superficie Σ; le curve Ψ sono allora le imagini delle curve di contatto di Σ colle sue tangenti che passano per un punto dello spazio. L'ordine di Σ è eguale al numero N delle intersezioni mobili di due curve Φ, e il genere delle sue sezioni piane è eguale a quello p delle dette curve Φ.

Dallo studio di quanto accade nel piano rappresentativo si trae che

Digitized by Google

i coni circoscritti a Σ sono del genere $9p - \sigma + 1$ (se σ è il numero de' punti fondamentali), d'ordine $2(N + p - 1)$ e di classe $N + 4p + \sigma - 1$: le formule di PLÜCKER dànno subito le altre caratteristiche di questi coni e i risultati ottenuti, interpretati nel piano rappresentativo, conducono a concludere quante curve Φ di una rete sianc dotate di una cuspide e quante di due punti doppi, quante reti di curve Φ contengano fasci di curve che si osculano o hanno fra loro un doppio contatto.

La superficie Σ ha una curva doppia d'ordine $\frac{(N-1)(N-2)}{2} - p$, di genere $\frac{(N-3)(N-4)}{2} + p(N-12) + 2(\sigma - 1)$ con $2(N + 4p - \sigma - 1)$ punti cuspidali. L'imagine di essa è una curva d'ordine $(N-4)n + 3$ che passa $(N-4)r + 1$ volte per ogni punto fondamentale r-plo; tale imagine è il luogo delle coppie di punti del piano rappresentativo che non determinano un fascio di curve: l'inviluppo delle rette determinate da queste coppie di punti è della classe $(N-4)(n-1) - 4p + \sigma$.

La superficie Σ ha dei punti tripli, il cui numero $\left[\frac{1}{6}(N-1)(N^2 - 8N + 18) - p(N-8) - \sigma\right]$ si determina direttamente mediante la considerazione delle seconde polari de' punti dello spazio; ogni punto triplo ha per imagine una terna di punti: resta in tal modo risoluto il problema piano di «trovare il numero delle terne di punti del piano di rappresentazione per ciascuna delle quali passa una rete di curve Φ».

Il risultato dianzi accennato sul luogo delle cuspidi delle curve Φ conduce tosto ad assegnare l'ordine e il genere della curva parabolica di Σ. Dello stesso genere è la sviluppabile formata dai piani stazionari di Σ; la classe di essa fu già determinata, il suo ordine si può stabilire direttamente, in conseguenza si hanno elementi sufficienti per assegnare le altre caratteristiche di essa; interpretando questi risultati nel piano si ottiene il numero delle curve Φ dotate di un contatto di due rami (*tacnodo*).

Fra le curve Φ, ∞^1 hanno due punti doppi; il luogo di questi è l'imagine della curva di contatto della sviluppabile bitangente di Σ ed è dell'ordine.

$$3(n-1)(N + 4p + \sigma) - 31n + 42;$$

la curva di contatto è d'ordine

$$2(N + p - 1)(N + 4p + \sigma) - 17N - 28(p - 1).$$

Se ne deduce il numero delle curve Φ dotate di un punto doppio e di una cuspide. Similmente dal numero dei piani tritangenti di Σ si desume il numero delle curve Φ con tre punti doppi.

Le proposizioni precedenti esigono delle modificazioni in casi par-

Digitized by Google

ticolari. Così ogni punto fondamentale semplice diminuisce di un'unità il numero delle curve Φ di una rete dotate di due punti doppi e di $N + 4p + \sigma - 8$ unità il numero di quelle dotate di tre punti doppi, ecc.; invece quest'ultimo numero è diminuito di due unità da ogni punto fondamentale doppio, ecc. Inoltre vi son dei casi in cui le relative dimostrazioni cadono in difetto, onde, se non si fa attenzione, s'incontrano dei risultati contraddittori.

La memoria ora analizzata si chiude coll'enumerazione delle superficie dei primi sei ordini rappresentabili mediante sistemi lineari della natura definita in principio (1). Un problema si presenterebbe ora: quello di ricercare come si modifichi il contenuto della memoria di CAPORALI quando si tolgano le restrizioni che egli fece sulla disposizione dei punti fondamentali.

Porremo qui la notizia che alcune pagine manoscritte dimostrano che il CAPORALI aveva in mente una nota *Sulle superficie di Plücker nei complessi di 2° grado* la quale doveva contenere una serie di formole, che, al dir dell'autore, sarebbero state un sussidio non inutile al lavoro di KLEIN *Ueber die Abbildung der Complexfläche vierter Ordnung und vierter Classe* (Math. Annalen, T. II, 1870, 371-373), nota di cui però non si trovano che i preliminari.

V. *Geometria della retta.* — **12.** Scopo della memoria *Sui complessi e e sulle congruenze di 2° grado* (Memorie della R. Acc. dei Lincei 1877-78; Memorie p. 54-85) è di stabilire mediante considerazioni geometriche quella rappresentazione del complesso di 2° grado sullo spazio ordinario di cui il KLEIN fece nota la rappresentazione analitica nello scritto del NÖTHER *(Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln,* (Göttinge Nachrichten 1869). Per raggiungere tale intento il CAPORALI comincia dallo studiare una rappresentazione univoca di una congruenza quadratica su un piano e precisamente quella in cui ad ogni retta della congruenza si fa corrispondere la sua traccia su un piano singolare; servendosi delle relazioni più elementari che passano fra gli elementi singolari del sistema di raggi, egli trova le proprietà caratteristiche della rappresentazione e le verifica poi mediante le formole che servono a stabilirla. Queste proprietà gli permettono di mostrare che le congruenze quadratiche contenute in un complesso di 2° grado e aventi comune un fascio di rette formano un sistema triplicemente infinito tale che: 1°

(1) Nei manoscritti del CAPORALI trovammo anche fatto cenno della superficie di 6° ordine avente una linea doppia composta di una quartica di 1ª specie e di tre sue corde concorrenti in un punto; anche iniziato, ma non compiuto, lo studio di essa dal punto di vista dalla sua rappresentazione piana.

Digitized by Google

due qualunque di esse hanno comune una sola retta variabile, 2° tre rette qualunque del complesso determinano una di esse. Facendo corrispondere queste congruenze ai piani dello spazio si ottiena la cercata rappresentazione univoca del complesso quadratico sullo spazio punteggiato.

Di questa rappresentazione il CAPORALI determina le proprietà più salienti e trova le formole che la stabiliscono nell'ipotesi di coordinate di rette affatto generali, facendo notare come esse rientrino in quelle di KLEIN se le coordinate sono le ordinarie tetraedriche. Fra i risultati interessanti che racchiude la memoria in questione, noteremo la dimostrazione dell'esistenza di sedici sistemi ∞^2 di rigate di terzo grado e di dieci sistemi ∞^1 di iperboloidi contenuti in ogni congruenza quadratica e quella di quaranta complessi tetraedrali in cui è posta ogni tale congruenza. L'a. trova anche (§ 5, n. 47) ∞^4 tetraedri contemporaneamente inscritti e circoscritti a una superficie di KUMMER; però non sono gli unici tetraedri dotati di questa proprietà, avendo il KLEIN dimostrato che essi sono ∞^5 (v. la recente memoria *Ueber Configurationen welche der Kummer'schen Flächen zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind,* Math. Annalen T. XXVII, 1886, pagina 111; cfr. anche Math. Annalen T. XV, 1879, p. 14 nota).

Alcuni fogli manoscritti contengono le prime linee della soluzione del problema: Studiare come si modificano le rappresentazioni su un piano di una congruenza quadratica e sullo spazio di un complesso quadratico, quando l'ente rappresentato si specializza in uno dei modi noti. Non crediamo che questa questione sia poi stata trattata da altri, mentre sarebbe interessante il risolverla.

13. Nel lavoro *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* il CAPORALI dimostrò (cfr. il n.° 11 del presente articolo) che un sistema lineare ∞^3 di curve algebriche di ordine n e di genere p, avente σ punti fondamentali, si può sempre considerare come composto dalle imagini delle sezioni piane di una superficie algebrica Σ di ordine eguale al numero N delle intersezioni mobili di due curve del sistema. Se si congiunge ogni punto del piano II del sistema al punto corrispondente della superficie Σ si ottiene una delle congruenze che il CAPORALI ha studiate nella nota *Sopra alcuni sistemi di rette* (Rendiconti della R. Accademia di Napoli, Novembre 1879; Memorie p. 126-134).

La congruenza è in generale d'ordine $N + n + 1$ e di classe n; essa ha nel piano II una curva di raggi di classe $N+n$, di genere p e d'ordine $2(N + n + p - 1)$. La sua superficie focale è di classe $2(2n + p - 2)$, di rango $N + 6n + 4p + \sigma - 4$ e d'ordine $2(N + 2n + p - 1)$; ha per punto $2r$—plo ogni punto fondamentale r—plo del sistema lineare dato;

Digitized by Google

finalmente ha comune col piano II, oltre la suddetta curva di raggi, una curva di contatto d'ordine n. Queste conclusioni (e le altre che il CAPORALI dimostra e che noi, per brevità, passiamo sotto silenzio) subiscono delle modificazioni assegnabili facilmente quando il piano II contiene un punto coincidente con quello che gli corrisponde sulla superficie Σ. Era intenzione dell'autore di servirsi dei risultati ottenuti per studiare le congruenze di seconda classe, ma non lo fece.

14. Volgiamoci ora alla memoria *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (Memorie p. 270 - 312) che il CAPORALI compose assieme al Prof. PASQUALE DEL PEZZO.

Come lo indica il titolo, fine di questo lavoro è di gettare le basi di una trattazione metodica della Geometria della retta; è dunque quello stesso che il DE PAOLIS si propose nella prima parte de' suoi *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* (Memorie della R. Accademia dei Lincei, 1885); i mezzi usati sono però totalmente diversi, come il lettore facilmente arguirà dal breve riassunto che passiamo a dare della succitata memoria.

Quando per due tetraedri avviene che i vertici del secondo stiano sulle facce del primo e tre facce di quello passino pei vertici omologhi di questo, anche la quarta faccia passerà per il quarto vertice. Ne discende che tre punti e i loro piani corrispondenti determinano una reciprocità involutoria nella quale due qualunque elementi corrispondenti (punto e piano) sono incidenti; è sottinteso che i tre punti dati stanno sui loro piani corrispondenti e che il piano determinato dai tre punti passa pel punto comune a' tre piani dati. In tale corrispondenza se un punto percorre una retta il punto corrispondente descrive un fascio attorno alla retta reciproca. Due rette reciproche non s'incontrano mai; se hanno un punto comune coincidono. In ogni piano stanno ∞^1 rette reciproche di sè stesse, tutte quelle che passano pel punto corrispondente a quel piano; le ∞^3 rette reciproche di sè stesse che così si ottengono formano un complesso lineare.

Quattro punti qualunque dello spazio sono vertici di un tetraedro contemporaneamente inscritto e circoscritto a quello che ha per facce i piani corrispondenti a quei punti; le rette del complesso proiettano i vertici (o secano le facce) di due tali tetraedri con (in) quaterne proiettive di piani (punti). Vi sono nello spazio ∞^5 complessi lineari; ognuno è determinato quando se ne conoscano cinque rette, oppure quando si conoscano tre punti e i tre piani corrispondenti, purchè il piano passante per quelli contenga il punto d'intersezione di questi. La retta è uno speciale complesso lineare.

Da queste proposizioni si possono agevolmente far derivare le pro-

Digitized by Google

prietà proiettive più cospicue delle congruenze lineari e delle schiere rigate, la nozione dei complessi in involuzione, ecc. Notiamo solo il seguente teorema: « Quando due tetraedri sono inscritti e circoscritti ad un terzo, le congiungenti delle coppie di vertici opposti e le intersezioni delle coppie di facce opposte, hanno due trasversali comuni ».

Due tetraedri T e T′ inscritti e circoscritti l'uno all'altro dànno origine a una configurazione dotata di molte belle proprietà la cui esposizione forma la parte più importante della memoria che analizziamo.

Di questi teoremi esistono i correlativi: lo stesso può ripetersi per tutti i seguenti:

I due tetraedri T, T′ sono iperboloidici in tre modi diversi; siano J_1 J_2 J_3 gli iperboloidi risultanti. Pei vertici dei due tetraedri T, T′ passano ∞^2 quadriche F formanti una rete; fra esse (e così fra quelle Φ di definizione correlativa) si trovano i tre iperboloidi J_1 J_2 J_3. Le congiungenti dei vertici omologhi e le intersezioni delle facce omologhe dei due tetraedri sono otto rette che ammettono due trasversali comuni ω, ω'; queste sono rette reciproche tanto rispetto alle quadriche F quanto rispetto alle quadriche Φ. I vertici di detti tetraedri si possono distribuire in quattro modi in una coppia di tetraedri; i due tetraedri di ogni coppia sono autoconiugati rispetto a una determinata quàdrica; si vengono per tal modo a introdurre quattro nuove quadriche S_1, S_2, S_3, S, ognuna delle quali è polare reciproca di sè stessa rispetto alle altre tre e ai tre iperboloidi J_1, J_2, J_3. Inoltre i due tetraedri di ogni coppia sono reciproci rispetto a un determinato complesso lineare; si presentano così quattro complessi C_1, C_2, C_3, C, ciascuno dei quali è coordinato a una delle quadriche S_1, S_2, S_3, S, e contiene della quàdrica corrispondente le generatrici che incontrano ω e ω', delle altre tre quàdriche le generatrici che non incontrano ω e ω'.

Le rette del complesso C e quelle delle quàdriche F e Φ sono caratterizzate dalla proprietà di secare le facce dei due tetraedri T e T′ in quaterne proiettive, e dalla proprietà correlativa.

Quattro complessi a due a due in involuzione (quali sono quelli or ora considerati) dànno luogo a sei congruenze lineari, le cui direttrici formano tre tetraedri, dei quali due spigoli opposti sono le rette comuni ai due complessi; rispetto ad essi gli elementi dello spazio si organizzano in sistemi di otto punti (o otto piani) tali che ognuno di essi si può separare, in quattro modi diversi, nei vertici (nelle facce) di due tetraedri inscritti e circoscritti l'uno all'altro. Sei complessi a due a due involutori formano un notevole sistema le cui proprietà più spiccate notoriamente furono esposte dal KLEIN nel suo scritto *Zur Theorie der Liniencomplexen des ersten und zweiten Grades* (Math. Annalen T. II,

Digitized by Google

1870, pagine 198-226); gli autori le riassumono aggiungendone qualcheduna.

L'ultima questione trattata nella memoria che andiamo esaminando è quella delle trasformazioni lineari in sè stesso di un complesso lineare (cfr. il lavoro di C. SEGRE *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta*; Mem. della R. Accademia di Torino, Serie 2ª T. XXXVII, 1885). Presi per vertici del tetraedro di riferimento i punti uniti (supposti distinti) di un'omografia, le equazioni di questa avranno la forma $\varsigma x_i' = p_i x_i$; essa trasforma il complesso lineare $\sum_{ik\,lm} c\, p = 0$ nell'altro

$$\sum \frac{c_{ik}}{\mu_i \mu_k} p_{lm} = 0;$$

affinchè questo coincida con quello dovranno aver luogo le sei equazioni

$$c_{23}(\mu_2 \mu_3 - \varrho) = 0 \qquad c_{14}(\mu_1 \mu_4 - \varrho) = 0$$
$$c_{31}(\mu_3 \mu_1 - \varrho) = 0 \qquad c_{24}(\mu_2 \mu_1 - \varrho) = 0$$
$$c_{12}(\mu_1 \mu_2 - \varrho) = 0 \qquad c_{34}(\mu_3 \mu_2 - \varrho) = 0$$

Il modo più generale di soddisfarle consiste nell'annullare r dei secondi fattori e $6 - r$ dei primi. Prendendo $r = 1$ il complesso risulta speciale. Anche prendendo $r = 2$ in generale il complesso risulta speciale, tranne quando si annullino i secondi fattori in due equazioni poste sulla stessa orizzontale; facendo ad es.

$$\mu_2 \mu_3 - \varrho = 0 \qquad \mu_1 \mu_4 - \varrho = 0 \qquad c_{31} = c_{34} = c_{12} = c_{34}:$$

l'equazione del complesso diviene

$$c_{23} \mu_{14} + c_{14} \mu_{23} = 0\ ,$$

epperò gli spigoli A_1A_4 e A_2A_3 del tetraedro unito sono rette coniugate rispetto al complesso, mentre gli altri quattro appartengono ad esso; l'omografia è poi soggetta alla condizione

$$\mu_2 \mu_3 = \mu_1 \mu_4.$$

Vi sono ∞^{10} trasformazioni omografiche di un complesso lineare in sè stesso; per ognuna di esse vi sono in generale nel complesso quattro rette unite, lati di un quadrilatero gobbo; ciascuna di esse ha una costante di meno di quella generale e trasforma in sè stessi tutti i complessi lineari passanti per le quattro rette unite.

Combinando le omografie precedenti con la polarità stabilita dal complesso si ottengono le correlazioni che mutano questo in sè medesimo.

Vi sono altre trasformazioni proiettive in sè stesso di un complesso lineare dotate di altre particolarità proiettive; la ricerca di esse chiude il lavoro che ci ha ora occupati.

Nell'abbandonare i lavori del CAPORALI appartenenti alla Geometria della retta, diremo che fra i manoscritti si trovano alcune pagine che

Digitized by Google

dimostrano essersi egli anche occupato delle questioni relative alla generazione di enti dello spazio rigato mediante sistemi lineari proiettivi di complessi d'ordine qualunque (1).

VI. *Configurazioni.* — **15.** Nella ben nota memoria *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (Memorie della R. Accademia dei Lincei, 1876-77) il CREMONA espose un metodo semplice ed elegantissimo per ridurre a poche proprietà intuitive del sistema di 15 rette dello spazio poste tre a tre in 15 piani le numerose proposizioni a cui dà luogo la configurazione determinata da sei punti di una conica; le rette e i piani di questo sistema sono fra loro connessi mediante un notevole esaedro che, per dirla col CREMONA, è quasi il nocciolo della figura. Ora questo esaedro si può ottenere eziandio dalla configurazione formata con gli elementi (punti o piani) singolari di una superficie di KUMMER, separando da essa sei piani singolari passanti per uno stesso punto singolare. Dimostrare quest'asserzione mediante uno studio accurato e approfondito della configurazione suddetta e farne applicazioni alla dimostrazione delle proprietà note dell'*exagrammum mysticum* e di altre nuove: ecco lo scopo che il CAPORALI si è proposto e ha raggiunto nell'elegante suo scritto *Sopra i punti e i piani singolari della superficie di* KUMMER (Memorie della R. Acc. dei Lincei, 1877-78; Memorie p. 86-115) (2).

16. La nota *Sull'esaedro completo* (Rendiconto della R. Accademia di Napoli, Marzo 1881, Memoria p. 135-151) ha comune con quella considerata nel n. precedente il fine e si connette strettamente al lavoro del CREMONA ivi citato e all'altro dello stesso autore *Ueber die Polar-Exaeder bei den Flächen dritter Ordnung* (Math. Annalen T. XIII, 1878): passiamo a riassumere il suo contenuto.

Nel § 1. il CAPORALI determina che cosa divengano i 36 esaedri polari e le 120 coppie di triedri coniugati di una superficie di terzo ordine quando questa acquisti un punto conico: uno studio della configurazione formata dalle rette della superficie cubica, mostra che gli esaedri si riducono a undici uno dei quali (l'esaedro *principale*) ha per vertici (per usare le denominazioni del CREMONA) i 20 punti di STEINER, mentre di ognuno degli altri esaedri (esaedri *secondari*) fa parte una sola coppia di punti di STEINER; le coppie di vertici di triedri coniugati si riducono a 10 coppie di punti di STEINER ed a 90 punti allogati due a due sulle

(1) E' noto che alcuni di questi problemi furono risolti dal ROCCELLA nella sua dissertazione *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi corrispondenti di due o più fasci proiettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina 1882). V. anche G. LORIA, *Su gli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica*, Giorn. di matem., XXXIV, 1896 [1935].

(2) Fra i manoscritti trovammo degli sviluppi algebrici relativi a questo argomento.

Digitized by Google

diagonali dei 15 quadrispigoli nei quali si possono distribuire le sei rette della superficie uscenti dal suo punto doppio.

Nel § 2 il nostro autore, adoperando il sistema di coordinate poliedriche di cui si servì il CREMONA nei citati scritti, dimostra parecchi teoremi di cui il più importante si enuncia così: « Si considerino i 15 puti X nei quali gli spigoli dell'esaedro sono segati da un piano osculatore della cubica determinata dalle sue facce; sopra ogni spigolo il punto X appartiene a un gruppo della involuzione sizigetica determinata dai quattro vertici: i 45 punti Y che completano questi gruppi sono allineati tre a tre sopra 15 rette, che appartengono a una medesima superficie di terzo ordine ».

Nel § successivo, mettendo a profitto alcune formule di CAYLEY (che si trovano nella nota *On Pascal's Theorem.* Quarterly Journal T. IX, 1871), l'a. mostra esservi 96 superficie di terzo ordine dotate di punto doppio ed aventi un dato esaedro come polare; per 56 di esse il dato esaedro è principale, per le altre secondario.

Nell'ultimo § sono esposte alcune semplici proprietà dell'esaedro le quali conducono ad altrettante proprietà dell'esagrammo di PASCAL, qualora la figura in esame si proietti da un punto doppio di una superficie di 3° ordine avente il dato esaedro come polare. P. es. il CAPORALI trova che: « Le 10 coppie di punti di STEINER dell'esagrammo sono coniugate armonicamente rispetto a tutte le coniche di un fascio, del quale fa parte la conica fondamentale ». « Vi sono nel piano dell'esagrammo tre punti da ognuno dei quali i punti di STEINER sono proiettati mediante 10 coppie di raggi di una stessa involuzione; essi sono vertici di un triangolo coniugato rispetto alla conica fondamentale ».

17. Lo *Studio sull'esagrammo di* PASCAL (Memorie p. 236-251) è piuttosto un saggio di esposizione metodica di risultati conosciuti che un lavoro ricco di vedute originali. Tuttavia esso non è privo d'interesse: è noto infatti essere una questione importante nello studio di una configurazione il trovare un sistema di notazioni espressive per gli elementi di essa, tanto vero che notazioni bene scelte permettono di rilevare senza difficoltà una proposizione la cui verità non potrebbe altrimenti dimostrarsi che difficilmente. Ora il sistema proposto dal CAPORALI ci sembra degno di attenzione, esso ha de' punti di contatto con quello a cui fu condotto il CREMONA nelle sue già citate ricerche, ma è più completo e si ottiene coll'esame diretto della figura (*esagrammo*) formata da sei punti di una conica (*vertici* dell'esagrammo); per renderne edotto il lettore diremo quanto segue.

I vertici dell'esagrammo sono congiunti a coppie mediante 15 rette (*lati* dell'esagrammo), le quali, colle loro mutue intersezioni determinano

Digitized by Google

45 punti D diversi dai vertici. Tre lati su cui siano distribuiti tutti i vertici dell'esagrammo determinano un triangolo Δ avente per vertici tre punti D; vi sono 15 triangoli Δ. Due triangoli Δ non aventi alcun lato comune formano una coppia e tre non aventi a due a due alcun lato comune formano una terna; ogni triangolo Δ entra in 8 coppie e in 16 terne; vi sono 60 coppie e 80 terne. I triangoli di una coppia hanno per lati sei lati dell'esagrammo, con gli altri nove lati dell'esagrammo si può formare una sola terna; questa terna forma con quella coppia un gruppo simmetrico di cinque triangoli Δ aventi per lati tutti i 15 lati dell'esagono e che si dirà *figura di triangoli*. L'esagrammo contiene sei figure di triangoli; esse verranno distinte coi numeri 1, 2, . . . , 6. Ogni triangolo Δ fa parte di due figure; quello comune alla a^{esima} e alla b^{esima} (a, b, c, d, e, f è una permutazione di 1, 2, 3, 4, 5, 6) si potrà indicare con *ab*. I tre triangoli Δ rappresentati con *ab, cd, ef* hanno comune un lato dell'esagono che verrà indicato con *ab-cd-ef*. I due lati *ab-ce-df* e *ab-cf-de* dell'esagono hanno comune un punto D che si può indicare col simbolo $\binom{cd}{ef}$; allora i vertici del triangolo *ab* sono i punti D i cui simboli non contengono le lettere *a*, *b* cioè $\binom{cd}{ef}$, $\binom{ce}{fd}$, $\binom{cf}{de}$. I punti D stanno a tre a tre su sessanta rette (di PASCAL); ogni retta di PASCAL è asse di omologia di due triangoli Δ i cui simboli hanno una lettera comune; quello che è asse di *ab* e *ac* si indicherà con P(*a*·*bc*). Le tre rette di PASCAL P(*a*·*bc*), P(*a*·*bd*), P(*a*·*cd*) si incontrano in un punto (di KIRKMAN) che si designerà con K(*a*·*ef*): i punti di KIRKMAN sono sessanta. Invece le tre rette di PASCAL P(*a*·*bc*), P(*b*·*ca*), P(*ab*·*c*) concorrono in un punto (di STEINER) che si indicherà con *abc*; i punti di STEINER sono 20, distribuiti iu 10 coppie di coniugati: tali sono *abc*, *def*. Quattro punti di STEINER nei cui simboli entrino due stesse lettere come *abc*, *abd*, *abe*, *abf* stanno su una retta (di PLÜCKER) che si indicherà con *ab*: le rette di PLÜCKER sono 15. Tre punti di KIRKMAN i cui simboli contengono le stesse lettere, come K(*a*·*bc*), K(*b*·*ca*), K(*c*·*ab*), stanno su una retta (di CAYLEY) che si rappresenterà col simbolo *def*: le rette di CAYLEY sono 20 e corrispondono ciascuna a un punto di STEINER. Le quattro rette di CAYLEY che corrispondono a quattro punti di STEINER collocati su una retta di PLÜCKER concorrono in un medesimo punto (di SALMON) che si indicherà collo stesso simbolo della corrispondente retta di PLÜCKER. Le rette di CAYLEY passano a quattro a quattro pei 15 punti di SALMON, mentre questi stanno tre a tre su quelle rette. I punti di KIRKMAN si possono distribuire in 15 quadrangoli del tipo K(*c*·*ab*), K(*d*·*ab*), K(*e*·*ab*), K(*f*·*ab*) i cui lati si chiamano rette V; la retta V che unisce i punti K(*c*-*ab*),

Digitized by Google

e K(*d-ab*) si designerà col simbolo *c-d-ab*. Le rette V concorrono tre a tre nei punti di KIRKMAN e due a due nei punti D. Finalmente si chiami punto Y l'intersezione di una retta di PLÜCKER con un lato del corrispondente triangolo Δ; ogni punto Y corrisponde a un punto D e può indicarsi collo stesso simbolo; le rette V passano due a due pei punti Y.

18. Oltre a questo *Studio* troviamo nella raccolta degli scritti del CAPORALI due *Frammenti sull'esagrammo di* PASCAL (Memorie p. 252-258).

Il primo comincia coll'osservazione che il teorema di DESARGUES su due triangoli prospettivi si può porre sotto questa forma: « Se cinque lati di un quadrangolo completo passano per cinque vertici di un quadrilatero completo, il sesto lato del primo passerà pel sesto vertice del secondo ». Se ne deduce: « Dato un pentalatero completo vi sono ∞^4 figure composte di 10 punti allineati tre a tre su 10 rette passanti ciascuna per un vertice del pentalatero ». Di questa proposizione sembra che il CAPORALI intendesse fare qualche applicazione all'esagrammo, ma non mise ad esecuzione il suo disegno.

Il secondo frammento sembra far parte di uno studio analitico dell'esagrammo; il metodo di ricerca adoperato dal CAPORALI (simile a quello seguito da HESSE nella XII delle sue *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linien, des Punktes und des Kreises in der Ebene*) lo condusse alla considerazione di nuovi elementi di questa notevole configurazione, che il lettore troverà definiti nel lavoro originale.

19. Date nel piano due rette (un *bilatero*) la coniugata armonica di un punto qualunque del loro piano si chiama *polare del punto rispetto al bilatero*. Le polari di un punto rispetto ai tre bilateri a cui dànno origine tre rette prese a due a due, incontrano le tre rette ordinatamente escluse in tre punti posti su una retta che si chiama *polare del punto rispetto al trilatero*.

Similmente: le polari di un punto rispetto a quattro trilateri cui danno origine quattro rette prese tre a tre, incontrano le rette ordinatamente escluse in quattro punti posti su una retta che porta il nome di *polare del punto rispetto al quadrilatero*. Proseguendo nello stesso modo si arriva alla nozione di polare di un punto rispetto a un n — latero.

Con n rette di un piano si possono formare $n(n-1)$ — lateri. Le polari di un punto rispetto a questi formano un altro n — latero che si chiama (*primo*) *derivato* del dato, L'n — latero derivato dallo stesso punto rispetto a questo si dirà *secondo derivato* del dato. Proseguendo analogamente si giunge a definire il k^{mo} $(k>o)n$ — latero *derivato* da un dato. Chiamando o^{mo} derivato dall'n — latero, l'n — latero stesso, e $(-k)^{mo}$ derivato di esso l'n — latero avente il dato per k^{mo} derivato, si riconosce

Digitized by Google

la possibilità di costruire una serie infinita estesa in due sensi di n — lateri derivati da un dato.

A queste figure è dedicato il frammento intitolato *Gruppi di punti e rette* (Memorie p. 258-261); sono presi in speciale considerazione i casi $n = 3$ e $n = 4$.

È facile mostrare come quanto ora riportammo abbia il suo analogo in un spazio lineare qualunque a d dimensioni. Siano infatti

$$p_1 = 0 \ , \ p_2 = 0 \ , \ \ldots \ , \ p_n = 0$$

le equazioni di n spazi a $d - 1$ dimensioni appartenenti a questo spazio; e siano $q_1 \ q_2 \ \ldots \ q_n$ i risultati della sostituzione nelle p delle coordinate di un punto y. Posto per brevità

$$\frac{p_i}{q_i} = r_i \ , \ r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r \ ,$$

l'S_{d-1} avente equazione

$$r = 0$$

si dirà *polare di* y *rispetto all'*n-*edro* avente per facce i dati S_{d-1}. Sopprimendo da questo poliedro successivamente una faccia per volta nasceranno n, $(n-1)$ — edri; gli S_{d-1} polari di y rispetto ad essi hanno per equazioni

$$r - r_i = 0 \qquad (i = 1 \ , \ 2 \ , \ \ldots \ , \ n)$$

e formano l'n-edro (primo) derivato dal dato. Operando similmente su questo e così proseguendo si giungerà a un poliedro k^{mo} derivato le cui facce hanno per equazioni

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k-1}}{n} r + (-1)^k r_i = 0 \qquad (i = 1 \ , \ 2 \ , \ \ldots \ , \ n).$$

Per $k = 0$ queste relazioni ci danno il poliedro dato; per k negativo $= -h$ esse ci dànno il poliedro di cui il dato è l'h^{mo} derivato; onde si trova una serie infinita in due sensi di n-edri il cui centro è il dato poliedro.

20. Nella memoria di HESSE *Ueber die Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitten welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren* (G. di CRELLE XXXVI, 1848 p. 143-176), nella quale i più sottili procedimenti analitici si alternano ai più geniali ragionamenti sintetici per concorrere alla scoperta di recondite proprietà delle cubiche piane, il grande geometra tedesco trovò (p. 153 e seg.) che i 3. 4 punti di contatto delle tangenti che si possono condurre a una curva di terz'ordine da tre suoi punti in linea retta stanno 3 a 3 su 16 rette, le quali si possono organizzare in tre quadrilateri, sui lati di ciascuno dei quali stanno tutti i punti di contatto. Questi dodici punti dànno origine a una configurazione interessante che il CAPORALI studiò nel frammento *Sulla figura costituita dai punti di contatto delle tangenti condotte a una cubica da tre suoi*

Digitized by Google

punti in linea retta (Memorie p. 338-343). Oltre ai dodici punti di contatto (punti *fondamentali*) e ai lati dei quadrilateri suddetti (rette *fondamentali*), si possono considerare nella configurazione i 48 punti D in cui si secano le rette fondamentali fuori dei punti fondamentali. Questi stanno 4 a 4 su dodici rette δ che si separano in due sestuple; le rette di ogni sestupla sono lati di un quadrangolo. I lati di questi due quadrangoli si secano 3 a 3 in 12 punti allineati 3 a 3 su sedici rette. I 12 punti che così nascono formano una configurazione analoga a quella da cui si è partiti (1).

Nè queste sono le uniche aggiunte che il CAPORALI fece ai teoremi di HESSE; noi però ci limitiamo alla citazione di esse, rimandando per le altre al lavoro originale, e finiamo accennando come forse un problema degno di studio sarebbe quello di estendere questa ricerca alle curve di ordine superiore, cioè di esaminare la configurazione a cui dànno luogo i punti di contatto delle tangenti condotte a una curva dai punti in cui essa è secata da un'altra curva.

21. *Sulla teoria delle configurazioni* abbiamo ancora due frammenti (Memorie, p. 262-269).

Nel primo è intrapreso lo studio dei sistemi simmetrici di $\binom{n}{\nu}$ punti nei quali concorrono a ν a ν $\binom{n}{\nu-1}$ rette, ognuna delle quali contiene $n-\nu+1$ di quei punti; sistemi che il CAPORALI chiama *configurazioni elementari d'ordine* n *e classe* ν. Egli si occupa del modo di decomporre una tale configurazione in altre d'ordini e classi minori, collo scopo di pervenire infine a risolvere il problema di costruire una configurazione elementare di date caratteristiche, problema interessante che il CAPORALI pose ma non risolvette. Quindi determina il numero $[n\nu - (\nu+1)(\nu-2)]$ delle costanti da cui dipende una configurazione elementare d'ordine n e classe 1 e trova un metodo per rappresentare comodamente le equazioni delle sue rette. Finalmente espone alcune proposizioni relative a configurazioni elementari di terza classe.

E queste proposizioni sono accresciute nel secondo frammento, il quale per molti rispetti si può collegare alla memoria *Teoremi sulle curve del terzo ordine* che già ci ha occupati (n. 1).

Dell'un frammento e dell'altro (ma specialmente del primo) potranno trarre profitto non indifferente i cultori della teoria delle configurazioni piane (2).

---

(1) È agevole rendersi ragione di questi teoremi servendosi delle espressioni delle coordinate dei punti di una cubica piana mediante funzioni ellittiche di un parametro.

(2) Sembra che questa fosse la teoria preferita dal CAPORALI. E invero non me-

Digitized by Google

VII. *Geometria a quattro dimensioni.* — **22.** *Sulla geometria a quattro dimensioni* il CAPORALI ci lasciò due frammenti (Memorie, p. 313-326).

Il primo sembra essere una preparazione a investigazioni più importanti, giacchè la maggior parte di quanto contiene è nota, oppure è una facile estensione di proposizioni della geometria del nostro spazio.

Le questioni trattate nel secondo (pure analoghe ad altre dell'ordinaria geometria) si possono distribuire in tre gruppi. Le une si riferiscono alla determinazione dell'ordine e dei ranghi della ulteriore intersezione di due o tre varietà (a tre dimensioni) aventi in comune una superficie o una curva conosciuta, oppure di una varietà e una superficie aventi una curva comune, oppure infine del numero dei punti comuni a quattro varietà passanti per la stessa curva. Altre si riferiscono al luogo de' punti per cui passano $p+2$ o $p+3$ varietà corrispondenti di altrettanti sistemi lineari proiettivi ∞^p; oppure al luogo di un punto comune alle superficie basi di p fasci corrispondenti in altrettanti sistemi lineari proiettivi ∞^p o comune alle curve basi di p reti corrispondenti in altrettanti sistemi lineari ∞^p. Altre finalmente riguardano gli ordini delle Jacobiane di due varietà e un piano, di due varietà e uno spazio, o di tre varietà. Fissiamo anche l'attenzione del lettore sull'applicazione dei risultati precedenti alla determinazione del numero dei punti doppi che possiede la varietà rappresentata dal determinante $[f_r^{(i)}]$ eguagliato a zero, se $f_r^{(i)}$ è una forma algebrica in $x_1\ x_2 \ldots x_n$.

23. Alla geometria a quattro dimensioni può anche ritenersi appartenere un frammento inedito sul sistema lineare ∞^4 di quàdriche; vi appartiene poi senza dubbio un brevissimo cenno — che si legge fra i manoscritti — *Sulla rappresentazione sullo spazio ordinario di una varietà cubica a tre dimensioni di* S_4; in grazia dell'interesse che può presentare ne riportiamo completamente il contenuto.

« Le imagini delle sezioni spaziali delle varietà sono superficie φ del quarto ordine aventi comuni un punto triplo O e una curva del decimo ordine C passante sei volte per O; la curva C è proiettata da O mediante un cono di quarto ordine generale; esso è sufficiente a definire il sistema lineare ∞^4 di superficie φ. Le imagini delle sezioni piane delle varietà sono curve Γ di sesto ordine passanti tre volte per O e incontranti dodici volte C. La curva C è del genere 3 e del rango 24; essa ha 18 punti doppi apparenti. Le sue trisecanti generano una superficie gobba di ordine 24 e rango 180, passante 10 volte per C ».

---

no di sei delle memorie che egli ha lasciate si aggirano su argomenti appartenenti ad essa; inoltre la parte più originale della memoria *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (n. 12) ha per iscopo lo studio della notevole configurazione prodotta da due tetraedri mutuamente inscritti e circoscritti.

Digitized by Google

VIII. *Geometria a n dimensioni.* — **24.** Il lettore che conosce lo stato attuale delle nostre cognizioni relative agli spazi comunque estesi non troverà nel frammento *Sulla teoria degli spazi a più dimensioni* (Memorie p. 327-332) molte cose a lui ignote. Invero la prima parte si riferisce quasi per intero agli spazi lineari tangenti a una varietà e di questi si occupò il DEL PEZZO nella nota *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio a più dimensioni* (Rendiconto della R. Accademia di Napoli, Agosto 1886). La seconda parte ha invece per iscopo di estendere a spazi lineari qualunque il principio di corrispondenza e questa generalizzazione leggesi nella nota del PIERI *Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque a n dimensioni* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, Marzo 1887). Giova però rammentare che questo frammento è di data anteriore alla pubblicazione delle due note citate (1). Da ultimo noteremo che il CAPORALI si propone — senza però risolverla — la questione. « Dati in (uno spazio lineare a k dimensioni) S_k due sistemi ∞^λ l'uno di S_r e l'altro di $S_{r'}$ in corrispondenza univoca e supposto $\lambda = (\rho + 1)(k - r - r' + \rho)$, trovare il numero dei loro elementi corrispondenti che s'incontrano in un S_ρ », questione interessante di cui sarebbe desiderabile una soluzione.

Aggiungiamo l'enunciato di un teorema a cui il CAPORALI fu condotto dalla lettura della nota di chi scrive *Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completo* (Rendiconti del R. Ist. Lombardo 1884): « Dato in uno spazio a n dimensioni S_n m punti indipendenti (ove $n + 2 \leq m \leq n$), se si sega con un S_{n-1} la configurazione che essi determinano, lo spazio a $n - 2$ dimensioni traccia di quello a $n - 1$ dimensioni congiungente n degli m punti dati e lo spazio a $m - n - 1$ dimensioni traccia di quello che congiunge i rimanenti $m - n$ punti dati, sono coniugati rispetto a un sistema lineare ∞^{m-n-2} di quàdriche inviluppi ». Se in particolare è $m = n + 2$, questo sistema contiene una sola quàdrica e si ritrova il teorema oggetto della precitata nota.

IX. *Teoria delle forme algebriche.* — **25.** L'elegante memoria *Sul sistema di due forme binarie cubiche* (Rendiconto della R. Accademia di Napoli, Marzo 1883; Memorie p. 206-225) fa parte delle ricerche sulle quartiche piane che il CAPORALI annunciò nella comunicazione *Sopra una certa curva del quarto ordine* (n. 4) e contiene la soluzione del seguente problema « Data in una forma di 1ª specie un'involuzione cubica, trovarne uu'altra che abbia gli stessi elementi doppi ».

Altri risultati notevoli che si trovano nella nota medesima sono e-

(1) Cfr. la dichiarazione in questo senso del PIERI nel *Giornale di Matematiche*, T. XXVI, 1888, p. 251, nota.

Digitized by Google

nunciabili come segue: « Esistono sempre due coppie di forme binarie cubiche aventi per comune Jacobiano una data biquadratica. Se $H\vartheta$ è l'Hessiano del primo scorrimento ϑ di f su φ, la forma $J\vartheta - 6H\vartheta$ è quella rispetto a cui f e φ sono apolari. Data una forma binaria biquadratica, il problema di trovare una cubica tale che sia $(f\vartheta)_2 = 0$ ammette una o infinite soluzioni secondochè ϑ non è o è equianarmonica; in quest'ultimo caso risolvono il problema tutte le cubiche del fascio avente per Jacobiana ϑ ».

26. Questo è l'unico lavoro sulla teoria delle forme algebriche che il CAPORALI abbia pubblicato; ma egli fece su questo tema ricerche estese e profonde nell'intento di applicarne i risultati alla geometria.

Ne fa fede un voluminoso fascicolo in cui sono trattate molte questioni appartenenti alle applicazioni geometriche delle forme binarie, dal quale trarrebbero profitto coloro che si dedicano a ricerche di questo genere. Ne fanno fede ancor più chiaramente altri due grossi quaderni in 4° scritti dal CAPORALI fra il Maggio 1882 e l'Agosto 1885, pieni di calcoli simbolici relativi a forme binarie e ternarie; sgraziatamente questi calcoli ncn sono accompagnati da alcuna indicazione delle idee che guidavano il nostro autore nell'eseguirli, epperò rimangono ignoti e il movente e i risultati; la loro esistenza vale però a dimostrare che il lasso di tempo interposto fra il 1882 e il 1886, in cui il CAPORALI non pubblicò se non due brevi lavori, fu non un periodo di sosta e neppure di diminuzione nella sua attività scientifica, ma piuttosto un periodo di preparazione, i cui frutti non poterono essere colti in causa della fine inaspettata e tremenda che egli ebbe.

Dalla disamina testè compiuta degli scritti scientifici di ETTORE CAPORALI si desume come le tendenze di lui fossero spiccatamente sintetiche. Egli, più di qualunque altro dei nostri geometri, si può designare come uno scolaro del CREMONA; non soltanto nella sostanza, ma anche nella forma sempre corretta e spesso brillante del suo stile; non soltanto per la evidente predilezione che egli aveva per le considerazioni sintetiche, ma anche per aver egli invocato il sussidio dell'analisi nelle circostanze in cui questa poteva condurlo alla soluzione dei problemi che aveva in vista con maggior rapidità ed eleganza della sintesi pura.

Quando si pensa al contributo che egli arrecò alla geometria nei pochi anni in cui ad essa consacrò le sue fatiche e si considera che negli ultimi momenti della sua troppo breve esistenza egli studiava quelle questioni che è mestieri scrivere fra le più importanti che si stiano oggi agitando, il dolore per la sua morte si fa sempre più vivo, e involontariamente si ripetono le parole con cui NEWTON accompagnava il feretro di CÔTES: « Se egli avesse vissuto, noi avremmo appreso qualche cosa di più! »,

20 Novembre 1888.

Digitized by Google

XI.

CENNI INTORNO A LA VITA E LE OPERE DI FELICE CASORATI

Dalla *Bibliotheca Mathematica*, nuova serie, t. V, 1891, e dai *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, T. V, 1891.

Da FRANCESCO CASORATI — medico egregio la cui effigie esistente tuttora in uno degli atri dell'Università di Pavia serve a ricordare ai posteri l'insegnamento della Clinica medica da lui a varie riprese ivi impartito — nacque a Pavia il 17 dicembre 1835 il matematico illustre della cui opera scientifica, colla trepidazione di un ammiratore e la venerazione di un discepolo, mi accingo qui a tracciare a larghi tratti i contorni.

Non lo seguiremo negli studi che egli fece nel Ginnasio, nel Liceo e nell'Università della città in cui ebbe culla e costante dimora: quanto tali studi siano stati fertili di risultati è sufficientemente dimostrato dal suo primo lavoro (che porta la data del 5 luglio 1856) ove non è difficile scorgere in embrione quelle doti eminenti possedute da tutte le posteriori scritture del CASORATI. Ottenuto nel 1856 il diploma di ingegnere e architetto, Egli venne immediatamente scelto da F. BRIOSCHI come proprio assistente, e l'anno veniente, dietro accordi stabiliti fra questo e A. BORDONI, fu tosto elevato al grado di professore supplente di Topografia e Idrometria nell'Università Pavese. Dopo avere ivi professato l'anno di poi l'alta Geodesia, il nostro matematico fu destinato nel 1859 a insegnare nello stesso istituto, col grado di professore straordinario, l'Analisi algebrica e la Geometria analitica. E due anni dopo ottenne la promozione a professore ordinario delle stesse discipline: col quale grado nel 1863 egli succedette al MAINARDI nella cattedra di Calcolo infinitesimale, cattedra che egli illustrò fino al termine (11 settembre 1890) della sua troppo breve esistenza. Nel frattempo fece altri corsi di lezioni su la Geodesia e l'Analisi superiore nell'Università di Pavia (1865-1868) e nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano (1868-1875)(1). Ma nei

(1) Gli è appunto a questo periodo che appartiene quel corso parallelo di lezioni che nell'anno scolastico 1868-1869 fu dato da BRIOSCHI, CREMONA e CASORATI sulla Teoria delle funzioni ellittiche e abeliane, nel quale tale teoria fu svolta rispettivamente secondo i concetti di JACOBI, di CLEBSCH e GORDAN, e di RIEMANN. Rimandando il lettore per più minuti ragguagli all'accurata *Relazione* fatta su tale corso da A. ARMENANTE e

Digitized by Google

successivi anni della sua vita. Egli abbandonò tutte quelle occupazioni capaci di distrarlo dalla scienza pura, sicchè, a partire dal 1875, la sua attività didattica si concentrò negli insegnamenti di Calcolo infinitesimale e Analisi superiore che per debito d'ufficio, doveva impartire nel patrio Ateneo. Se alle date precedenti, le quali segnano altrettante tappe nella carriera del CASORATI come insegnante, si uniscono quelle che recano le sue produzioni scientifiche, si avrà la collezione completa dei momenti importanti della sua vita: chè altri non ne può offrire un'esistenza occupata esclusivamente dal ricercare, scoprire ed esporre le verità matematiche.

Quanto elevata ed efficace fosse l'opera del CASORATI come insegnante, lo dicano i numerosi discepoli che Egli per tanti anni e con sì costante sollecitudine ha eccitati e guidati nella ricerca del vero; i quali tutti ricorderanno la diligenza somma che Egli poneva nel rendere chiari i concetti più astrusi e le considerazioni più delicate che la moderna Analisi presenta; tutti potranno attestare come ogni lezione del CASORATI fosse perfetta in ciascuna sua parte, come il tema in essa trattato venisse contemplato in tutti i suoi vari aspetti, sicchè l'ascoltatore ne traeva una cognizione completa; che se i discepoli più tardi o meno vogliosi potevano talvolta segnalare fra certe lezioni e le successive dei passaggi troppo rapidi, i più valorosi trovavano appunto in ciò eccitamento a ricerche individuali. Sotto la veste dell'insegnante, quanto e forse più che nell'attitudine da Lui assunta come scienziato, il CASORATI si manifestò uno dei più strenui campioni di quell'indirizzo degli studi analitici odierni, che trova in RIEMANN il suo più illustre rappresentante, seguendo il quale l'espositore di una dottrina ha per fine costante di surrogare, per quanto si possa, il ragionamento al calcolo, la logica senza simboli al cieco meccanismo dell'algoritmo algebrico.

Un uomo d'ingegno così spiccatamente originale quale fu FELICE CASORATI non poteva certamente adattarsi al còmpito di colui che insegna una scienza quale gli fu trasmessa da' suoi precedessori; ond'Egli rappresentò spessissimo una parte diametralmente opposta. Molte e importanti innovazioni vennero da Lui apportate ai metodi usati di consueto per trattare gli argomenti che doveva svolgere nelle sue lezioni, di molte scoperte egli rinvenne in queste lo stimolo, tanto che sembra

---

G. JUNG (*Giornale di matematiche*, VII, 1869, 224-234), ci limitiamo a far noto come il CASORATI abbia diviso le proprie lezioni in tre gruppi; trattando nel primo delle funzioni monodrome nel modo adottato nella sua *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, nel secondo delle funzioni polidrome dal punto di vista propugnato dal PUISEUX, nel terzo della superficie di RIEMANN e degli integrali Abeliani.

Digitized by Google

lecito affermare che nessuno degli insegnamenti a Lui affidati lo lasciò indifferente: ed è appunto in grazia di questa preziosa facoltà di interessarsi vivamente per tutto che era chiamato a professare, che a Lui fu concesso di far progredire tanti rami di Matematica, pura e applicata (1).

Tutti i lavori del CASORATI sono redatti con somma accuratezza e con quel fine senso artistico di cui a torto taluno crede possa far a meno chi scrive di argomenti scientifici; essi si distinguono non solo per l'originalità delle idee e per la scelta dei metodi di cui la semplicità dissimula la potenza e la grandezza, ma anche per la scrupolosa esattezza nei dati bibliografici e storici; non solo per l'eleganza analitica, ma anche per la perfezione del dettato, per quella rara precisione, quella forza di espressione che sembra propria soltanto di chi domina completamente il proprio soggetto.

Una disamina completa e profonda di tutte le produzioni del nostro Matematico non troverebbe qui sede opportuna; ad essa del resto sarebbero impari le mie esigue forze; ma non debbo nè voglio passare sotto silenzio l'indicazione di alcuni almeno fra i concetti ivi sparsi che mi sembrano dotati di maggiore originalità e destinati a rimanere.

Farò cenno anzitutto di alcune idee emesse dal CASORATI ne' suoi verdi anni, quasi all'alba della sua carriera scientifica, e che gli offrirono il tema anche per parecchie fra le sue ultime pubblicazioni. Egli, fin dal 1863 e per primo, osservò come il teorema di JACOBI affermante l'impossibilità di funzioni d'una sola variabile dotate di più di due periodi o anche di due soli periodi in rapporto reale ma incommensurabili fra loro (2), dovesse interpretarsi in un senso più ristretto del consueto, ap-

(1) A sostegno di alcune asserzioni del testo, credo opportuno riportare le seguenti parole del Prof. G. COLOMBO, persona che, per la competenza tecnica e l'amicizia col CASORATI, era più d'ogni altra in grado di pronunciarle: « Io aveva creduto per diversi indizi di riscontrare in lui una grande attitudine ad alleare la scienza pura alle questioni che presenta la pratica: attitudine della quale sono un esempio i suoi studi sugli strumenti ottici; e allora, convinto che il primo bisogno di una scuola d'ingegneri sia di impartire l'insegnamento scientifico in un grado elevato bensì, ma sempre coll'occhio alle applicazioni della pratica, lo aveva eccitato a studiare la meccanica applicata alle macchine, per preparare un corso di teoria di macchine, che egli, colla sua grande coltura scientifica, avrebbe potuto svolgere magistralmente. Egli aveva accolto con entusiasmo l'idea e si era già accinto con ardore a questo studio, così nuovo per lui, quando fu richiamato al patrio Ateneo; ma io non ho alcun dubbio che egli, se avesse potuto continuare in quell'indirizzo, avrebbe potuto raggiungere nella scienza applicata quella stessa altezza che toccò nella scienza pura» (*Discorsi pronunciati ai funerali di* FELICE CASORATI, Pavia, 13 settembre 1890, p. 9).

(2) Lo si legge nella celebre memoria intitolata *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur*, Journ, für Mathem., XIII, 1832).

Digitized by Google

plicarsi cioè unicamente alle funzioni aventi per ogni valore della variabile un numero finito di valori; in conseguenza Egli credette di propugnare l'introduzione nell'Analisi e consigliare lo studio delle funzioni molteplicemente periodiche credute a torto impossibili. Se non che il pubblico matematico — per ragioni che sarebbe assai malagevole indagare — rimase indifferente a questo invito; in conseguenza, diciannove anni più tardi Egli ritenne conveniente di ripeterlo con maggior insistenza, sorreggendo le sue argomentazioni con nuove considerazioni (cito, come singolarmente importante, quella delle superficie di RIEMANN ad infiniti strati) e con esempi più persuasivi in grazia del loro intrinseco valore. E credo di non andare errato affermando che gli sforzi perseveranti del CASORATI ricevettero il premio che meritavano; dopo che WEIERSTRASS (1) prosciolse le funzioni a infiniti valori dell'ostracismo che sembrava gravare su di esse, esse devono considerarsi come facenti parte integrante dell'Analisi, e ci sembra sarebbe compiere un atto di semplice giustizia il chiamarle d'ora in poi col nome di *funzioni del* CASORATI.

Dirò in secondo luogo dell'idea di estendere al campo complesso l'ordinario Calcolo delle differenze finite, idea attuata col mezzo di parecchie interpretazioni delle formole proprie di questo calcolo. Nella prima e forse più importante di queste interpretazioni, alla variabile indipendente viene sostituita la funzione log $(x - x_1)$, ove x è la variabile indipendendente e x_1 è il centro di una corona circolare, campo comune di tutte le funzioni considerate; alle costanti subentrano le *funzioni monotrope nella corona* (tali cioè che ripigliano lo stesso valore quando la variabile descrive nella corona un cammino chiuso). Mediante queste sostituzioni ogni teorema o formola concernente il Calcolo delle differenze finite o il suo inverso dà un teorema relativo a funzioni di variabili complesse. Le conseguenze alle quali in tal modo si giunge permettono di estendere o almeno porre sotto nuova luce teorie importanti già note: le frequenti citazioni fatte dall'autore, coll'ordinaria sua scrupolosa precisione, di scritti dovuti a PUISEUX, HERMITE, JORDAN, FUCHS, MITTAG-LEFFLER, PICARD e altri basterebbero da sole a mostrare che le ricerche in questione, lungi dal formare un gruppo isolato, vengono all'opposto ad allacciarsi con altre ben note su le equazioni differenziali e le funzioni periodiche; nè posso tacere come debbasi ivi ravvisare l'influenza sul CASORATI esercitata dalle geniali ricerche sul calcolo delle operazioni che tanto occuparono i geometri inglesi verso la metà del nostro secolo (2).

(1) K. WEIERSTRASS, *Abbhandlungen aus der Funktionentheorie* (Berlin, 1886), pagina 182, nota.

(2) Cfr. in particolare parecchi dei *Mathematical Writings of* D. F. GREGORY (Cambridge, 1865) e specialmente la memoria intitolata *Demostrations of theorems in differential calculus and calculus of finite differences.*

Digitized by Google

È mio obbligo arrestarmi dipoi sul primo lavoro del CASORATI relativo alla Geometria differenziale, il cui scopo è di esporre un modo di trovare le equazioni fondamentali per lo studio di quelle proprietà delle superficie (chiamate dall'autore *assolute*) che non si perdono quando queste vengono trasformate per flessione; questo modo consiste nello studio metodico delle trasformazioni della forma differenziale quadratica rappresentante l'elemento lineare della superficie, studio fatto coll'intento precipuo di determinare quali funzioni dei coefficienti di questa forma godano (come la *curvatura integra* di GAUSS) di proprietà invariantive. Ora chi non ravvisa in questo modo l'indicazione di quella via, riconosciuta poi come la più piana, diretta, generale, epperò preferita dai più recenti e migliori espositori della Geometria differenziale, via che inoltre menò a tante capitali ricerche intorno alle proprietà delle forme differenziali quadratiche? (1).

L'affinità di queste ricerche con altre di molto posteriori mi consiglia a far cenno qui degli scritti ove il CASORATI si è occupato di una nuova definizione della curvatura delle superficie. Scambio di assumere, come GAUSS, quale misura della curvatura di una superficie in un suo punto, il prodotto

$$G = \frac{1}{R_1 R_2}$$

degli inversi dei raggi principali di curvatura, il nostro autore assume la funzione

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

A quali critiche si presti la curvatura Gaussiana e quali ragioni militino a favore del cambiamento proposto, il lettore rileverà dai lavori originali: io mi limito qui a citare il più valido fra gli argomenti addotti, cioè che secondo la nuova definizione il piano appare come l'unica superficie di curvatura nulla in ogni punto, il che non accade giusta la definizione di GAUSS. Che però quest'innovazione trovi degli oppositori, risulta da quanto il CASORATI stesso asserisce nella seconda delle sue scritture sull'argomento, e del resto è facile rendersi ragione della presenza di essi osservando che, per quanto finora si sa, la nuova curvatura non possiede alcuna cospicua proprietà pari in importanza a quelle scoperte da GAUSS nell'antica e che, adottandola, ad esempio un paraboloide ellittico e un paraboloide iperbolico con eguali sezioni principali avrebbero nei vertici

(1) L'importanza di questo lavoro fu riconosciuta anche da un giudice di insuperabile competenza: si veggano infatti, le celebri *Ricerche di analisi applicata alla geometria* del BELTRAMI.

Digitized by Google

la medesima curvatura. Quindi assai ragionevolmente il CASORATI (nella or citata pubblicazione) dopo avere osservato come per conoscere appieno la curvatura di una superficie in un punto facciano mestieri *due* numeri (*due* funzioni simmetriche dei raggi principali di curvatura), finì per limitare i suoi desideri a vedere la curvatura C considerata assieme e posta allo stesso livello della curvatura G e della curvatura media

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Ma quanto più facilmente Egli avrebbe raggiunto il suo intento se avesse fatto conoscere quelle «ricerche di geometria nascenti dall'esposto concetto di curvatura» e le «questioni di fisica e meccanica nelle quali la misura C si presenta naturalmente», di cui egli fece cenno!

Poichè la deficienza di spazio esige che io sorvoli su altre produzioni di CASORATI, che pur meriterebbero onorevole menzione — ad esempio quella in cui viene fatta conoscere una forma nuova sotto cui possono scriversi le equazioni degli asintoti di una curva algebrica, forma alla quale sarebbe doveroso concedere l'accesso in ogni esposizione delle applicazioni del Calcolo infinitesimale alla Geometria — osserverò in generale come Egli durante tutta la sua esistenza abbia preso parte attiva alle ricerche che successivamente interessarono la generalità dei matematici. Lo provano i suoi scritti provocati dalla *Theorie der Abel'schen Functionen* di CLEBSCH e GORDAM e dalle *Vorlesungen über Geometrie* di CLEBSCH, nonchè i contributi da lui arrecati alla moderna teoria delle equazioni differenziali e le aggiunte da lui fatte alle investigazioni di WEIERSTRASS e MITTAG-LEFFLER sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa (1). Lo provano eziandio gli argomenti da Lui scelti per i suoi corsi di Analisi superiore, fra i quali incontriamo la teoria delle funzioni uniformi con sostituzioni lineari in sè stesse, quando il POINCARÉ ne dimostrò luminosamente l'eccezionale importanza, e la teoria delle sostituzioni, quando una traduzione italiana della *Substitutionstheorie* del NETTO rimise in circolazione fra noi questa bella disciplina. Lo prova da ultimo il tema da Lui svolto nell'orazione che pronunziò il 4 novembre 1873 nell'Università di Pavia, in occasione della solenne inaugurazione dell'anno scolastico 1873-74 (2).

---

(1) A mettere fuori di questione il valore che possiedono queste ultime ricerche, è sufficiente rilevare come esse avessero condotto il CASORATI alla scoperta del celebre teorema che oggi porta il nome del MITTAG-LEFFLER. Il nostro matematico ha anche notato, indipendentemente dal WEIERSTRASS, che in un punto di singolarità essenziale, una funzione di variabile complessa può assumere qualunque valore.

(2) Il soggetto di questo discorso era duplice; anzitutto il CASORATI parlò piuttosto lungamente del BORDONI, e poscia, traendo occasione dai lavori geometrici di

Digitized by Google

Se le memorie scientifiche del CASORATI hanno fatto apprezzare le sue non comuni doti di investigatore geniale nella stretta cerchia di persone che si dedicano per professione alle matematiche superiori (1), a divulgare la sua rinomanza di espositore e di erudito contribuì assai potentemente la sua *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, opera che, per dirlo con le parole di un grande scienziato (2) « abilita a fare con tanto minor fatica e in un tempo incomparabilmente più breve quegli studi che prima erano giudicati fra i più ardui delle scienze matematiche »; giacchè ivi per la prima volta si trovano riunite in armonico connubio le ricerche compiute nella scuola di CAUCHY con quelle dovute a RIEMANN e ai suoi discepoli, connubio il quale produce una teorica di ammiranda semplicità ed eleganza. Però essa « non è soltanto una mirabile sintesi degli ultimi e grandiosi progressi dell'Analisi, ma è eziandio un lavoro originale sia per la nuova maniera dl coordinare teorie di una sorprendente ampiezza, arduità ed importanza, sia per la novità dei teoremi e d'ingegnosi concetti, dovuti alle proprie speculazioni dell'autore » (3).

Sventuratamente quest'opera fu pubblicata soltanto in parte: un secondo volume doveva seguire quello che possediamo e contenere, fra l'altro, la teoria delle superficie Riemanniane (4) e le memorabili ricerche di WEIERSTRASS e MITTAG-LEFFLER sulle funzioni uniformi di una variabile complessa. Il CASORATI, che fin dal 1868 ne aveva in parte preparati i materiali, continuò a lavorarvi (crediamo anzi che alcune sue posteriori scritture traggano l'origine loro da tale occupazione); ma, sia per non avere questo secondo volume raggiunta quella forma di perfe-

---

questo, delle più recenti indagini geometriche e in particolare della geometria non euclidea. Questo discorso non fu pubblicato, nè completamente nè in frammenti, e non se ne è rinvenuta alcuna traccia neppure fra le carte dell'Estinto; da esso venne estratto uno studio (tuttora inedito) sul BORDONI che venne offerto al BRIOSCHI in occasione del suo giubileo. Queste notizie mi furono comunicate colla loro consueta cortesia dai Professori BELTRAMI e G. A. MAGGI.

(1) Quanto altamente esse siano state valutate è posto in evidenza dai numerosi sodalizi scientifici, italiani e stranieri che vollero il CASORATI ascritto fra i loro membri. Senza arrestarmi a farne l'enumerazione, voglio qui rammentare soltanto come egli abbia fatto parte del Consiglio direttivo del *Circolo Matematico di Palermo* « alla creazione del quale egli ha tanto applaudito »

(2) CREMONA, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, I$_2$, 1868, p. 424.

(3) CREMONA, l. c., p. 421.

(4) Per persuadersi di quanta luce proietterebbe il II volume della *Teorica* su questo importante argomento, basta riflettere che al CASORATI si deve l'idea ingegnosissima di riguardare una superficie di RIEMANN come un sistema di reti d'indefinita finezza sovrapposte, idea che toglie gran parte delle difficoltà che offre il concepire che i diversi strati si attraversino.

Digitized by Google

zione ideale che Egli vagheggiava, sia pel desiderio che lo pungeva di rimaneggiare completamente il primo volume, Egli non si decise mai a licenziarlo per la stampa. Tuttavia non è destituita di fondamento la speranza che, ove gli eredi dell'illustre scienziato vogliano esaminare con pietosa cura i manoscritti esistenti, troveranno modo di rendere in pari tempo un segnalato servizio ai cultori dell'Analisi e un ultimo tributo d'affetto a Lui, col far sì che la *Teorica delle funzioni di variabili complesse* cessi di far parte della collezione (ahimè! troppo numerosa) di opere matematiche pubblicate incompiutamente. Con tal voto chiudo questi *Cenni*: ai quali vorrei infondere la virtù di spingere quei pochi che ancora non conoscono direttamente i lavori del CASORATI a studiarli con quell'attenzione di cui essi sono tanto degni.

XII.

VITA E OPERE DI GAETANO GIORGINI

Dal Vol. XXXI, 1893 del *Giornale di matematiche.*

GAETANO GIORGINI nacque in Montignoso (prov. di Lucca) il 15 Giugno 1795 da famiglia ricca e stimatissima che la Repubblica Lucchese aveva ascritto, per le sue benemerenze, tra quelle patrizie. In Lucca egli trascorse l'adolescenza alla corte della Principessa Elisa nella qualità di paggio ed in compagnia di essa fu a Parigi. Qui anzi visse parecchi anni e con tanto profitto vi attese allo studio delle scienze esatte che nel 1812 conseguì il *primo premio di matematica* nel concorso generale dei Licei di Parigi (1) e poco dopo venne ammesso alla Scuola Politecnica *primo per ordine di merito*: fra coloro che gli disputarono questo onore si contava MICHELE CHASLES che al nostro era e rimase legato da fraterno affetto. Due attestati (2) rilasciati al GIORGINI nel Luglio 1814 da ARAGO e POISSON dimostrano come egli non siasi addormentato sui ben meritati allori. Giova

(1) Le due soluzioni (una analitica e l'altra sintetica) della questione furono pubblicate del T. II della *Corresp. su l'École impériale polytéchnique*, p. 440-45); è titolo di onore per il GIORGINI il fatto che MANGE, dopo aver riflettuto qualche istante sulla questione, la risolve in modo conforme a quello tenuto dal giovane studente (v. l. c. nota a p. 445).

(2) Furono pubblicati in calce al Discorso pronunciato da GIOVANNI SFORZA *Nelle esequie solenni del Senatore Gaetano Giorgini celebrate nella Chiesa Parrocchiale di Montignoso il XXIII Settembre MDCCCLXXIV* (Lucca, 1875).

Digitized by Google

qui ricordare la parte che, sotto la divisa di alunno della Scuola Politecnica, egli rappresentò in uno scontro in difesa di Parigi assediata dagli alleati (30 maggio 1814) ed il rifiuto che egli oppose alle seducentissime offerte che gli vennero fatte da chi voleva trattenerlo in Francia dopo l'avvento dei Borboni. Ritornato in patria, egli non abbandonò gli studi; il frutto di essi gli valse il posto di Direttore delle acque, strade e macchie del Ducato di Lucca conferitogli dalla sovrana MARIA LUISA addì 18 ottobre 1818. Senza abbandonare tale ufficio ottenne il 3 Luglio dell'anno seguente il posto di professore di calcolo infinitesimale e di meccanica nel Liceo. Ma l'invidia s'industriò così bene a minare la posizione che con lo studio si era saputa conquistare e meritare, che poco dopo egli deliberò di ritirarsi a vita privata. Riparò allora a Firenze e, con decreto in data 1° Novembre 1825, fu scelto dal Granduca LEOPOLDO di Toscana come professore di matematiche applicate nell'Accademia di Belle Arti di quella città e membro del Consiglio direttivo del nuovo Corpo degli Ingegneri del Granducato.

Troppo lungo e qui fuor di luogo sarebbe enumerare e valutare i risultati che diede la poliedrica operosità da lui spiegata sia nel disimpegno dei doveri annessi alle suindicate cariche, sia come conservatore del Catasto, come ordinatore della pubblica istruzione in Toscana, come membro attivo dei Congressi scientifici che in Italia ebbero luogo dal 1839 al 1846, come ambasciatore presso i Duchi di Parma e Modena, come ministro degli affari esteri del Granducato (dopo il 1849) e finalmente come consigliere di stato ed ingegnere idraulico.

Costituito che fu il Regno d'Italia, re VITTORIO EMANUELE chiamò il GIORGINI a sedere nella Camera vitalizia. Dal 1862 egli abbandonò qualsia grave occupazione e ritornò nel luogo natìo, ove chiuse la sua nobile esistenza il 14 Settembre 1874 (1).

La mirabile attività del GIORGINI si spiegò di preferenza nei pratici negozi; tuttavia percorrendo le opere da lui date alle stampe riflettenti le scienze esatte (e di esse soltanto intendiamo occuparci) nasce spontanea la convinzione che egli fosse riccamente dotato di ingegno inventivo; di tali opere faremo qui una rapida rassegna, segnalando quei passi delle stesse che gli assicurano un posto nella storia delle matematiche.

---

(1) Ulteriori particolari sopra la vita privata e pubblica del GIORGINI troverà il lettore nella precitata Commemorazione, alla quale largamente attingemmo e in cui, fra l'altro, sono registrate anche le pubblicazioni del GIORGINI che noi non consideriamo nel presente scritto, perchè si riferiscono a temi estranei alla matematica pura.

Digitized by Google

1. — *Démonstratiou de quelques théorèmes de géométrie* (Corresp. sur l'Ecole imp. polyth., T. III, 1816, p. 6-9).

Si tratta delle proiezioni successive di una figura sopra le facce di un triedro trirettangolo, nell'intento di giungere al seguente teorema di MONGE: La somma o la differenza delle tre piramidi che hanno per vertice un punto qualunque del piano di una figura e per basi le tre proiezioni della figura stessa sopra tre piani a due a due ortogonali, è eguale ad una piramide avente per base detta figura piana e per vertice tersezione di quei tre piani.

2. — *Teoria delle superficie di secondo ordine di* GAETANO GIORGINI *ex-alunno della Scuola Politecnica di Francia e socio dell'Accademia Lucchese.* Lucca, 1817. 8° Pag. 61.

E' un'esposizione analitica elementare delle proprietà delle superficie di 2° ordine, scritta con quell'eleganza che è merito di LAGRANGE di avere insegnato sopra innumerevoli e fulgidi esempi. Si apre con la classificazione delle quàdriche, a cui segue uno studio delle stesse, distinguendo quelle dotate di centro da quelle che ne sono prive. Risolta la questione di determinare la specie a cui appartiene una quàdrica di data equazione, vengono gettate le basi della teoria della polarità. Lo studio delle coppie di quàdriche segantisi in due coniche guida il GIORGINI alla determinazione delle sezioni circolari di una superficie di 2° ordine ed alla generazione di una tale superficie mediante un cerchio di centro, piano e raggio variabili. Qualche facile problema serve di chiusa al lavoro, il quale appare più come un saggio di studi che come opera originale; va però rilevato che si tratta forse della prima esposizione che sia stata fatta in Italia della teoria di figure che la scuola di MONGE aveva coltivata con indiscutibile successo.

3. — *Teoremi sulle curve coniche. Memoria dello accademico Sig.* GAETANO GIORGINI, *Professore di Matematica applicata nel Liceo Reale. Letta nell'adunanza accademica il giorno 23 Marzo 1823* (Atti della R. Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, T. III, 1827 p. 63-82).

Scopo di questo scritto, piccolo di mole e non considerevole di valore, è il dimostrare direttamente per via analitica quelle proposizioni relative alla polarità rispetto ad una conica che l'autore aveva applicate nella *Teoria* precedentemente discorsa.

4. — *Teoria analitica delle projezioni del signor* GAETANO GIORGINI, *socio ordinario della Reale Accademia, pubblico professore di Matematiche superiori del R. Liceo e direttore delle acque, strade e macchie del Ducato. Letta il giorno 3 Giugno 1819* (Raccolta citata, T. I. 1821, p. 29-96).

In questo notevole lavoro vengono posti i fondamenti della teoria delle projezioni dei sistemi di segmenti rettilinei nel piano e nello spazio,

Digitized by Google

dei sistemi di aree e finalmente delle totalità costituite da segmenti rettilinei ed aree piane. I risultati generali ottenuti vengono applicati alla poligonometria, alla poliedrometria ed alla dimostrazione di teoremi geometrici e cinematici, parte nuovi e parte dovuti a MONGE, BINET e POISSON.

Da tutta la memoria emerge ad evidenza come il GIORGINI, sino dal 1819 avesse chiaramente posseduta ed ampliamente sviluppata l'idea di usare metodicamente le projezioni nella geometria analitica, idea che soltanto in tempi vicinissimi a noi è giunta in dominio del gran pubblico matematico, grazie specialmente all'*Analytische Geometrie* del BALTZER (Leipzig, 1882) ed alla *Teoria analitica delle forme geometriche fondamentali* (Torino, 1885) di E. D'OVIDIO; e si noti essere lecito affermare che l'unico punto in cui queste esposizioni moderne la vincono su quella del GIORGINI è nella metodica considerazione dei segni dei segmenti e delle aree.

5. — *Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti. Memoria del signor Ingegnere* GAETANO GIORGINI, *Ricevuta il I° Dicembre 1828.* (Memorie della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, T. XX. Parte contenente le Memorie di Matematica, 1828, p. 243-254).

Questo importante scritto è una continuazione della parte cinematica della *Teoria analitica delle proiezioni*, avendo per precipuo intento di indicare le interpretazioni che i risultati ivi ottenuti trovano nella teoria dei sistemi di forze. Mediante ragionamenti non sostanzialmente diversi da quelli che si leggono ad es. nella *Theorie der Bewegung und der Kräfte* (II Aufl., Leipzig 1879-80) di A. SCHELL, l'autore dimostra che ogni punto può essere scelto quale centro ed ogni piano quale piano di un momento principale; in conseguenza, nel primo caso è determinato il piano del momento, e nel secondo caso il suo centro. Il luogo de' centri dei momenti principali i cui piani passano per un punto P, non è che il piano del momento principale avente il suo centro in P stesso; il luogo dei centri dei momenti principali i cui piani toccano una quàdrica è una seconda quàdrica; mentre il luogo dei centri dei momenti principali i cui piani sono paralleli ad una retta data è un piano. Ad una retta arbitraria dello spazio ne corrisponde un'altra tale che una qualunque di esse è il luogo dei centri dei momenti principali i cui piani passano per l'altra; tali rette sono sempre linee di azione di due forze capaci di fare equilibrio al sistema; questo può, dunque, in infiniti modi sostituirsi una coppia di forze; il volume della piramide avente per spigoli opposti due forze equilibranti il sistema considerato è costante.

Emerge da ciò che, prima del Dicembre 1827, il GIORGINI aveva scoperto il sistema nullo; egli, dunque, lo conobbe prima del MÖBIUS, che lo

Digitized by Google

scoperse il 5 Febbraio 1828 (1) e lo fece noto nel 1833 (2); egli lo rese di pubblica ragione anche prima di CHASLES, le cui ricerche videro la luce nel 1830 (3) e si diffusero nel mondo sette anni dopo grazie all'*Aperçu historique*: i diritti di priorità del GIORGINI sembrano, quindi, indiscutibili e cominciano ad essere generalmente riconosciuti (4). Notiamo da ultimo che il GIORGINI, prima di CHASLES pubblicò il teorema dianzi citato, della costanza di volume della piramide avente per spigoli opposti due forze equilibranti un dato sistema: esso dunque non merita di portare il nome di CHASLES, come sarebbesi tentato di fare seguendo l'esempio dato dal MÖBIUS (5).

6. — *Intorno alle proprietà geometriche dei momenti di un sistema di punti di forma invariabile. Memoria del Professore Cavaliere* GAETANO GIORGINI. *Ricevuta a dì 15 Marzo 1830.* (Raccolta citata T. XXI. Parte contenente le memorie di Matematica, 1838, p. I-46).

L'intento di questa elegantissima memoria è di riempire, almeno in parte, la lacuna che CARNOT segnalava scrivendo: « Les grandes difficultés analytiques qu'on rencontre dans la Science de l'équilibre et du mouvement viennent principalement de ce que la théorie des mouvements géométriques n'est pas faite ».

Il § 1 contiene le proprietà geometriche del moto infinitesimo di un sistema rigido. In ogni tal movimento l'autore rileva l'esistenza di una notevole retta (asse) caratterizzata dalla proprietà di essere il luogo dei punti le cui trajettorie infinitesime coincidono con la retta stessa; il sistema è dotato di un moto di traslazione lungo quest'asse e di un moto

(1) C. REINHARDT, *Ueber die Entstehungzeit und den Zusammenhang der wichstigsten Schriften und Abhandlungen Möbius*, nel T. IV di *A. F. Möbius Gesammelte Werke* (Leipzig, 1887) p. 712.

(2) *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume* (G. di Crelle T. X, oppure *A. Möbius Ges. Werke*, T. I., 1885, p. 489-6513).

(3) CHASLES, *Mémorie de géométrie pure sur les systèmes de forces* (Corr. mathém., T. VI, Bruxelles 1830). I diritti di priorità del GIORGINI sono ivi (§. 24) esplicitamente riconosciuti; si può però lamentare che CHASLES non abbia fatto alcun cenno del suo antico condiscepolo nè nell'*Aperçu historique*, nè nel *Rapport sur les progrès de la géométrie*, contribuendo così, certo involontariamente, a farne porre in dimenticanza le benemerenze scientifiche.

(4) Cfr. R. DE PAOLIS *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* (Mem. dei Lincei, Ser. IV, T. I, p. 205-231); R. STORM, *Die Gebilde Iften und 2-ten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, I Thl. (Leipzig, 1892) p. 62.

(5) Cfr. la nota *Beweis eines neuen von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satz, nebst einige Zusätzen* (G. di Crelle, T. IV, oppure *A. F. Möbius Ges. Werke*, T. III (1886). p. 409-506. Il teorema in questione fu enunciato da CHASLES nel T. XVIII delle *Annales de Mathématiques*.

Digitized by Google

di rotazione attorno ad esso. La posizione dell'asse, la grandezza della traslazione e l'ampiezza della rotazione sono elementi necessari e sufficienti per la conoscenza di qualunque moto infinitesimo.

Il § 2 insegna la composizione e la decomposizione dei movimenti infinitesimi di un sistema rigido; dopo la teoria generale della composizione, l'autore si occupa del caso in cui gli assi dei moti componenti passano per un medesimo punto, cercando in particolare quando per questo punto passa anche l'asse del moto risultante; e riguardo alla decomposizione di un movimento infinitesimo in n altri, l'autore nota che esso è in generale impossibile se $n < 3$ e indeterminato se $n > 3$, arrestandosi in particolare sulle ipotesi $n = 2$ e 3.

7. — *Appendice alla Memoria intorno alle proprietà geometriche del movimento di un sistema di forma invariabile del Cavaliere* GAETANO GIORGINI. *Ricevuta a dì 3 Febbrajo 1832* (Vol. cit. p. 47-54).

L'autore comincia col rilevare che il teorema principale della memoria precedente (cioé quello che afferma essere elicoidale qualunque movimento infinitesimo di un sistema rigido) fu scoperto fin dal 1763 da GIULIO MOZZI Patrizio Fiorentino (1), ma da lui dimostrato con un ragionamento geometrico non conclusivo. E prosegue: « Per questa ragione sebbene la dimostrazione analitica datane nella mia memoria non manchi del necessario rigore, volli sull'esempio del MOZZI e per mio esercizio, ricercare una dimostrazione sintetica del Teorema, ed in questa ricerca mi avvenne di estenderlo ad ogni traslocamento anche finito di un corpo. Avevo comunicato questo risultato al prelodato Cavaliere FRULLANI, quando per lettera di altro mio dotto amico di Francia, il sig. MICHELE CHASLES, e successivamente per l'annunzio che egli medesimo ne fece al pubblico nel Fascicolo di Novembre del Bullettino delle Scienze del Barone di Ferussac per l'anno 1830, appresi che anche esso era dal canto suo arrivato al medesimo teorema, come corollario di altre più estese ricerche sopra i corpi solidi simili, delle quali l'indicato Bullettino contiene enunciati soltanto i risultati principali ».

Il GIORGINI espone da ultimo una dimostrazione geometrica semplicissima del teorema: « Un corpo solido può essere condotto da una data posizione in un'altra qualsivoglia diversa mediante un movimento continuo analogo a quello della vite » e ne indica alcuni notevoli corollari. Di questo lavoro sembra essersi tenuto conto finora (2) più per fare

(1) *Discorso matematico sopra il rotolamento momentaneo dei corpi* (Napoli, 1763).

(2) Cfr. CHASLES, *Comptes rendus* del 18 Marzo 1861, p. 495; SCHELL, op. cit. T. I, p. 311.

Digitized by Google

risalire al MOZZI la scoperta dell'asse istantaneo, che come documento attestante che dell'esistenza di questo il GIORGINI era consapevole indipendentemente da CHASLES.

8. — *Elementi di statica del Cavaliere* GAETANO GIORGINI, *uno dei quaranta della Società Italiana delle Scienze* (1) *e membro di diverse Accademie, Conservatore del Catasto ed uno dei componenti il Consiglio degli Ingegneri del Granducato di Toscana; Professore onorario dell'Università di Pisa e Pubblico Professore di Matematica applicata nell'Imperiale e Reale Accademia di Belle Arti di Firenze* (Firenze, 1835, p. XII 288).

E' questo il primo volume di un trattato completo di meccanica in quattro parti che il GIORGINI progettò ma non eseguì per intero; nello scriverlo l'autore ebbe per fine costante di rendersi intelligibile a coloro che conoscono soltanto i primi elementi della geometria e raggiunse pienamente il suo scopo: le doti di chiarezza ed eleganza possedute da questi *Elementi* li raccomandano tuttora all'attenzione degli studiosi e degli insegnanti.

Il fin qui detto, se non erriamo, dimostra ad esuberanza come il GIORGINI abbia saputo assimilarsi e magistralmente svolgere i germi di sapere che avevano a lui somministrati i celebri professori della Scuola politecnica di Francia. A lui non mancarono il genio inventivo e l'iniziativa scientifica di cui volle farlo apparire destituito il BERTRAND, nell' *Éloge de Michel Chasles* letto all'Accademia delle Scienze di Parigi il 19 Dicembre 1892 (2). Egli seppe conciliare le gravi cure di Stato e le esigenze di importanti occupazioni ufficiali con la coltivazione della geometria e della meccanica. L'entusiasmo per la scienza pura, di cui diede prove splendidissime a Parigi, non fu passeggiero capriccio, a meno che non si voglia dare questo nome a quel nobile sentimento che spinge durante quarant'anni a produrre lavori fra loro concatenati sulle parti più elevate della scienza. Sembra che al brillante Segretario perpetuo dell'Accademia delle scienze abbia troppo doluta la vittoria che il nostro riportò sul suo connazionale nel concorso di ammissione alla Scuola politecnica ed abbia voluto in conseguenza togliere ad essa qualunque valore, facendola apparire come una di quelle casuali ingiustizie di cui gli esami di tutti i paesi offrono esempi non rari. Ora a noi per converso sembra si rechi offesa a CHASLES con l'insistere sopra una circostanza insignificante, con l'adoperare a suo favore il vieto espediente dei panegiristi da dozzina,

(1) Fu eletto socio nel 1832 e pensionario anziano nel 1864.

(2) Pubblicato per la prima volta nella *Revue scientifique* del 24 Dicembre 1892 e poi nella raccolta di *Éloges académiques, Nouvelle série* (Paris, 1902) p. 37-57.

Digitized by Google

i quali, per fare apparire più maestosa la figura della persona che lodano, si sforzano di rendere più meschini e volgari i lineamenti di quelli con cui la paragonano; chè colui che meritò il nome di « Archimede del secolo XIX » appare grande anche se confrontato con i più illustri matematici di tutti i tempi.

Noi, quindi, che abbiamo sempre professati sentimenti di calda ammirazione per l'autore dell'*Aperçu historique*, crediamo non sconfessarli col tentativo che facciamo di mostrare come il ritratto che il BERTRAND fece del GIORGINI non sia in alcun modo somigliante all'originale; tentativo che, se non altro, avrà il potere di attrarre l'attenzione dei competenti (1) su un uomo che, fra gli Italiani che nella prima metà del Sec. XIX coltivarono le scienze esatte, ha diritto ad un posto ben più elevato di quello che d'ordinario si è inclini ad accordargli.

XIII.

EUGENIO BELTRAMI

Dal III vol. 1901, III Ser. della *Bibliotheca mathematica*.

Quando, nel Novembre 1883, io ebbi la fortuna di conoscere ed avvicinare EUGENIO BELTRAMI, egli era nel periodo che corrisponde alla completa maturità del suo ingegno. L'altissima rinomanza, della quale egli godeva, di scienziato eminente e di professore impareggiabile, faceva accorrere numerosi ascoltatori (fra cui mi piace ricordare LUIGI BERZOLARI ed OTTO STRUVE, VINCENZO REINA ed EMILIO BITTERLI) alle lezioni di Idrodinamica ed Elettrodinamica che in quell'anno egli impartiva nell'Ateneo di Pavia; tutti, studenti e laureati, erano attratti dall'interesse scientifico ed estetico che esse offrivano. L'impressione che in quei giorni io ricevetti dalla parola, calda e severa ad un tempo, di quel sommo maestro è una di quelle che il tempo è impotente a cancellare; essa si è ridestata, in tutta la sua forza e freschezza, nelle ore in cui — in seguito ad un invito assai lusinghiero, che ebbi il coraggio di accettare — m'occupai di esaminare nel suo complesso le opere matematiche del grande Uomo di cui da un anno piangiamo la perdita irreparabile. In esse, come nelle lezioni del BELTRAMI, la scienza e l'arte, avvinte in armonico connubio, raggiungono il fine supremo che deve proporsi qualsia scritto scientifico, quello cioè di far amare la disciplina in esso espo-

(1) Vana illusione! Il nome di GAETANO GIORGINI, si cerca invano nell'*Enciclopedia italiana* [1935].

Digitized by Google

sta. Ond'è che in nessun caso, come in quello che ha per protagonista il BELTRAMI, la vita di uno scienziato offre un più chiaro esempio di eredità di attitudini artistiche: giacchè nella famiglia di lui la tendenza verso l'arte scendeva per li rami. Infatti, eccellente incisore in pietre dure fu il suo avo paterno GIOVANNI BELTRAMI (1779-1854), valente miniatore fu il padre, ed autrice di assai lodate composizioni poetiche e musicali è le madre ELISA BAROZZI (tuttora vivente): da essa anzi il nostro matematico ricevette il primo avviamento alla musica, arte di cui non tardò a divenire profondo conoscitore ed ottimo esecutore.

Egli nacque (1) a Cremona addì 16 Novembre 1835 e frequentò le Scuole elementari, il Ginnasio ed il Liceo di quella città, eccettuato l'anno scolastico 1848-49, in cui fu alunno di quel Ginnasio di Venezia che oggi porta il nome di Marco Polo. Esauriti gli studî liceali nell'estate 1853, nel successivo Novembre si inscrisse come studente nella Facoltà matematica dell' Università di Pavia, dopo di avervi conseguito un posto di fondazione Castiglioni nel Collegio Ghislieri. Ma nell' anno seguente, accusato di avere promossi disordini contro l'Abate LEONARDI, rettore di questo Collegio, ne venne espulso assieme ad altri cinque suoi condiscepoli (2). Tale misura — forse non assolutamente ingiustificata, ma certamente troppo rigorosa — ebbe conseguenze disastrose per chi ne fu vittima; giacchè, se durante l'anno scolastico 1854-55 al Nostro fu dato di attendere ancora agli studi universitari, se potè ancora essere inscritto come studente nell'anno successivo (e così assistere a qualche lezione del BRIOSCHI), le ristrettezze della sua famiglia lo costrinsero a ritornare sotto il tetto paterno prima di avere superato gli *esami di rigore* (precedenti la laurea dottorale) e ad abbandonarlo ben presto per portarsi a Verona (Novembre 1856), ove aveva ottenuto il modesto ufficio di segretario particolare dell'Ingegnere DIDAY, direttore dell'esercizio delle Ferrovie del Lombardo-Veneto. Ivi rimase per poco più di due anni, cioè sino al giorno (10 Gennajo 1859) in cui *per motivi politici* venne bruscamente licenziato del direttore generale BUSCHE. Fortuna volle che l'annessione della Lombardia al Piemonte, avvenuta poco dopo, concedesse al DIDAY di trasferire il suo ufficio a Milano, conducendo seco il proprio segretario particolare.

---

(1) Pei dati biografici si è attinto specialmente alla *Commemorazione del Senatore Prof.* EUGENIO BELTRAMI, *letta dal Socio* LUIGI CREMONA *alla Seduta solenne della R. Accademia dei Lincei del Giugno 1900.*

(2) La lettera di congedo venne pubblicata da C. SOMIGLIANA nel cenno necrologico sul BELTRAMI inserito nell'Annuario della r. università di Pavia per l'anno scolastico 1900-1901.

Digitized by Google

A Milano il BELTRAMI imprese a rifare da capo la propria istruzione matematica; tolse «a studiare con tutta diligenza una dopo l'altra l'aritmetica, l'algebra, la geometria, la trigonometria, l'algebra superiore e il calcolo, come avrebbe fatto uno che avesse percorso tutt'altra Facoltà, che la matematica» (1). A Milano egli potè avvicinare il suo antico maestro FRANCESCO BRIOSCHI e LUIGI CREMONA, in allora professore nel Liceo S. Alessandro (ora Beccaria): con essi strinse legami di amicizia che mai si allentarono e che dovevano esercitare un'influenza decisiva e benefica su tutto il suo avvenire. Infatti egli che — per la mancanza di una laurea — si era visto sbarrato l'accesso tanto alle Scuole secondarie, quanto al corpo del Genio militare, per effetto delle pubblicazioni da lui fatte negli Annali di matematica venne nominato (Decreto 18 Ottobre 1862) Professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica nell'Università di Bologna: è merito del CREMONA (allora professore di Geometria superiore in questo Ateneo) di avere suggerito tale provvedimento, è merito del BRIOSCHI (allora Segretario generale al Ministero della Pubblica Istruzione) di averlo adottato; per effetto di esso il BELTRAMI venne d'un tratto liberato dalle pastoje d'un umile impiego amministrativo e posto in grado di consacrare tutto sè stesso alle geniali occupazioni per le quali natura l'aveva creato.

In quell'ufficio il BELTRAMI non rimase a lungo; chè, dietro proposta di ENRICO BETTI, gli veniva offerto di succedere al MOSSOTTI (morto il 20 Marzo 1863) nel posto di Professore ordinario di Geodesia nell'Università di Pisa. Dopo lungo titubare accettò e, dopo qualche indugio — dovuto a studi preparatori al nuovo insegnamento, che egli compì a Milano nell'Osservatorio di Brera, sotto la guida sapiente di G. V. SCHIAPARELLI —, nei primi di Febbrajo del 1864 passò alla nuova sede, ove avevalo chiamato un Decreto dell'11 Ottobre 1863. A Pisa il BELTRAMI si trattenne tre anni scolastici; ma, nel Settembre 1866, le condizioni di salute della propria madre lo consigliarono a chiedere di essere restituito all'Università di Bologna, come successore di DOMENICO CHELINI nella cattedra di Meccanica razionale. Tale ufficio egli tenne sino all'Ottobre 1873, quando, cioè, cedendo al seducente invito di andare a crescere il lustro della rinnovata Università di Roma, si trasferì nella capitale come titolare di Meccanica razionale ed incaricato di Analisi superiore (2). Ragioni di varia natura lo persuasero a lasciare, dopo

(1) Da una lettera scritta nel Dicembre 1860 dal BELTRAMI al CREMONA e da questo pubblicata nella succitata *Commemorazione*.

(2) Fra i discepoli che il BELTRAMI ebbe a Roma durante questa sua prima permanenza nella capitale vanno rammentati ETTORE CAPORALI, RICCARDO DE PAOLIS e G. FRATTINI.

Digitized by Google

tre anni, la Sapienza per assumere (Ottobre 1876) nell' Università di Pavia gli insegnamenti della Fisica matematica e della Meccanica superiore. Ma nella città eterna tornò quattordici anni appresso, quando, nella tristezza del vuoto lasciato per la morte di FELICE CASORATI, finì per cedere alle reiterate pressioni che gli venivano dai colleghi di colà: così, a partire dall'anno scolastico 1891-92, egli ricominciò a Roma le lezioni sopra le dottrine più elevate della Filosofia naturale, che non doveva interrompere se non pochi giorni prima della sua morte, lezioni di cui devono esistere redazioni dovute a lui stesso e che è da augurarsi vengano un giorno pubblicate, a maggior gloria del professore ed a vantaggio del progresso degli studî.

Membro delle più celebri accademie del mondo, successore del BRIOSCHI nella presidenza dell'Accademia dei Licei, Senatore del Regno d'Italia, più volte chiamato — con votazione plebiscitaria — a sedere nel Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, acclamato maestro da intere coorti di scienziati, nel pieno vigore della robusta sua intelligenza, confortato da una fedele compagna e non distratto dalle cure della paternità, sembrava che nulla gli rimanesse da desiderare e che molto ancora la scienza e la patria potessero da lui ragionevolmente attendere. Ma una malattia misteriosa lo minava sin dal 1896; e l'ala inesorabile della morte lo colpiva in Roma addì 18 Febbraio 1900, quando gli amici trepidanti concordemente facevano ardenti voti che la scienza chirurgica operasse per lui uno di quei miracoli a cui essa ci ha ormai abituati.

Tale per sommi capi è la vita di EUGENIO BELTRAMI, vita esemplare del pensatore, rigido e scrupoloso osservatore de' propri doveri, ma intento ad allontanare tutto che possa turbarlo o distrarlo delle sue occupazioni preferite. Gli unici episodi di un'esistenza siffatta sono rappresentati dalle opere che fecero del povero impiegato ferroviario uno degli astri di prima grandezza del cielo scientifico italiano. All'esame di quelle fra esse relative alle matematiche pure, noi ora ci volgiamo. Non prima però di avere osservato essere stato da molti detto e ripetuto che il BELTRAMI fu uno dei discepoli del BRIOSCHI; ora se con ciò si vollero ricordati accidentali rapporti scolastici fra quei due sommi, nulla si può obbiettare; ma se invece si intese di ritrarre un'affinità intellettuale fra il BELTRAMI e colui che dipingeva sè stesso con le parole *io sono un calcolatore* (1), nulla vi è di più falso: il semplice paragone di una pagina dell'uno con una dell'altro basta a dimostrarlo. Meglio è assai di considerare il BELTRAMI, assieme al CASORATI ed al CREMONA, come continuatori di quella benemerita Scuola pavese, che ebbe quale corifeo

(1) V. M. NÖTHER, *Francesco Brioschi* (Mathem. Annalen **50**, 1898, p. 491).

Digitized by Google

ANTONIO BORDONI, di quella scuola che benchè «di poema degnissima e di storia», non ha ancora trovato chi ne narrasse, con la debita larghezza, le gesta gloriose, chi mostrasse essere stata, nella prima metà del Sec. XIX, il principale focolare di buoni studî matematici nella penisola (1).

I. — Lo scritto che inaugura la carriera scientifica del BELTRAMI (I, 1) (2) porta la data 1° Novembre 1861 ed ha come punto di partenza il noto teorema: «il sistema delle trajettorie ortogonali di una serie di iperboli equilatere, aventi comuni gli assi, consta delle iperboli equilatere aventi per comuni asintoti gli assi delle prime». Il nostro geometra, nell'intento di generalizzarlo, si propose la questione di «trovare quei sistemi di curve piane i quali, venendo rotati per un angolo dato α in torno ad un punto del loro piano, segano i sistemi primitivi sotto un angolo costante λ parimente dato», e l'ha completamente risolta mediante questa proposizione «Si assuma una funzione A di due variabili u e v, tale che non vari mutando rispettivamente u in ue^{ia} e v in ve^{-ia} (3); indi si costituisca l'equazione

$$\frac{dv}{du} + A\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} = 0$$

e si integri: sia

$$F(u,v,C) = 0$$

l'integrale di essa, completato da una costante arbitraria C. L'equazione

$$F(y+ix,\ y-ix,\ C) = 0$$

apparterrà ad uno dei sistemi cercati. Variando in tutti i modi possibili la forma della funzione arbitraria A, si otterranno tutti i sistemi dotati della proprietà in discorso». Prendendo ad es. $A =$ cost., quell'equazione differenziale s'integra immantinente e conduce al seguente sistema di curve:

$$(y+ix)^{\frac{\lambda}{\alpha}} + (y-ix)^{\frac{\lambda}{\alpha}} = C.$$

Quando al rapporto $\frac{\lambda}{\alpha}$ si attribuisce uno dei valori 2, $\frac{1}{2}$, -1 questa equazione rappresenta, come rileva il BELTRAMI, ordinatamente un sistema

(1) Preziosi materiali per tale storia ha apprestati il BELTRAMI stesso scrivendo quelle succose notizie su gli antichi professori di matematica dell'Università di Pavia che A. CORRADI pubblicò nella I Parte delle sue *Memorie e documenti per la storia dell' Università di Pavia* (Pavia, 1878) e che sgraziatamente non furono riprodotte nella collezione delle sue *Opere*.

(2) Simboli di questo tipo servono di rinvio alle *Opere matematiche di E. Beltrami* (Milano 1902-1920).

(3) Si può ad es. scegliere come funzione A una funzione arbitraria del prodotto uv.

Digitized by Google

di iperboli equilatere, parabole e circoli; ma anche nel caso generale le curve del sistema rientrano in una categoria conosciuta: posto, infatti,

$$y \pm ix = \varrho\, e^{\pm i\omega}, \frac{\lambda}{\alpha} = -n, \; C = 2k^{-n},$$

l'equazione precedente diviene

$$\varrho^n = k^n \cos n\omega,$$

onde, al variare della costante k, rappresenta ∞^1 spirali sinusoidi. È, quindi, *merito del* BELTRAMI *di avere scoperta*, applicando un metodo generale, *una nuova e notevole prerogativa, esclusiva di una classe di curve, in cui molti rilevarono altri molteplici e singolari pregi.*

II. — L'elegante risultato, conseguito in questa ricerca di geometria infinitesimale del piano, non allettò il BELTRAMI a perseverare in un ordine di idee relativamente elementare; egli si sentì attratto verso la teoria delle superficie, più bisognosa di perfezionamenti, più promettente di applicazioni e nella quale egli era destinato a mietere tanti e così meritati allori. Ed infatti in due lavori, scritti a Milano il 1° Settembre 1862, egli prende già posto fra i discepoli e continuatori di GAUSS. Sorvoliamo su quello (I, 36) redatto in forma di lettera al compilatore degli Annali di matematica, avente carattere didattico ed il solo fine di far conoscere un'argomentazione semplicissima guidante all'equazione differenziale, in coordinate curvilinee, delle linee di curvatura d'una superficie, nonchè all'equazione quadratica avente per radici i raggi di curvatura principali in un punto della stessa; ed arrestiamoci invece sull'altro (I, 8) inspirato dalle note investigazioni di BRIOSCHI: *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate* (Ann. delle scienze matem. e fis. **4**, 1853).

Ivi all'antico concetto di sviluppoide viene suggerita l'ampia generalizzazione risultante dalla definizione seguente: « Data una linea arbitraria Γ (considerata come trajettoria), si chiama sviluppoide di Γ qualunque linea Σ tale che ogni sua tangente sia segata dalla prima sotto un angolo ω, funzione qualsivoglia delle coordinate del punto d'intersezione ». Che questa estensione sia ben lungi dall'essere oggetto di semplice curiosità emerge dal fatto che le sviluppoidi, intese nel loro significato più generale, godono di una proprietà che dianzi ritenevasi (1) sussistere per le sole sviluppoidi ordinarie; tale proprietà, dal BELTRAMI stabilita con due metodi differenti, si enuncia come segue: « Qualunque sia la legge con cui varia da un punto all'altro l'angolo sotto

(1) V. p. es. W. SCHELL, *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung* (Leipzig 1859), p. 100; zweite Aufl. (Leipzig 1898), p. 157.

Digitized by Google

cui le tangenti d'una sviluppoide sono segate dalla trajettoria, ciascuna sviluppoide è una linea geodetica della superficie luogo geometrico di tutte le sviluppoidi generate con la medesima legge». — La ricerca delle sviluppoidi di una data linea dipende in generale da un'equazione differenziale ordinaria trovata dal BELTRAMI e la cui integrazione si riduce alle quadrature quando quella linea è piana: in tal caso i calcoli relativi si possono svolgere in tutti i loro particolari e conducono a formole esplicite elegantissime. Il problema inverso — cioè la determinazione delle curve (dette sviluppanti) seganti sotto un angolo, variabile con una data legge, le tangenti di un'altra linea data — si può affrontare con buon successo applicando le equazioni generali risolutrici del problema delle trajettorie, all'uopo poste sotto forma conveniente: si giunge così a formole simmetriche e generali, contenenti una quadratura, le quali ricadono in altre anteriormente note, quando si supponga costante l'angolo ω. Nè va taciuto che le considerazioni generali svolte dal BELTRAMI, debitamente applicate, conducono anche a nuove proprietà delle sviluppoidi ordinarie; a renderne persuaso il lettore valga il seguente teorema con cui si chiude la memoria analizzata: «La superficie luogo delle sviluppoidi di angolo ω costante di una data linea, è una superficie del terz'ordine, contenente infinite circonferenze, e che può considerarsi come la trasformata per raggi vettori reciproci di un cilindro circolare».

III. — Il lavoro di geometria infinitesimale che segue quello sulle sviluppoidi ne è separato da un intervallo di alcuni anni, occupati in parte da ricerche di cui parleremo più innanzi, in parte dagli studi che diedero per risultato una delle più importanti e famose scritture del BELTRAMI. Di tali studi sembra fungere quasi come saggio una lettera (I, 430) scritta al GRUNERT addì 20 Aprile 1864; essa ha per argomento la proposizione seguente, che il fondatore dell'Archiv aveva allora stabilito con calcoli, non privi di eleganza, ma certo non esenti da prolissità: «In un punto ellittico P di una superficie si considerino tutte le corrispondenti sezioni normali; la media aritmetica dei loro raggi di curvatura in P è eguale alla media geometrica dei raggi principali di curvatura della superficie nello stesso punto P»; ora la considerazione dell'indicatrice della superficie relativa al punto — osservò il BELTRAMI — combinata con l'espressione dell'area dell'ellisse in funzione degli assi, guida tosto a qul teorema.

Il fondamentale lavoro a cui sopra si fece allusione è quello che reca il modesto titolo di *Ricerche di analisi applicata alla geometria* (I,107); la prima parte di esso è datata Ottobre 1864, la parola *fine* non ne fu mai scritta; la forma frammentaria sotto cui esso si presenta — la quale d'altronde corrisponde al titolo un po' vago che porta — ed i frequen-

Digitized by Google

tissimi richiami che vi si trovano al *Traité de calcul différentiel* del BERTRAND, uscito appunto nel 1864, fanno apparire non destituita di fondamento l'idea che si trovino in esso esposte le idee che nel BELTRAMI suscitò lo studio di quell'opera eminente. Quanto feconda fu tale lettura! Basti dire che gli è nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, che fanno il loro ingresso nella scienza quelle importantissime funzioni (invarianti di flessione) che, per la loro parentela con altre già introdotte da LAMÉ, si chiamano parametri differenziali; con lo stabilirne le prerogative più essenziali, il BELTRAMI ha loro assicurato per sempre un posto stabile nella scienza. Le considerazioni aventi per nocciolo queste nuove funzioni si riattaccano a quelle importantissime che il CASORATI fece conoscere nella memoria intitolata *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (Ann. di matem. **3—4**, 1860-61); esse non tardarono a divenire parte integrante dei trattati di geometria differenziale — basti ricordare i migliori, quelli del BIANCHI e del DARBOUX — essendo state riconosciute le più proprie per giungere con generalità ed eleganza a quegli elementi delle superficie e delle linee in esse tracciate che non mutano comunque s'inflettano le superficie stesse: curvatura, curvatura geodetica, parallelismo geodetico, sviluppanti geodetiche, ecc (1).

Non è lecito poi tacere che, nelle *Ricerche*, la teoria dei sistemi di linee nello spazio è presentata con una generalità dianzi ignota ed applicata, non soltanto ad ottenere nuovamente, ma anche ad aumentare considerevolmente le proposizioni riflettenti i sistemi di rette nello spazio, specialmente quelli relativi alle normali di una superficie. I risultati così ottenuti presero posto nella classica opera del DARBOUX, onde ci basterà segnalare i due più cospicui. Uno consiste nella seguente generalizzazione del teorema di MALUS-DUPIN: «Se un fascio di raggi luminosi normali ad una superficie si rifrange alla superficie di un mezzo eterogeneo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i raggi rifratti siano pure normali ad una superficie è che le linee lungo le quali è costante l'indice di rifrazione incontrino ortogonalmente i raggi incidenti». L'altro è compendiato nella seguente proposizione, correlativa, in un certo senso, ad un noto teorema del TERQUEM: «Se i piani tangenti comuni a due superficie toccano tanto l'una quanto l'altra nei punti di due loro linee di curvatura, la distanza dei punti corrispondenti di queste due linee è costante»; e vice-

(1) Una conferma della importanza che hanno le considerazioni svolte dal BELTRAMI sopra le funzioni invariabili, è offerta dalla memeria di K. ZORAWSKI, *Über Biegungsinvarianten* (Acta Mathem. **16**), ove il nome di lui è dato ad un'intera classe di invarianti di flessione.

Digitized by Google

versa « Se i piani tangenti comuni a due superficie toccano l'una di queste superficie secondo una linea di curvatura e se inoltre è costante la distanza dei punti corrispondenti delle due linee di contatto, anche la seconda di queste linee è di curvatura della superficie su cui è tracciata ».

Nelle *Ricerche* del BELTRAMI s'incontra pure quella notevole costruzione del raggio di curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie qualunque, che illustri trattatisti diffusero nelle scuole di tutto il mondo civile. L'inventore di essa vi ha collegate alcune importanti considerazioni sopra le superficie per le quali i raggi principali di curvatura in un punto qualunque sono ciascuno una data funzione dell'altro dimostrando due teoremi, inversi l'uno dell'altro, da cui scaturiscono quelli sulle evolute di tali superficie, che sono i primi di una teoria grazie alla quale il WEINGARTEN gode di sì alta e ben meritata rinomanza. Il BELTRAMI applicò questi risultati a due classi di superficie, una che era nota anteriormente, l'altra la cui prima considerazione appartiene — se non c'inganniamo — appunto a lui; la prima è quella delle superficie di curvatura costante negativa, di cui vedremo essersi egli poi a più riprese occupato; l'altra è quella delle superficie per cui è costante ($= k$) la differenza dei raggi principali di curvatura; ogni superficie della prima categoria ha per evoluta una superficie applicabile ad una di rivoluzione d'area minima, mentre l'evoluta di una superficie della seconda è di curvatura costante negativa $\left(= -\frac{1}{k^2}\right)$.

IV. — Benchè quanto precede sia sufficiente a dimostrare l'importanza dalle *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, pure non deve tacersi che essa è ancora aumentata dal fatto che esistono in quel lavoro sia in germe, sia nel loro primo stadio di sviluppo, molte idee originali che fornirono il tema ad altri lavori del BELTRAMI di cui parleremo più innanzi. Ma intanto va notato come, circa nello stesso tempo, la lettura di una nota di J. DE LA GOURNERIE (*Journ. de math.*, II Ser. T. III, 1858) gli suggerì una ricerca (II, 255) i cui frutti sono compendiati nelle due seguenti proposizioni: « I. Il raggio di curvatura in un punto di una linea asintotica sopra una superficie qualunque è sempre eguale ai due terzi di quello della sezione prodotta nella superficie dal piano tangente nel punto considerato (è sottinteso che si considera il ramo di tale sezione che è tangente a quella linea asintotica). II. La tangente mobile di una linea a doppia curvatura descrive sopra uno qualunque dei suoi piani osculatori una curva tangente a quella linea nel punto di osculazione; il raggio di curvatura della linea sghemba in questo punto è sem-

Digitized by Google

pre eguale a tre quarti del raggio di curvatura della curva piana nel medesimo punto » (1).

Questi due bei teoremi richiamarono l'attenzione di un distinto geometra francese — OSSIAN BONNET — il quale si affrettò a pubblicare (*Nouv. Ann. de math.* Ser. II, T. IV., 1865) due formule, da cui può farsi scaturire l'espressione algebrica del primo di essi. Il BELTRAMI, non solo le corredò di dimostrazioni convincenti (I. 297), ma seppe trarne nuove conseguenze; su una soltanto vogliamo arrestarci un istante, cioè sul teorema seguente: « i raggi di torsione delle due asintotiche incrociantisi in un punto iperbolico di una superficie sono eguali fra loro ed alla media geometrica dei raggi principali di curvatura della superficie in quel punto ». Ora, fatte le debite convenzioni riguardo al segno da attribuirsi alla torsione, non scaturisce da questa proposizione immediatamente quella che porta, per consuetudine invalsa, il nome di teorema di ENNEPER? *non sarebbe, quindi, più conforme a verità e giustizia, di chiamarla in avvenire teorema di* BELTRAMI-ENNEPER?

Il secondo dei surriferiti teoremi non rappresenta l'unico contributo che il Nostro abbia dato alla geometria infinitesimale delle linee sghembe; per converso si è a lui debitori di una considerazione della quale è notoria l'immensa fecondità, cioè del movimento che subisce, allo spostarsi di un punto sopra una curva, il triedro avente per spigoli le direzioni positive della tangente, della normale principale e della binormale. In un lavoro (I, 302) scritto a Bologna nel Dicembre 1866, egli ha determinati gli elementi del moto elicoidale infinitesimo mediante cui quel triedro passa da una qualunque sua posizione alla consecutiva; inoltre fece più tardi conoscere un altro procedimento, immaginato dal CHELINI per raggiungere lo stesso scopo; finalmente in una memoria di cinematica pura (II, 416) appartenente ad epoca posteriore (è datata 31 Marzo 1872) ed inspirata dal *Treatise on natural Philosophy* di THOMSON e TAIT, egli diede nuove prove della fertilità di quella considerazione, sia per la scienza dei moti, che per quella delle figure: così, fra l'altro, egli giunse a scoprire un'estesa legge di reciprocità abbracciante tanto la teoria delle tangenti conjugate del DUPIN, quanto quella delle tangenti sfero-conjugate del CREMONA. Che a ciò non si restringa il campo di applicabilità di siffatta considerazione riesce palese a chiunque ricordi quanto spesso

(1) A mettere in luce l'importanza di questo teorema è sufficiente notare che, in virtù di esso, la costruzione del raggio di curvatura in un punto di una linea sghemba è ridotta alla corrispondente costruzione per una linea piana, di regola più semplice; p. es. quella costruzione, per le cubiche gobbe, riesce subito ricondotta all'analoga per le coniche.

Digitized by Google

e con quanto successo il DARBOUX abbia usato, nella sua grande opera, il movimento ad un parametro di un triedro.

V. — Vedremo più avanti (§ VII) come la scoperta di quella nuova proprietà delle linee sghembe non sia la sola manifestazione dell'abilità posseduta dal Nostro nell'associare in fecondo connubio cinematica e geometria. Ma in questo momento richiamano l'attenzione nostra due lavori, pieni di vedute originali, uno (I, 208) datato da « Pisa, Maggio 1865 », l'altro letto a Venezia il 10 Agosto del medesimo anno (*Atti Ist. Veneto,* II Ser. T. II, 1865): essi concordano nella sostanza, ma differiscono per la forma; hanno per soggetto la flessione che può subire una superficie rigata quando si impone alle sue generatrici di conservarsi rettilinee.

« La difficoltà [della teoria delle superficie flessibili] », nota il BELTRAMI nell'esordio del secondo di quei lavori, « per quanto mi sembra, procede principalmente da ciò, che non possedendo noi una chiara idea del modo in cui, nel caso generale, può effettuarsi la flessione di una superficie curva, anco in un tratto di poca estensione, siamo obbligati ad affidarci intieramente alla nuda analisi, partendo dalle formole che caratterizzano la inestendibilità; e non possiamo quasi mai giovarci di quelle considerazioni ausiliarie, dirette ed indirette, che, nella maggior parte degli ordinari problemi di geometria analitica, conducono così prontamente ed elegantemente allo scopo finale ». Ma quando si tratti di superficie generabili dal moto di una retta « la difficoltà della questione viene in gran parte rimossa dal fatto che, se si fa astrazione da quelle flessioni per effetto delle quali le generatrici primitive cessano d'essere rettilinee, ci è possibile avere un'idea ben chiara e facile del modo in cui la flessione può prodursi. Infatti ogni superficie di questa classe si può decomporre mentalmente in un numero infinito di zone infinitamente sottili, ciascuna compresa fra due generatrici contigue, e si può immaginare che la flessione della superficie avvenga mediante una rotazione infinitesima eseguita da ciascuna di queste zone intorno alla generatrice che essa ha in comune con la zona precedente ». Appunto grazie a questa relativa facilità che presenta il problema della deformazione delle superficie rigate, esso venne risolto sin dall'anno 1838 da F. MINDING, il quale mostrò potersi esprimere analiticamente mediante un'unica funzione arbitraria le innumerevoli forme che può assumere, per semplice flessione, una superficie rigata. Ma il determinare tale funzione per modo che la superficie corrispondente soddisfaccia a condizioni prestabilite offre difficoltà di regola grandi e talvolta insormontabili, onde il BELTRAMI credette opportuno sostituire il procedimento di calcolo ideato dal ricordato geometra tedesco con altro meno rigido, che porta oggi il nome di *metodo di* BELTRAMI.

Digitized by Google

Applicandolo genialmente egli pervenne, senza ricorrere a calcoli complicati, ad un grande numero di nuovi risultati, la maggior parte dei quali ottennero già un posto stabile nella scienza: ne riferiremo qui alcuni come prova dell'eccellenza dal metodo che il Nostro propose: « Qualsia superficie rigata può venire trasformata per via di semplice flessione in modo: 1° che una sua linea geodetica divenga rettilinea o si muti in un'elica cilindrica; 2° che una linea arbitraria tracciata su di essa divenga un'asintotica od una linea di curvatura della trasformata; 3° che una sua linea qualsivoglia divenga o piana o linea di contatto della superficie trasformata con una superficie cilindrica; 4° che le generatrici conservino le loro direzioni ». Osserva da ultimo il BELTRAMI che in generale non è possibile di trasformare la direttrice della rigata in altra linea di specie assegnata, dal momento che ciò imporrebbe due condizioni alla trasformazione, mentre non si può disporre che di una funzione; tuttavia può accadere che la trasformazione sia effettuabile, e per potere giudicare *a priori* di tale possibilità egli stabilisce un'equazione fra gli elementi intrinseci della direttrice, la quale egli a ragione considera per fondamentale nella teoria delle rigate, in quanto esprime una proprietà della direttrice la quale si conserva, comunque si fletta la rigata su cui questa è tracciata.

VI. — Nei lavori del BELTRAMI sin qui esaminati le considerazioni analitiche rappresentano soltanto il mezzo impiegato per giungere alla scoperta di verità geometriche; in quello di cui ora stiamo per occuparci (I, 318) l'intento diretto è invece il perfezionamento della teoria delle funzioni di variabili complesse, e solo incidentalmente vi si incontrano proposizioni di geometria.

E' desso il frutto dello svolgimento di idee consegnate nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria;* è ivi posto e felicemente risolto il problema di «estendere la teoria delle funzioni di variabili complesse per modo da servirsi, invece che dell'ordinario piano di GAUSS, di una superficie definita dal suo elemento lineare $ds^2 = E.\,du^2 + 2\,F.\,du.\,dv + G.\,dv^2$ ».

Benchè questo importante lavoro sia sufficiente a porre fuor di questione la parte di protagonisti che i parametri differenziali rappresentano nella geometria sopra una superficie, pure non esaurisce l'argomento. Ed il BELTRAMI in un altro bel lavoro (II, 119), scritto a Bologna il 15 Marzo 1869 per manifestare il proprio appoggio ad un nuovo grande giornale matematico (i *Mathematische Annalen*) allora fondato dal CLEBSCH, dopo di avere compendiati, coordinandoli, molti teoremi anteriormente pubblicati, fece conoscere, insieme ad altre nuove proposizioni, la seguente formola:

Digitized by Google

$$\lim_{\rho=0}\left(\Delta_2 \log\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{R_1R_2},$$

ove Δ_2 designa il secondo parametro differenziale, ρ è la distanza geodetica fra i punti (u, v) e (o, o), mentre R_1 e R_2 sono i raggi principali di curvatura in quest'ultimo punto della superficie considerata. Nello stesso scritto il BELTRAMI ha pure insegnate parecchie formole, in cui compare il secondo parametro differenziale, nel senso di LAMÉ, di una funzione di tre variabili indipendenti $\left(\text{cioè l'espressione } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)$, somministrando così una nuova prova dell'importanza di esso nella geometria a tre dimensioni: ci asteniamo dal riferirle essendo consegnate in una raccolta scientifica che ogni matematico tiene costantemente sul proprio tavolo da lavoro.

VII. — Mentre con questi scritti il BELTRAMI perfezionava in tanti punti importanti la teoria delle coordinate curvilinee sopra una superficie e — nella seduta del 18 Luglio 1868 — con altro lavoro (I, 366) intratteneva i propri colleghi dell'Istituto Lombardo sopra l'applicazione che può ricevere alla teoria delle linee geodetiche il nesso vigente fra le equazioni dinamiche, le equazioni isoperimetriche e le equazioni a derivate parziali del primo ordine, non perdeva d'occhio le esigenze della scuola, e proponevasi di diffondere, anche fra gli ignari dei metodi a cui s'informano le *Disquistiones generales circa superficies curvas*, i più cospicui risultati ivi consegnati. A siffatto intendimento s'informa una lettura (II, 55) tenuta all'Ateneo Veneto il 25 Giugno del medesimo anno. In essa egli fece conoscere un calcolo diretto per dimostrare, col semplice ausilio di coordinate cartesiane, il « celeberrimo teorema di GAUSS » sull'invariabilità per flessione della curvatura di una superficie in un suo punto e quello analogo del MINDING relativo alla curvatura geodetica di una linea qualunque tracciata su di essa.

Nello stesso anno 1868 veniva pubblicata, tra le memorie dell'Accademia di Berlino, l'*Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke*, con cui il CHRISTOFFEL gettava i fondamenti della trigonometria sopra una superficie qualunque. Il BELTRAMI ne misurò subito il grande valore; e, non pago di farne argomento di un articolo bibliografico pel Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, vi arrecò dei complementi cospicui, che fece conoscere nell'adunanza tenuta dall'Istituto Lombardo il 1° Luglio 1869 (II, 63). Per determinare in che cosa consistano ed a che cosa ammontino, fa duopo ricordare come sia definito il nuovo elemento introdotto nella scienza dal CHRISTOFFEL sotto il nome di lunghezza ridotta di un arco di geodetica. Dati sopra una superficie curva due punti *a, b*, se intorno ad *a* si fa girare di un angolo in-

Digitized by Google

finitesimo $d\omega$ la geodetica ab, l'archetto generato dall'altro punto b, non è misurato dal prodotto dell'arco ab per $d\omega$, come succede nel piano, ma da quello di un'altra funzione (ab) per lo stesso $d\omega$; ora è appunto la funzione (ab) che si chiama lunghezza ridotta dell'arco ab. Essa dipende in generale da quattro variabili, cioè dalle cordinate de' punti a, b della superficie; ma si riduce a dipendere da due sole se quei due punti appartengono ad una assegnata geodetica. Col simbolo $[a\,r]$ e col nome di ascissa ridotta il CHRISTOFFEL designa poi una funzione che per $a < r$ differisce soltanto pel segno della lunghezza ridotta $(a\,r)$; secondo l'or citato geometra, essa è definita dall'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2[a\,r]}{\partial r^2} + k_r[a\,r] = 0 \text{ con le condizioni } [a\,r] = 0 \text{ e } \frac{\partial[a\,r]}{\partial r} = 1 \text{ per } r = a;$$

qui k_r è la curvatura della superficie nel punto r. Ma l'ascissa ridotta gode eziandio della proprietà espressa dall'equazione

$$\frac{\partial^2[a\,r]}{\partial a \cdot \partial r} = \frac{1}{[a\,r]^2};$$

e di ciò il BELTRAMI seppe trarre profitto per concludere la seguente espressione generale dell'ascissa ridotta mediante una funzione φ di una sola variabile:

$$[a\,r] = \frac{\varphi(r) - \varphi(a)}{\sqrt{\varphi'(r) \cdot \varphi'(a)}}.$$

La funzione ausiliare φ soddisfa poi all'equazione differenziale seguente:

$$\frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{\varphi'^2} = 4k_r;$$

onde, se $\overline{\varphi}$ ne è un integrale particolare e p, q, p', q', sono quattro costanti tali che sia $\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} \neq 0$, sarà

$$\frac{p\overline{\varphi} + q}{p'\overline{\varphi} + q'}$$

l'integrale generale. Nel caso speciale in cui la superficie considerata sia di curvatura costante k, si ritrova così la formola

$$[a\,r] = \frac{\operatorname{sen}\left((r - r_0)\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}$$

dovuta al CHRISTOFFEL. Nel caso generale poi, se si scrive l'equazione differenziale del terz'ordine soddisfatta dalla φ sotto la forma

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = 2k_r,$$

Digitized by Google

si ravvisa tosto nel primo membro la funzione che CAYLEY ha chiamato Schwarzian derivative per ricordare che lo SCHWARZ la studiò in una memoria circa contemporanea a quella del BELTRAMI che attualmente ci occupa: la presenza di siffatta funzione in una ricerca di geometria differenziale non recherà alcuna meraviglia a chi ricordi come essa s'incontri già nelle antiche indagini di LAGRANGE *Sur la construction des cartes géographiques* (Mém. de Berlin 1779).

Di altre formole eleganti ottenute dal BELTRAMI ci esoneriamo dal parlare; ma ciò che va ricordato è il legame che più tardi (4 Marzo 1872) egli seppe stabilire fra esse e quelle su cui si erige la geometria metrico-projettiva di CAYLEY-KLEIN. La breve nota (II, 390) in cui è consegnata tale osservazione precede di poco l'ultimo lavoro (II, 426) che il BELTRAMI consacrò alla Geometria infinitesimale. Esso concerne uno dei temi più elevati ed importanti di tale disciplina, un tema che il Nostro aveva già sfiorato nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, cioè la teoria delle linee e superficie ortogonali. Il BELTRAMI lo ha trattato servendosi di due triedri trirettangoli, uno dei quali sia mobile con una legge determinata dalla variazione di tre parametri indipendenti; introducendo poi alcune quantità già considerate dal BERTRAND, nonchè altre di carattere più generale o di più palese significato geometrico, egli arrivò per la via più naturale al teorema di DUPIN sui sistemi tripli ortogonali ed alle non meno celebri formole di LAMÉ. « La semplicità colle quali queste relazioni vengono qui dimostrate », nota egli finendo, « potrà forse conciliare qualche attenzione sul processo analitico esposto »; che non errasse in tale apprezzamento del proprio metodo è dimostrato dal fatto che, indipendentemente da lui, il DARBOUX, per stabilire le formole fondamentali della teoria dei sistemi ortogonali, ricorse appunto ad un triedro trirettangolo, la cui posizione nello spazio è funzione di tre parametri.

VIII. Se con i lavori sin qui discorsi il BELTRAMI arrecò dei contributi di valore permanente alle principali sezioni della teoria generale delle superficie, con quelli a cui ora ci volgiamo mostrò di non sdegnare lo studio di certe classi di superficie.

Nel primo, che in ordine cronologico incontriamo (fu scritto a Pisa il 14 Aprile 1865) estese a tutte le superficie di rotazione una bella proprietà scoperta da LIOUVILLE in quella generata dalla rotazione della trattrice attorno al proprio asintoto; gli si offerse così l'occasione per stabilire alcune nuove proprietà di detta curva. La ricerca dell'evoluta della trattrice guida ad una curva notissima (la catenaria); mentre quella delle sue evolventi mena a curve, ognuna delle quali rotando è capace di generare una superficie per cui è costante la differenza fra i raggi di

Digitized by Google

curvatura in qualunque punto: così il BELTRAMI fu ricondotto ad occuparsi di una classe di superficie che aveva incontrato nelle sue *Ricerche di analisi* e di cui in tale occasione notò una nuova generazione.

La superficie di rotazione avente per meridiano la trattrice venne studiata ancora dal BELTRAMI per altri scopi, come diremo più avanti (v. § X); ma ora vogliamo rilevare come lo studio della memoria del DINI *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi principali di curvatura è costante* lo abbia indotto a proporsi di «trovare tutte le superficie gobbe i cui raggi principali di curvatura hanno fra loro in ciascuno punto una relazione costante non data *a priori*» e, contemporaneamente al DINI, trovò (I, 244) che le sole elicoidi godono di quella prerogativa, risultato bellissimo che ben presto venne collocato fra i teoremi classici della geometria infinitesimale.

Più esteso è il lavoro sulle superficie ad area minima (II, 1), presentato dal BELTRAMI all'Accademia di Bologna il 5 Marzo 1868. «Ce beau travail», scrive il DARBOUX (1), «contient une Note historique très-étendue qui nous a permis, du moins l'espérons, de n'oublier aucun travail important publié sur notre sujet avant 1860». Ma esso contiene altro ancora. Notiamo anzitutto alcune relazioni — le quali portano il nome di *formole di* BELTRAMI — che dànno i parametri differenziali misto e di second'ordine delle coordinate x, y, z di un punto di una superficie in funzione dei coseni di direzione X, Y, Z della normale e dei raggi principali di curvatura. Applicandole nell'ipotesi che si tratti di una superficie ad area minima, il Nostro arriva ad una rappresentazione analitica generale di tali superficie, la quale sta in una relazione assai stretta con quella di WEIERSTRASS. Essa conduce, fra l'altre cose, ad una speciale corrispondenza univoca tra i punti di una superficie minima ed i punti di un piano, a cui giunse per via diversa anche RIEMANN; siccome essa associa ad ogni superficie minima una funzione $f(w)$ di variabile complessa, così nasce la questione di determinare quali mutazioni subisce $f(w)$ qundo la superficie venga mossa comunque nello spazio: risolvendola il BELTRAMI offerse il primo esempio della ricerca generale delle relazioni che passano fra le trasformazioni della funzione $f(w)$ e quelle che in conseguenza risente la corrispondente superficie minima. Egli poi, finendo, ha considerato anche le superficie parallele a quelle d'area minima: per esse è costante la somma delle curvature principali in un punto arbitrario.

IX. — Le investigazioni del BELTRAMI, di cui additammo sin qui i felici risultati, abbracciano, si può dire, tutta la Geometria infinitesi-

(1) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. III (Paris, 1894), p. 314.

Digitized by Google

male delle superficie e del nostro spazio. Un argomento però rimase ad esse estraneo; un argomento che la traduzione da lui fatta di una celebre memoria di GAUSS (1) ed i doveri annessi alla carica che egli ebbe di professore di geodesia dovevano necessariamente fare entrare nell'ambito delle sue meditazioni: alludiamo alla teoria delle carte geografiche o, se meglio piace, alla rappresentazione di una superficie sopra un piano. Ora a questo soggetto il BELTRAMI dedicò infatti una memoria (I, 262), la quale occupa un posto eminente nella collezione de' suoi scritti, non solo grazie ad una proposizione importantissima che insegna, ma anche per la luce inattesa che projettò poi sopra questioni geometriche fondamentali e pel nuovo orientamento che essa diede al corso dei pensieri del suo autore.

Nell'esordio della memoria in questione (datata da Pisa, 31 Maggio 1866), il BELTRAMI osserva che nella maggior parte delle ricerche che furono istituite dai geometri sulla teoria delle carte geografiche si presero le mosse o dal principio della conservazione degli angoli o da quello della conservazione dei rapporti d'area; ma è chiaro potersene scegliere qualche altro ed è evidente che, quando si tratti di una carta destinata a servire alla misura delle distanze, sarebbe convenientissimo proporsi che alle geodetiche della superficie corrispondessero le rette del piano, giacchè, eseguita tale rappresentazione, le questioni concernenti triangoli geodetici sarebbero ridotte a semplici questioni di trigonometria piana. Ora, se si considera la superficie definita dell'elemento lineare

$$ds^2 = E \,.\, du^2 + 2F \,.\, du \,.\, dv + G \,.\, dv^2,$$

il problema di rappresentarla punto per punto su un piano in modo che alle geodetiche corrispondano rette di questo, equivale alla ricerca delle condizioni affinchè l'equazione differenziale di queste linee abbia la forma

$$du \,.\, dv^2 - dv \,.\, du^2 = 0.$$

Paragonando questa all'equazione differenziale generale delle geodetiche si ottengono *quattro* equazioni differenziali fra *tre* funzioni incognite; da ciò emerge che il problema enunciato è in generale impossibile; ma, combinando opportunamente le equazioni trovate, si vede che affinchè il problema si possa risolvere è necessario e sufficiente che l'elemento lineare della superficie proposta sia riducibile alla seguente forma:

---

(1) *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla rappresentata, di C. F. Gauss* (Ann. di matem., T. IV).

Digitized by Google

$$ds^2 = R^2 \frac{(v^2+a^2)\,du^2 - 2\,uv\cdot du\cdot dv + (u^2+a^2)\,dv^2}{(u^2+v^2+a^2)^2};$$

la superficie stessa è quindi di curvatura costante $\frac{1}{R^2}$. Si conclude pertanto che «le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni geodetica una retta sono quelle la cui curvatura è dovunque costante». Questa proposizione mostra non esistere le sperate rappresentazioni di una superficie sopra di un piano, svela invece un'interessante proprietà caratteristica delle superficie a curvatura costante e suggerisce il bel problema — risolto poi dal DINI — di stabilire una corrispondenza fra due superficie curve, tale che ad un punto corrisponda un punto e ad una geodetica un'altra geodetica.

Ora, nel torno di tempo in cui veniva composto il lavoro testè riassunto, l'HOÜEL in Francia ed in Italia il BATTAGLINI si adoperavano a diffondere le idee rivoluzionarie di BOLYAI e di LOBATSCHEWSKY, e veniva dissepolta e pubblicata l'«Habilitationsschrift» di RIEMANN *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Il BELTRAMI seguì con interesse crescente tutte queste pubblicazioni; anzi di quest'ultima fece una traduzione commentata, della quale parla in due lettere scritte ad ANGELO GENOCCHI (1) e che, pel loro interesse storico, giudichiamo opportuno di qui riferire:

Bologna, 9 Giugno 1868.

«Dietro quanto mi scrive oggi il professore CREMONA mi prendo la libertà di inviarle sotto fascia il manoscritto della traduzione di una memoria postuma del RIEMANN, interessantissima per la estrema importanza e vastità del suo soggetto, al quale, bisogna dirlo, è poco adeguata la brevità dello sviluppo.

Intorno alla mia traduzione debbo notare in primo luogo che ho voluto essere fedelissimo al testo, pel timore che altrimenti facendo io potessi alterare il vero senso di un dettato che in molti punti dà luogo a dubbiezza di interpretazioni. Quindi la traduzione non potè riuscire il più delle volte schiettamente italiana. Mi sono permesso alcune innovazioni di linguaggio che sono prontissimo a ritirare quando me ne verranno proposte di migliori, ma sono poche, anzi forse due sole: la parola

(1) Gli originali di tutte le lettere del BELTRAMI al GENOCCHI sono conservati nella Biblioteca Comunale Passerini-Landi di Piacenza.

Digitized by Google

metricità, nell'immaginare la quale mi corse al pensiero la sua sorella atomicità, già adottata dai chimici, e che può all'uopo essere surrogata da *rapporti metrici*, traduzione letterale di *Massverhältnisse*; e le parole *stero* e *costruzioni steriche* per tradurre *Raumgrössen* e *Raumkonstruktionen*, al posto delle quali si potrebbe dire *grandezze spaziali* e *costruzioni spaziali*.

A fianco della traduzione ho inserite delle annotazioni, stese *currenti calamo* e per *uso interno* (usando la frase degli speziali), vale a dire destinate propriamente per me solo. Quindi tali note o non dovrebbero esser lette, o lo dovrebbero essere con molta e molta indulgenza, perchè le più fra esse sono piuttosto indicazioni destinate a servirmi come di guida per fare attenzione a quei punti che mi cagionarono le maggiori difficoltà, di quello che commenti propriamente detti e definitivi. Vi sono poi moltissimi altri punti che meriterebbero dilucidazione ed ai quali mi riservo di pensare in seguito, giacchè il soggetto non è di quelli che invitino senza stento ad una continuata meditazione, come avverrebbe se l'esposizione fosse bensì concisa ma corredata di tutti gli elementi indispensabili all'intelligenza, anzichè enigmatica perfino nelle definizioni di alcuni enti, come Ella ben vedrà.

La parte III ed ultima è quella che mi è sembrata meno accessibile delle altre, cosa tanto più spiacevole in quanto che è quella che accenna lontanamente a risultati di estrema importanza. In quella parte, più che nelle altre, diventerebbe indispensabile di avere almeno le basi del metodo generale con cui RIEMANN deve avere studiato le varietà molteplicemente estese.

Ella troverà in due mie annotazioni qualche allusione ad un mio modo di interpretare i risultati della geometria così detta non-euclidea. Se Ella desidera qualche cenno intorno a ciò potrà rivolgersi al prof^re^. CREMONA che ha avuto fra le mani un mio manoscritto contenente la completa costruzione *reale* della planimetria di LOBATSCHEWSKY. Il fondo delle ricerche di LOBATSCHEWSKY ricade indubbiamente nella dottrina toccata da RIEMANN, ma con questa differenza che RIEMANN fa vedere perfettamente bene quali siano i postulati dell'ordinaria matematica, mentre LOBATSCHEWSKY non precisa in alcun punto le sue premesse. Ma su questo argomento parmi inutile entrare in ulteriori particolari, tanto più che non sono lontano dall'intenzione di pubblicare alcuni dei miei studi in proposito, incoraggiato appunto dall'appoggio che essi trovano nel lavoro di RIEMANN, venuto da poco soltanto a mia conoscenza,

Godo che questa occasione mi abbia permesso di rivolgere direttamente la parola ad una persona che altamente stimo, e mi è grato che essa siami stata fornita da un'altra non meno egregia persona, qual'è l'ottimo amico mio il prof^re^. CREMONA.

Digitized by Google

Ella non si dia alcuna premura pel rinvio del manoscritto, del quale non ho bisogno, avendo il testo tedesco».

Bologna 23 Luglio 1868.

«Ricevetti a suo tempo la graditissima sua lettera dell' 11 Luglio, insieme colla traduzione manoscritta della Memoria di RIEMANN che Ella poteva tenere anche più a lungo, avendo io la Memoria originale.

Già Ella avrà ben rilevato che di questa Memoria non ho inteso che in alcuni punti il senso (o almeno ho creduto di capirlo): mentre in parecchi altri punti, e dei più importanti i miei sforzi sono per adesso riusciti vani. Ciò vale sopratutto per la terza sezione, che dovrebbe essere la più importante, concernendo le applicazioni al mondo sensibile. Lasciamo al Sig^r. DEDEKNID la cura di pubblicare il commento promesso alla memoria in discorso: egli è a ciò molto idoneo, primieramente per essere stato conoscente di RIEMANN e allievo della stessa scuola, e in secondo luogo per aver già dato saggio di sapere lucidamente esporre argomenti non facili.

L'anno scorso, quando nessuno sapeva di questo lavoro fondamentale di RIEMANN, io aveva comunicato all'ottimo CREMONA un mio scritto nel quale davo un'interpretazione della planimetria non-euclidea, che mi sembrava soddisfacente. Il CREMONA non ne giudicò diversamente, ma mi fece una obbiezione di massima, dicendomi che poichè io usavo l'ordinaria analisi, che è fondata sul concetto euclideo, non potevo tenermi certo che con ciò solo io non avessi pregiudicato il finale risultamento.

Questo discorso per verità non mi soddisfaceva, perchè mi pareva che quando uno spiega un nuovo fenomeno col mezzo di leggi note, non si può legittimamente pretendere che egli debba ancora provare non potersi lo stesso fenomeno spiegare con altre leggi, rimote dalle comuni. In questo caso non vi potrebbe mai essere alcuna ipotesi scientificamente provata. Comunque sia, quell'obbiezione fece sì che io lasciassi dormire lo scritto, e di ciò sono ora contento perché alla fine del medesimo avevo arrischiato un giudizio sulla stereometria, non-euclidea, che adesso non credo equo. Ma lo scritto, purgato di questo fallo, uscirà sul Giornale di Napoli, nella sua forma originale, salvo qualche aggiunta che posso azzardare ora, perchè sostanzialmente concordante con alcune delle idee di RIEMANN.

Stante la prossima pubblicazione di questa qualunque siasi ricerca sul soggetto, credo inutile di dargliene un cenno sommario qui, ciò che forse non potrei fare chiaramente. Ma le dirò che vi troverà la piena conferma di quanto Ella scrive, cioè che il postulato della retta non sia

Digitized by Google

sufficiente a definirla. Anzi questa considerazione è stata precisamente il punto di partenza delle mie ricerche.

Un punto dove io non mi troverei perfettamente d'accordo con Lei, sarebbe nella grande ripugnanza che Ella mostra ad invocare le osservazioni astronomiche in appoggio dei principii della geometria. Forse LOBATSCHEWSKY e RIEMANN non hanno bene esternato il loro pensiero in tal proposito (supposto che io dal canto mio lo interpreti rettamente). I postulati della meccanica si fondano su fatti esterni, su esperienze: eppure nessuno dubita che l'imperfezione dei nostri mezzi di osservazione possa infirmare l'esattezza dei loro enunciati. In altre parole basta *concepire* che si possano provare con osservazioni e sperienze — La cosa può considerarsi anche sotto un altro punto di vista. Data per es. una sfera materiale, la sola trigonometria sferica non può servire ad assegnarne il raggio: occorre perciò qualche misura effettiva, qualche sperienza. Nello stesso modo, se la geometria stabilisse dei teoremi relativi ad una classe di enti fra cui si trovasse il piano, non si potrebbe riconoscere il piano fra tutti questi enti se non col mezzo di qualche dato sperimentale. Non importerebbe occuparsi della precisione dei mezzi usati a rilevare questo dato; basterebbe *concepire* che questo dato occorre, e che non può venire che dal di fuori... »

X. — Il lavoro di cui fa cenno questa lettera è il *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* (I, 374), il primo degli scritti che, per usare le belle parole di LUIGI CREMONA «diedero al BELTRAMI quasi di slancio quella riputazione che si andò sempre più diffondendo sino a divenire ammirazione universale». Esso apparve nel momento in cui ferveva accanita la lotta fra gli idealisti, disposti ad accettare le nuove dottrine geometriche, benchè in aperto contrasto con i risultati dell'esperienza, ed i realisti pronti a deridere coloro che nutrivano fede nella possibilità della geometria di LOBATSCHEWSKY. Per ridurre al silenzio gli oppositori misoneisti un mezzo di irresistibile potenza si offriva spontaneo, quello cioè di presentare l'esempio di una superficie, regolare come il piano e la sfera, nella quale le linee corrispondenti alle rette di quello ed ai circoli massimi di questa, cioè le linee geodetiche, si comportassero come le rette del piano non-euclideo. Questa è l'idea geniale che balenò dinanzi alla mente del BELTRAMI; per tradurla in atto egli era mirabilmente preparato dalle ricerche che riferimmo nel § prec., e fu appunto applicando i risultati di esse che egli venne condotto ad ammettere l'esistenza di una superficie semplicemente connessa, ove l'elemento lineare fosse esprimibile sotto la forma seguente:

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\,du^2 + 2\,u\,v \cdot du \cdot dv + (a^2 - u^2)\,dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2};$$

Digitized by Google

una siffatta superficie è di curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ e le sue geodetiche si comportano in un modo che corrisponde esattamente a quello delle rette nella geometria di LOBATSCHEWSKY.

Quanto il BELTRAMI abbia contribuito con tale osservazione, magistralmente illustrata nel suo *Saggio*, al trionfo delle idee da lui patrocinate è noto a chiunque abbia seguito, nelle varie sue fasi, lo svolgimento della geometria non-euclidea. Ma, poco dopo la pubblicazione di quello scritto, da geometri illustri (1) vennero manifestati dei gravi dubbi sulle premesse del BELTRAMI, venne cioè avvertito non essere certa l'esistenza di superficie del tipo a cui questi ricorse per rappresentare, senza snaturarlo, il nuovo sistema di geometria. Sembra che il BELTRAMI si sforzasse di dissiparli; pare almeno che a tentativi di tal genere debba la vita una memoria (II, 394), ove è studiata con cura scrupolosa la superficie generata dalla rotazione della trattrice attorno al proprio asintoto, con lo scopo di dedurne gli elementi per una costruzione semplice ed esatta della superficie medesima. Non avendo essi conseguito il fine a cui miravano, il GENOCCHI, in una delle sue migliori memorie (2), ripetè quegli appunti in modo ancora più particolareggiato ed energico, sostenendo non essere dimostrato che l'equazione a derivate parziali, caratteristica delle superficie di curvatura costante negativa, ammetta almeno un integrale soddisfacente a tutte le condizioni imposte alla pseudo-sfera per servire alla rappresentazione del BELTRAMI. Di risposte da questi date non vi è alcuna traccia, nemmeno nel carteggio che tenne col suo collega di Torino: forse egli s'avvide che quelle obbiezioni sgraziatamente erano fondate; ma la constatazione definitiva di tal fatto, cioè la dimostrazione completa dell'inesistenza di superficie di curvatura costante negativa regolari in tutta la loro estensione, non venne compiuta se non dopo la morte del Nostro matematico (3). La rappresentazione immaginata dal BELTRAMI è dunque limitata, ed il bell'edificio con tanto amore elevato, se non cade al suolo, si mostra però di solidità ed estensione minore di quanto erasi creduto. Se può sembrare esagerazione il dire essere omai compiuta la missione storica dal destino affidatagli (cioè quella di validamente cooperare all'adozione generale delle idee

---

(1) HELMHOLTZ in Revue des cours scientifiques 1870, p. 499 e F. KLEIN in Bulletin des sciences mathém. et astron. **4**, 1871, p. 345.

(2) *Sur un mémoire de* DAVIET DE FONCENEX *et sur les géométries non euclidéennes* (Mem. della r. accad. delle scienze di Torino **29**$_2$); veggasi specialmente l'*Appendice*.

(3) D. HILBERT, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung* (Trans. of the American mathem. society **2**, 1901).

Digitized by Google

riformatrici di LOBATSCHEWSKY), è però con un senso di profondo rammarico che si è costretti a constatare come la più popolare e geniale delle opere del BELTRAMI sia quella che maggiormente presta il fianco alla critica; nè vale a pienamente confortarci il pensiero che il difetto esistente nella sua struttura è contrabilanciato da qualità indiscutibili e che il proemio del *Saggio d'interpretazione* è meritevole di prendere posto, nella collezione dei classici italiani, accanto alle più belle pagine di GALILEO.

Da quest'epoca (1868) in poi non ha mai cessato l'interesse del Nostro per tutto ciò che si riferisce, più o meno direttamente, ai principii della geometria. Valga a provarlo in primo luogo un breve nota (II, 392) ove è insegnata una definizione della trattrice, come inviluppo delle sue tangenti, che consegue dall'espressione data da LOBATSCHEWSKY per l'angolo di parallelismo. Parecchie prove di esso sono poi offerte dal carteggio che in quel tempo egli ebbe col GENOCCHI, nel quale troviamo (1) additato il vizio dell'argomentazione proposta dal CARTON (2) per dimostrare il postulato di EUCLIDE, notizie (3) sopra ricerche intese a determinare chi fosse lo SCHWEINKART (4), di cui è parola nella corrispondenza epistolare fra GAUSS e SCHUMACHER, ed un giudizio motivato sopra l'articolo dell'HOÜEL *Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide*. Un attestato di pubblica ragione di tale interesse è inoltre offerto dalla bellissima comunicazione fatta all'Accademia dei Lincei il 17 Marzo 1889 per presentare sotto la debita luce, l'opera — di cui allora erano generalmente ignoti il valore ed il significato — del P. SACCHERI *Euclides ab omni naevo vindicatus* (IV, 348). Possiamo aggiungere che alla geometria non-euclidea il BELTRAMI non cessò dal pensare nemmeno quando aveva consacrate tutte le forze del proprio ingegno allo studio dei fenomeni naturali; ne è una prova la scoperta da lui fatta dell'essere le equazioni generali dell'elasticità vincolate al postulato euclideo (III, 383); osserva inoltre un suo egregio discepolo (5) « come egli mostri, in qualche paasso, d'avere rivolto lo sguardo al partito che la Fisica potrebbe trarre dall'ipotesi di una diversa natura geometrica dello spazio, concetto ardito, più esplicitamente avanzato da CLIFFORD; nè egli avrebbe potuto mai perdere di vista quegli spazi curvi, dai quali aveva preso trionfalmente le mosse ».

(1) Lettera del 4 Gennajo 1870.

(2) Presentata dal BERTRAND all'Istituto di Francia il 20 Dicembre 1869.

(3) Lettera del 21 Gennajo 1870.

(4) Individuo oggi ben noto.

(5) G. A. MAGGI *Commemorazione* inserita nell'Annuario della r. univ. di Pisa, anno 1900-1901.

Digitized by Google

XI. — Con questi cenni siamo ancora ben lungi dall'avere esaurìto l'esame degli scritti del BELTRAMI dovuti all'impulso dato da RIEMANN. Al movimento intellettuale prodotto dalla celebre «Habilitationsschrift» si connette infatti anche la *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* (I, 406) (1) ove le più essenziali considerazioni contenute nel *Saggio*, convenientemente generalizzate, porgono la piena giustificazione di alcuni asserti riemanniani e notevoli illustrazioni di altri. Non è questo l'unico lavoro del BELTRAMI ove s'incontrino considerazioni iperspaziali, ma in esso vengono presentate con maggior coraggio e nel modo più esplicito; l'Autore che in altri scritti (2) aveva invocata, come propria giustificazione, l'autorità di GAUSS, qui crede opportuno avvertire: «Certe locuzioni di cui per amore di brevità faccio uso frequente non parranno, io credo, nè stentate nè oscure a chi guardi più alla sostanza che alla forma. L'attento lettore non avrà da fare alcuno sforzo per intenderle senz'altra spiegazione, restandogli del resto piena facoltà di non attribuire loro che un significato meramente analitico». Estendendo le considerazioni fondamentali del citato *Saggio*, egli definisce uno spazio a n dimensioni mediante la seguente espressione del suo elemento lineare:

$$ds = R\frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}}{x},$$

ove le $n+1$ variabili $x, x_1, \ldots, x_n$ sono fra loro legate della relazione

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2.$$

E' uno spazio, dall'autore ammesso per semplicemente connesso, in cui le geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari fra le coordinate, in cui è possibile il movimento senza deformazione, in cui la distanza ϱ fra due punti (x) e (x') è determinata dalla formola:

$$\cosh\frac{\varrho}{R} = \frac{a^2 - x_1x_1' - \cdots - x_nx_n'}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)(a^2 - x_1'^2 - \cdots - x_n'^2)}}.$$

(1) Crediamo utile riferire qui una correzione ad essa dal BELTRAMI stesso segnalata in una lettera scritta al GENOCCHI da Venezia il 6 Agosto 1869: «Approfitto dell'occasione per ritirare una frase della mia memoria *Sugli spazii di curvatura costante*, che non corrisponde esattamente al mio pensiero, e che ho lasciato correre soltanto per ciò che la stampa di detta Memoria avvenne molti mesi dopo che fu composta, ed in epoca nella quale mi trovavo molto occupato di altre cose. La frase, cui alludo è contenuta nell'ultima linea della pag. 17 (dell'esemplare a parte) e nelle prime due della pag. 18. La vera considerazione che mi sembra doversi fare è quella esposta nella nuova mia Memoria *Sui parametri differenziali* (che ebbi l'onore di spedirle recentemente), dalla linea 11 (dal basso) della pag. 13 alla linea 11 (dall'alto) della pag. 15».

(2) Alludiamo specialmente a quello sui parametri differenziali (v. § XII).

Digitized by Google

Lo spazio stesso si può definire anche mediante altre forme dell'elemento lineare, fra cui meritano di venire segnalate le seguenti:

$$ds^2 = \left(\frac{Ra\,dr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2}(d\lambda_1^2 + \ldots + d\lambda_n^2), \text{ con la condizione } \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1,$$

$$ds^2 = \frac{d\xi_1^2 + \ldots + d\xi_n^2}{1 - \frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{4R^2}},$$

$$ds^2 = \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_2^2 + \ldots + d\eta_{n-1}^2}}{\eta};$$

la seconda venne enunciata da RIEMANN e mette in evidenza essere lo spazio considerato di curvatura costante negativa (*spazio pseudo-sferico*, secondo BELTRAMI); la terza invece prova essere $\eta = 0$ l'equazione di uno spazio piano, trajettoria ortogonale di tutte le geodetiche che passano per un punto situato all'infinito. Cambiando nelle formole precedenti R, a, x risp. in iR, ia, ix, si ottengono le formole che competono ad uno *spazio sferico*; la distanza ϱ fra due punti (x), (x') di tale spazio è determinata dalla formola:

$$\cos\frac{\varrho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1' + \ldots + x_n x_n'}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)(a^2 + x_1'^2 + \ldots + x_n'^2)}}.$$

Siccome le «sfere geodetiche» di uno spazio pseudosferico sono spazî sferici, cosí si giunge alla notevole conseguenza che «la geometria sferica può considerarsi come contenuta nella pseudo-sferica».

Un'aggiunta rilevante alle formole ed alle proposizioni esposte nella *Teoria fondamentale* apportò lo SCHLÄFLI, scoprendo che il più generale spazio a n dimensioni avente le geodetiche rappresentabili mediante equazioni lineari si ottiene assoggettando lo spazio considerato dal BELTRAMI ad una trasformazione omografica arbitraria; e questi si affrettò a mostrare (II, 385) come l'espressione dell'elemento lineare del nuovo spazio si possa dedurre, con un calcolo assai elegante, dall'espressione dell'elemento lineare dell'antico.

A proposito di queste ricerche il BELTRAMI comunicò ad ENRICO D'OVIDIO, con lettera del 25 Dicembre 1872, alcune notizie che, grazie alla loro eccezionale importanza, meritano di venire qui riprodotte (1):

(1) La citata lettera venne pubblicata per la prima volta nella *Commemorazione* del BELTRAMI letta dal Prof. D'OVIDIO dinnanzi all'Accademia di Torino (Atti della r. acc. delle scienze di Torino **35**, 1899-1900).

Digitized by Google

« Le dilucidazioni che a lei possono occorrere, circa il punto indicatomi della mia *Memoria* sugli spazii di curvatura costante, sono tutte contenute in un'altra *Memoria* molto anteriore (del 65 o 66) intitolata: *Risoluzione del problema*, ecc., citata nella Nota 1, al *Saggio sulla Geometria non-euclidea*, stampato nel Giornale di Napoli. Mi sia lecito il dire che questa quistione è precisamente quella nella quale, se non sono in inganno, io ho introdotto un elemento veramente nuovo nella ricerca analitica circa la natura degli spazii; e ciò è tanto vero, che gli è appunto per questa via che io sono entrato, senza volerlo e quasi senza saperlo, nelle dottrine di LOBATSCHEWSKY, RIEMANN, ecc., nelle quali io sono poi andato a cercare delle verificazioni, e che, alla loro volta, mi hanno suggerito altre ricerche secondarie, a cui, altrimenti, non avrei pensato. In una parola, ecco il principio che io credo enunciato e dimostrato da me per la prima volta: *La Geometria generale*, cioè senza il postulato d'EUCLIDE, *è analiticamente la Geometria degli spazii in cui le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari.* S'intende bene che io parlo dei soli spazii dotati di elemento lineare *quadratico*. RIEMANN ha lasciato intravvedere la possibilità d'altri spazii; ma è probabilissimo che la considerazione di questi sarà per molto tempo infinitamente più inutile, se così si può dire, di quelli della Geometria non-euclidea.

Le dirò anche, e questo potrà giovare al di lei scopo, l'ordine cronologico dei miei studi in argomento. Dapprima un'osservazione, buttata là da LAGRANGE in una delle sue Memorie sulle carte geografiche, mi ha condotto a cercare se ci fossero superficie rappresentabili sopra un piano, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da linee rette; il che è quanto dire, superficie rappresentabili con coordinate curvilinee u e v, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da un'equazione lineare in u e v. Nella citata *Memoria* del 66 ho trovato che tali superficie dovevano avere necessariamente la curvatura costante (positiva, negativa o nulla). Più tardi, nel *Saggio*, ho mostrato, *partendo da questo fatto*, che nella ipotesi della curvatura *negativa* la Geometria di queste superficie è identica a quella di GAUSS e di LOBATSCHEWSKY. In seguito, volendo estendere queste considerazioni allo spazio, sgomentandomi (a torto) delle difficoltà che presentava la risoluzione, nel caso di tre dimensioni, del problema già da me risoluto nel 65, tentai di costruire la soluzione *a priori*, cioè per induzione, e fortunatamente ci riuscii osservando che in luogo della equazione del *Saggio* si può scrivere:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

Digitized by Google

formole che, aggiungendo una dimensione, suggeriscono di porre:

$$ds^2 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2.$$

Verificai dunque che *due* equazioni *lineari* fra le tre variabili t, u, v definiscono una linea geodetica, cioè rendono $\delta \int ds = 0$. Ma appena conseguito questo risultato, che io sviluppai in modo prolisso e coll'aiuto di variabili ausiliarie (specie di coordinate polari non-euclidee), cominciai a sospettare che il teorema fosse vero per n qualunque, e verificando questa congettura giunsi alla dimostrazione che forma il principio della *Memoria* sugli spazii di curvatura costante. — Più tardi, quando imparai a conoscere la teoria di CAYLEY, mi accorsi che il suo *assoluto* era precisamente quel luogo *limite* che io otteneva dall'equazione $w=0$, ossia $x = 0$, e compresi che l'identità dei risultati era dovuta a questa circostanza, che nella Geometria proiettiva (analitica) si ammette già per dato che le equazioni lineari rappresentino linee di minima distanza, cosicchè questa Geometria studia, inconsapevolmente, gli spazii di curvatura costante. Io ho avuto il torto di non pubblicare questa osservazione, che fu poi fatta dal KLEIN e corredata da lui di molti sviluppi, a molti dei quali io non avevo punto pensato. In questo modo il mio *principio della linearità* è stato naturalmente dimenticato, ed è stato sostituito da quello della *proiettività* che gli equivale completamente. — Dicevo che a torto io aveva temuto di non poter seguire, per $n > 2$, il processo tenuto per le superficie: infatti recentemente lo SCHLÄFLI ha svolto, sostanzialmente, questo processo per n qualunque negli Annali di matematica, ed ha così dimostrato (e generalizzato omograficamente) il punto di partenza della *Memoria* in quistione».

Quattro anni più tardi, nell'epoca in cui il Nostro aveva già scelte le questioni di filosofia naturale come principale soggetto delle sue feconde investigazioni, egli porgeva un nuovo importante complemento alla sua *Teoria* stabilendo — in una memoria presentata all'Accademia dei Lincei e di cui venne pubblicato soltanto un riassunto (III, 23) — le formole da porsi a base della cinematica degli spazi di curvatura costante; sono formole che comprendono come caso particolare quelle che, nella cinematica ordinaria, vanno sotto il nome di EULERO, e che ne ammettono altre correlative non somiglianti ad altre anterioremente note. Il BELTRAMI ne ha dedotte inaspettate illazioni, fra cui va notato il seguente teorema: «In un n-spazio di curvatura costante esiste sempre, quando n è pari, per qualsivoglia movimento elementare di un sistema rigido, un centro istantaneo di rotazione ed un piano istantaneo di scorrimento. Quando invece n è dispari, non esiste in generale alcun centro istantaneo; ma, se ve ne è uno, ve ne saranno infiniti appartenenti ad

Digitized by Google

una retta». Quando lo spazio è euclideo, per $n = 2$ e $n = 3$ si traggono da questa proposizione risultati noti da tempo, e per n qualunque fatti osservati nel 1865 dallo SCHLÄFLI; ma *in generale essa addita una differenza di struttura estremamente importante fra gli spazi di curvatura costante ad un numero pari e quelli ad un numero dispari di dimensioni, differenza che posteriori ricerche geometriche e meccaniche hanno confermata in più modi.*

XII. — Un legame indiscutibile e profondo, quantunque non confessato e nascosto, esiste fra codeste ricerche iperspaziali del BELTRAMI ed una memoria ove si incontrano nel loro stato di completa maturità e massimo sviluppo alcune idee consegnate nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria* e nel lavoro che tratta *Della variabili complesse sopra una superficie qualunque.* E' la *Memoria sulla teorica generale dei parametri differenziali* (II, 74), letta all'Accademia di Bologna il 25 Febbraio 1869, compendiata dal DARBOUX nella sua grande opera, ed i cui risultati sono di una fecondità che «ebbe recente conferma nell'applicazione che ENRICO HERTZ fece dei principii di quella teoria alla sua nuova esposizione della Meccanica Razionale» (1). Serve di lontana preparazione ad essa una breve nota, scritta nel Dicembre 1866, *Intorno ad una trasformazione di variabili* (I, 306), avente per soggetto le forme quadratiche (finite e differenziali), delle quali appunto è esclusivamente parola nei primi due paragrafi della memoria suindicata. Questi due paragrafi sono indispensabili per «stabilire (come si propose di fare il BELTRAMI) la teoria generale dei parametri differenziali, liberandola da ogni restrizione non necessaria, sia circa il numero delle variabili, sia circa il significato delle medesime». Applicando le proposizioni in essi esposte, il Nostro, estendendo un teorema di JACOBI, dimostra la proprietà invariantiva delle funzioni

$$\Delta_1 . U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} . \frac{\partial U}{\partial x_s} , \quad \Delta_1 . UV = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} . \frac{\partial V}{\partial x_s} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

ove U, V sono funzioni omogenee arbitrarie delle variabili $x_1, \ldots, x_n$, e, posto

$$ds^2 = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r . dx_s ,$$

A_{rs} è il quoziente del complemento algebrico di a_{rs} nel determinante $a = |a_{ih}|$ pel determinante stesso. Quelle due funzioni vengono chiamate *parametro differenziale primo* (o di *primo ordine*) della funzione U e *parametro intermedio* (o *misto*) delle funzioni U, V.

Notiamo ora come gli studi del BELTRAMI sopra l'algebra delle sosti-

(1) G. A. MAGGI, *Commemorazione* citata.

Digitized by Google

tuzioni lineari, cioè quegli studi che lo guidarono a concepire la teoria dei parametri differenziali sotto la sua forma più comprensiva ed astratta, lo abbiano condotto ad altri risultati, che non è lecito di passare sotto silenzio. Alcuni (II, 380) sono collegati alla celebre espressione data da LEJEUNE-DIRICHLET per la funzione potenziale d'un ellissoide, ed hanno l'intento di rendere più semplici e chiare le verificazioni che ne diedero E. PADOVA e DEL GROSSO.

Altri risultati (II, 437) ebbero invece come loro punto di partenza le ben note ricerche di KRONECKER e CHRISTOFFEL sopra le forme bilineari. Lo scopo che si propose il BELTRAMI è di emanciparsi dall'ipotesi, ivi costantemente fatta, che le due serie di variabili siano soggette a sostituzioni lineari identiche, oppure inverse l'una dell'altra. Ammettendo invece che siano fra loro indipendenti, ma entrambe ortogonali, egli trovò che qualunque forma bilineare può ridursi, senza introdurre immaginari, ad una certa forma canonica; soltanto quando essa è del tipo

$$\sum_s \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} y_s,$$

ψ essendo una forma quadratica nelle x, le due sostituzioni lineari da impiegarsi coincidono. Se poi si fa uso di sostituzioni lineari non ortogonali fra loro indipendenti, si possono ridurre contemporaneamente a forma canonica *due* forme bilineari. Esprimendo convenientemente, nel linguaggio della geometria pluridimensionale, alcune delle proposizioni ottenute, egli giunse ai seguenti teoremi, generalizzazioni di altri noti: « con una opportuna rotazione effettuata in uno spazio lineare di n dimensioni attorno ad un centro, è possibile sostituire qualunque correlazione nella stella con una polarità rispetto ad un cono quàdrico; nello spazio a n dimensioni due stelle omografiche si possono sempre sovrapporre in modo che i loro centri coincidano e che gli n raggi doppî della emergente corrispondenza costituiscano un sistema di n rette a coppie ortogonali ».

XIII. — Se volgiamo uno sguardo all'insieme delle indagini del BELTRAMI sin qui analizzate non tarderemo a persuaderci che esse si seguono l'una all'altra con legge di continuità, quasi con la rigorosa concatenazione di causa ed effetto. Ed invero dalle sue investigazioni di geometria differenziale egli fu gradatamente trascinato da un lato ad occuparsi delle questioni che concernono i principii della geometria e quindi ad estendere i propri metodi agli spazi comunque estesi, dall'altro a generalizzare la teoria dei parametri differenziali e quindi, in via sussidiaria, ad occuparsi delle forme algebriche o differenziali, e così a penetrare, per un'altra porta, nella teoria delle varietà a quantesivogliano

Digitized by Google

dimensioni. Ci apprestiamo ora a mostrare come una terza strada lo abbia guidato alla medesima disciplina: è per ciò necessario che torniamo addietro di molti anni, per considerarlo quasi all'esordio della sua luminosa carriera di scienziato e di insegnante.

Nella seduta che tenne l'Accademia di Bologna il 12 Marzo 1863 il nostro geometra presentava un'elaborata memoria (I, 45) — di cui si affrettava a pubblicare un riassunto nel periodico allora fondato dal BATTAGLINI (T. I. p. 109) — intesa a trasformare omograficamente e dimostrare per via analitica il teorema che stabilisce l'esistenza del circolo dei nove punti di un triangolo. Ne è base la considerazione di un quadrangolo completo, avente per punti diagonali i punti A, B, C, e di una retta arbitraria r del suo piano; questa sega la congiungente di due vertici del quadrangolo in un punto, del quale si può trovare il conjugato armonico rispetto a quei vertici; i sei punti così ottenuti appartengono ad una conica Γ, circoscritta al triangolo ABC: è la *conica di nove punti* di BELTRAMI. Se r ruota attorno ad un punto P, Γ descrive un fascio avente per punti base A, B, C ed un quarto punto P', il quale è legato al punto P da una corrispondenza quadratica, sostanzialmente identica a quella vigente fra i punti conjugati rispetto ad un fascio di coniche. Il BELTRAMI ne fece uno studio esauriente e ne mostrò molteplici applicazioni.

Fra le proposizioni che in tal modo egli ottenne vanno riferite due che, grazie alla loro singolare eleganza, fecero, specialmente in Germania, una grande impressione e furono punto di partenza di numerose ricerche. Eccone gli enunciati: I. Il centro del cerchio circoscritto ad un triangolo è il baricentro dei centri dei circoli inscritti ed ex-inscritti nel medesimo. II. Se dai vertici di un triangolo si conducono tre rette fra loro parallele e di ciascuna si trova la simmetrica rispetto alla corrispondente bisettrice si ottengono tre rette concorrenti in un punto. Sulla I attrasse l'attenzione dei geometri il GRUNERT dandone una dimostrazione analitica (1) e provocandone così altre di vario genere (2); a lui si deve se il BALTZER, inserendola ne' suoi reputati *Elementi di matematica* (3), la rese famigliare persino agli studenti delle Scuole medie. Anche della II il GRUNERT diede una dimostrazione analitica (4), invitando altri a conge-

(1) Archiv der Mathem. und Phys. **42**, 1865, p. 354-356.

(2) V. gli articoli di NOEGGERATH, LOBATTO, C. SCHMIDT, REUSCHLE, STRUVE e STAMMER nello stesso Arch. **43**, 1865, p. 89-91, 234-235, 238, 364, 483-487; **44**, 1865, p. 119, 120-124, 335.

(3) Vedi *Elemente der Mathematik*, II. Bd. (Leipzig 1883), p. 108; oppure *Planimetria* (trad. CREMONA), 2. ed. (Genova 1875) p. 176.

(4) Archiv der Mathem. und Phys. **43**, 1865, p. 102-103.

Digitized by Google

gnarne una prettamente elementare; a tale invito rispose — oltre a C. SCHMIDT (1) — il BELTRAMI stesso che, in una lettera scritta da Pisa il 7 Aprile 1865 (I, 431), espose un ragionamento di insuperabile semplicità atto a provare la verità di quel teorema. Ci sia lecito osservare che il II dei teoremi di BELTRAMI è molto meno importante del primo, perchè è un semplice caso particolare di altro ben noto ai cultori della geometria del triangolo (2); ma ci sembra che a *lui si debba attribuire la considerazione delle simmetrie rispetto alle bisettrici di un triangolo*, di cui è notorio l'uso fecondo in quel ramo della matematica.

Continuando nell'ordine di idee che lo guidarono alle nozione ed alle proprietà della conica di nove punti, il BELTRAMI — contemporaneamente al PROUHET (3), ma con altri intendimenti — si proponeva di estendere allo spazio l'una e le altre (I, 73). E vi giungeva partendo dalla considerazione di un sistema di otto punti, determinabili, mediante coordinate tetraedriche, come segue:

$$(a, b, c, d), (-a, b, c, d), (a, -b, c, d), (a, b, -c, d), (a, b, c, -d),$$
$$(-a, b, c, -d), (-a, b, -c, d), (-a, -b, c, d);$$

preso poi un piano arbitrario σ di equazione

$$lx + my + nz + pw = 0,$$

esso è segato dalla congiungente di due qualunque dei punti dati in un nuovo punto, del quale si può trovare il conjugato armonico rispetto ai due primi. I ventotto punti così ottenuti appartengono ad una superficie del terz'ordine contenente gli spigoli del tetraedro di riferimento, cioè sulla superficie — già prima considerata da CAYLEY — di equazione:

$$\frac{la^2}{x} + \frac{mb^2}{y} + \frac{nc^2}{z} + \frac{pd^2}{w} = 0;$$

è dessa l'analoga nello spazio della conica di nove punti. In particolare si vede che: « I punti di mezzo dei ventotto segmenti determinati dai centri delle otto sfere inscritte in un tetraedro qualunque appartengono ad una superficie del terz'ordine contenente i sei spigoli del tetraedro (4) ».

---

(1) Id. p. 290-293.

(2) Alludesi qui alla seguente proposizione: « Se tre rette uscenti dai vertici di un triangolo concorrono in un punto, altrettanto accadrà per le loro simmetriche rispetto alle bisettrici degli angoli del triangolo » (CASEY, *A sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*, V ed., Dublin 1888, p. 166; G. BRUCE HALSTED, *Elementary sinthetic geometry*, New-York 1892, p. 147; etc.).

(3) *Analogies du triangle et du tétraèdre. Cercle des neuf points, sphère des douze points* (Nouv. ann. de mathém. Sez. **2** 1863 p. 132-138).

(4) Teorema enunciato anche come *Question 663* nelle Nouv. annales de mathèm. 1863, p. 336, e ritrovato più tardi dall'ECKHARDT nel § 3 de suoi *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes* (Mathem. *Ann* **5**, 1872).

Digitized by Google

Indipendentemente da HESSE (*Ges. Werke*, p. 346), BELTRAMI ha notato che quella superficie è anche il luogo dei poli del piano σ rispetto alle ∞^3 quàdriche delle rete che ha per base gli otto punti di partenza; di più ha dimostrato essere

$$a\sqrt{\lambda} + b\sqrt{m\mu} + c\sqrt{n\nu} + d\sqrt{p\pi} = 0$$

la condizione di contatto della superficie stessa col piano

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \pi w = 0,$$

cioè l'equazione tangenziale di essa. Sopra altre eleganti proprietà da lui stabilite non ci è concesso arrestarci, ma due cose vanno rilevate. Una è che la detta superficie cubica è reciproca di quella di STEINER, onde il geometra di cui ci occupiamo va annoverato fra i primi che investigarono questa importante figura geometrica. L'altra è che, se s'immagina il piano σ ruotare attorno al punto P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, la superficie corrispondente passerà costantemente pel punto P' $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, le cui coordinate sono legate a quelle di P dalle relazioni seguenti:

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = \frac{\delta\delta'}{d^2};$$

fra P e P' ha dunque luogo una relazione birazionale, sostanzialmente identica a quella che l'ECKHARDT (mem. cit.) incontrò quattro anni più tardi.

Dodici anni dopo il BELTRAMI, in uno scritto comunicato all'Accademia di Bologna il 25 Febbraio 1875 (III, 1), ritornò sopra questioni congeneri, per generalizzare il celebre teorema di FEUERBACH «il cerchio dei nove punti di un triangolo è tangente ai quattro cerchi inscritti in questo». Ivi egli ha incidentalmente stabilite notevoli prerogative di una speciale curva del terz'ordine, che è la trasformazione omografica della ipocicloide tricuspide, ed ha posto sotto veste projettiva il teorema di SIMSON affermante trovarsi sopra una stessa retta i piedi delle perpendicolari calate sui lati di un triangolo da un punto della circonferenza circoscritta.

Questa proposizione — che il BELTRAMI preferiva chiamare teorema di STEINER «perchè STEINER lo ha per primo completato colla considerazione essenzialissima dell'inviluppo della retta contenente i piedi delle tre perpendicolari» — diede poco dopo argomento ad un altro suo lavoro, il quale venne comunicato all'Accademia di Bologna il 7 Novembre 1876 (III, 53). In esso molte delle considerazioni contenute negli scritti indicati nel presente § vengono estese ad uno spazio lineare a $n-1$ dimensioni governato da una metrica projettiva; alla conica di nove punti ed alla figura correlativa corrispondono così un luogo steineriano dell'ordine n ed un inviluppo steineriano della classe n;

Digitized by Google

il primo si spezza in due luoghi degli ordini $n-1$ e 1 quando la metrica sia euclidea, nella quale ipotesi il secondo acquista uno spazio lineare a $n-2$ dimensioni multiplo secondo $n-1$.

Ed ecco in qual modo il BELTRAMI venne per un terzo cammino condotto a contribuire alla geometria pluridimensionale.

XIV. — L'eleganza dei calcoli, che rendono così piacevole ed istruttiva la lettura del gruppo di memorie esaminate nel § prec., si ritrova in una seconda piccola collezione di scritti di vario argomento, abbraccianti un periodo di tempo più che decennale.

Il più antico è consacrato alle cubiche gobbe e venne letto all'Istituto Lombardo nelle adunanze del 20 Febbrajo e del 7 Maggio 1868 (I, 354). Prescindendo dalla parte critico-polemica — nella quale il Nostro prese a sostenere in modo abile e vigoroso certi diritti di priorità del CREMONA misconosciuti dal DRACH e dagli illustri geometri (CLEBSCH, HESSE, NEUMANN) che se ne fecero protettori —, esso contiene una rappresentazione analitica delle curve in questione, per semplicità e duttilità non inferiore ad alcuna altra congenere. Essa consiste nel considerare qualsia cubica gobba come trasformazione projettiva della parabola cubica inviluppata dagli ∞^1 piani rappresentati, al variare del parametro u, dall'equazione cartesiana

$$\frac{x}{a+u}+\frac{y}{b+u}+\frac{z}{c+u}=1\,.$$

In qual modo il BELTRAMI ne deduca, con la massima naturalezza, le più cospicue prerogative delle curve in questione, non ci è concesso qui di far conoscere; ma va invece rilevato *come egli abbia introdotto nella teoria delle curve gobbe del terz'ordine un nuovo importante elemento, cioè l'iperboloide determinato da tre tangenti di una tale curva*; associandolo al punto d'intersezione dei tre corrispondenti piani osculatori si ottiene una corrispondenza univoca, da lui segnalata fra i punti dello spazio e quegli iperboloidi.

Un'analisi ancora più raffinata adoperò il BELTRAMI in un breve lavoro (II, 182), datato da Venezia 15 Ottobre 1871, ed avente per soggetto la teoria delle coniche. Le nuove vedute che egli seppe introdurre in un argomento tanto trito e ritrito, le bellissime formole che egli stabilì e le geniali trasformazioni a cui egli le sottopose rendono la lettura di quel lavoro raccomandabile a coloro che intraprendono lo studio della geometria analitica e non ad essi soltanto. Esso poi è sicuro di non andare sommerso nel gran mare dell'oblio per altre due ragioni. Una si è per avere provocata quella lettera del CREMONA (datata 11 Gennajo 1872) ove è segnalata l'inattesa corrispondenza univoca fra la geometria dello spazio rigato e la teoria di un certo sistema di coniche,

Digitized by Google

che ha poi dato origine a tante interessanti investigazioni (1). L'altra ragione consiste nel trovarsi in esso adombrato un importante algoritmo, la cui invenzione risale a CHELINI, e che il BELTRAMI ha magistralmente svolto, prima in un corso di lezioni tenuto a Pavia l'anno 1876-1877 (2) e poi in una memoria (III, 168) presentata all'Accademia di Bologna il 27 Febbrajo 1879 e dedicata appunto «alla cara e venerata memoria di DOMENICO CHELINI». Numerosissime ed importanti sono le applicazioni che ne fece il **BELTRAMI**. Quelle relative alle curve del second'ordine completano un lavoro anteriore, specialmente per quanto si riferisce ai triangoli (di PONCELET) inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra (3). Di novità e valore più grandi sono adorne quelle aventi per soggetti le curve razionali, piane e sghembe, in particolare le cubiche gobbe. Riguardo a queste ultime merita di essere esplicitamente notato che il **BELTRAMI**, nel § 9 delle sue *Ricerche di geometria analitica*, si occupò di quella posizione speciale in cui si trovano due cubiche gobbe quando in una è inscritto un tetraedro circoscritto alla seconda; vi sono allora ∞^1 tetraedri in analoghe condizioni. Ora la scoperta di questa particolare situazione di due curve del terz'ordine si attribuisce di consueto all'**HURWITZ**, il quale vi arrivò nel 1875 (4), ma non la fece conoscere che in uno scritto datato 18 Dicembre 1878 e apparso nei primi mesi del seguente anno (5); *onde ci sembra fuor di questione che Beltrami vi giunse*

(1) Pubblicando questa lettera (Giorn. di matem. **10**, 1872, p. 47-48) il **BELTRAMI** osserva: «Come qui si vede, la teoria degli spazii ad n dimensioni si può utilmente invocare anche nelle ricerche dell'ordinaria geometria, quando si assumano come coordinate indipendenti di tale spazio i coefficienti di una linea o di una superficie di data specie, la quale tien luogo in tal maniera dell'elemento semplice o *punto* di quello spazio. E' un concetto assai fecondo, il quale del resto è già stato eminentemente utile alla scienza: ognuno vede infatti che la dottrina analitica della dualità non è che l'applicazione del concetto medesimo al caso più semplice e più immediato, a quello cioè della retta e del piano».

(2) S. PINCHERLE, *Commemorazione di Eugenio Beltrami* (Rendic. dell'acc. di Bologna, 1899-1900).

(3) Fra le proposizioni esposte dal **BELTRAMI** notiamo la seguente: «Quando due coniche ammettono un triangolo circoscritto alla prima ed inscritto alla seconda, le angenti della prima conica nei punti comuni ad essa ed alla seconda, incontrano di nuovo la seconda conica nei punti di contatto di questa colle tangenti comuni ad essa ed alla prima conica». Assai prima di lui essa era stata osservata da **CAYLEY** (*On the porism of the in-and circumscribed triangle*; Philos. Trans. **151**, 1861; *Mathem. Papers* IV, 292-308; § IV); ma il Nostro ne trasse un corollario che abilita a costruire una delle due coniche quando si conosca l'altra.

(4) Cf. l'articolo *Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumkurven III. Ordnung* (Mathem. Ann. **19**, 1882).

(5) *Über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesonder über die Schliessungsprobleme* (Matem. Ann. **15**, 1879).

Digitized by Google

dal canto suo; a lui poi spetta la considerazione della speciale superficie rigata di sesto grado costituita degli spigoli di quei tetraedri e la determinazione delle sue principali singolarità. — Che il medesimo principio si possa adoperare per investigare le proprietà di certe superficie dimostrò il Nostro nell'ultima parte delle sue *Ricerche*, ove della superficie romana di STEINER vengono stabilite, con procedimento uniforme, le più caratteristiche proprietà.

Del resto, già prima di licenziare per la stampa codesto lavoro, il BELTRAMI, il 2 Gennajo 1879, aveva intrattenuto i suoi colleghi del l'Istituto Lombardo (III, 151) sulla convenienza di invocare gli stessi principii per risolvere questionii attinenti alla teoria delle superficie cubiche. In tale comunicazione egli dimostrò, con una eleganza ed una semplicità che possono dirsi perfette, come, partendo da un'equazione esaedrale di una superficie del terz'ordine, si possa ottenerne univocamente l'equazione pentaedrale e come, inversamente, prendendo le mosse da questa, si possa giungere alle infinite equazioni esaedrali con cui essa può rappresentarsi; non occorre dilungarci sui particolari di queste trasformazioni che il FIEDLER popolarizzò riproducendole nella sua traduzione di uno dei trattati del SALMON (1).

Se con ciò abbiamo esaurita l'enumerazione delle principali applicazioni fatte dal Nostro di quello che potrebbe opportunamente designarsi col nome di algoritmo di CHELINI-BELTRAMI, siamo convinti di essere ben lungi dall'avere completata l'indicazione delle questioni in cui esso può venire applicato con successo; e non possiamo che associare il nostro al suo voto che altri prosegua nella via che egli ha spianata; è presumibile che in conseguenza le nostre cognizioni sulle curve e le superficie del quart'ordine, nonchè la geometria degli iperspazi, compiano qualche notevole progresso.

Prima che chiudiamo questa rassegna degli scritti di geometria analitica del BELTRAMI, ci corre l'obbligo di fare menzione di alcuni suoi scritti minori che, se non contribuirono a stabilirne la fama, servono a completare la sua fisonomia di scienziato. Poniamo fra essi anzitutto le soluzioni di alcune Questioni delle Nouvelles annales de mathématiques (I, 95). Vanno poi segnalate le argomentazioni da lui adoperate (I, 281) per istabilire alcuni teoremi sulle curve piane algebriche, i quali provengono dal considerare le intersezioni di una di queste con un fascio regolare di raggi ruotante attorno al proprio centro, teoremi anteriormente noti, almeno in parte, ma di cui il BELTRAMI additò la stretta attinenza con la teoria degli invarianti. E come potrebbero passare i-

(1) *Analytische Geometrie des Raumes*, II. Teil, 3 Aufl. (Leipzig 1880), p. 402-410.

Digitized by Google

nosservate le sottili considerazioni (I, 314), mediante cui egli giunse per primo a dedurre in modo soddisfacente l'espressione della distanza fra due rette parallele nello spazio da quella della minima distanza fra due rette sghembe?

XV. — Quasi da *trait-d'union* fra l'opera geometrica e quella analitica dello scienziato di cui ci occupiamo fungono due scritti concernenti quel ramo di scienza che giace sulla linea di confine fra l'algebra e la geometria analitica, cioè la rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Che questa abbia attratta l'attenzione di chi fu ammiratore e studiosissimo di GAUSS non deve recare meraviglia, tanto più quando si rifletta che egli, nei primordi del suo insegnamento, dovette diffondere dalla cattedra quel potente mezzo d'investigazione delle verità matematiche. Tale osservazione concorda col fatto che il primo di quegli scritti (I, 92) porta la data « Bologna, 15 Aprile 1863» ed ha un'impronta indiscutibilmente didattica. Osserva ivi il BELTRAMI che il modo consueto per dimostrare i teoremi di CÔTES e DE MOIVRE, essendo fondato sulla forma che hanno le radici di un'equazione binomia, può indurre a ritenere che di essi non esistano gli analoghi nelle equazioni algebriche complete, cioè della forma $f(z) \equiv z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$. Per sradicare questo preconcetto basta notare che, dette $z_1, z_2, \ldots, z_n$ le radici di $f(z) = 0$ e posto $| z - z_k | = \varrho_k$, si ha $| f(z) | = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n$, e quest'equazione dice che « se nel primo membro di una equazione algebrica a coefficienti reali o complessi si sostituisce al posto di z il numero complesso $x+iy$ rappresentato dal punto Z, il modulo dell'espressione risultante eguaglia il prodotto delle distanze del punto Z dagli n punti radici dell'equazione proposta». Supponendo in particolare $A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0$, dal *teorema di Beltrami* scaturiscono immantinente quelli superiormente indicati.

Più elaborato ed esteso è l'altro dei lavori del Nostro sulla rappresentazione delle quantità complesse sopra i punti di un piano (II, 129). Letto all'adunanza tenuta dall'Accademia di Bologna il 10 Febbrajo 1870, esso ha lo scopo di mostrare sopra un esempio l'utilità di sfruttare nella teoria delle forme algebriche l'osservazione — fatta prima da BELLAVITIS e MÖBIUS — che la detta rappresentazione abilita a trasformare le relazioni fra punti di una stessa retta in altrettante relazioni fra punti di un piano. L'esempio prescelto è offerto da la funzione razionale intera di terzo grado e le sue forme invariantive. Lo spazio di cui disponiamo non è sufficiente per dar notizia di tutte le belle proposizioni geometriche a cui per tal modo il BELTRAMI pervenne; basti dire che nella memoria in questione, forse più che in qualunque altra, rifulge la sua fantasia di geometra; se per l'eleganza del dettato e dei calcoli egli ivi

Digitized by Google

si accosta al CHELINI, al CREMONA assomiglia nella sicurezza e genialità delle considerazioni geometriche. Una cosa però deve venir qui osservata, ed è l'applicazione che egli fa per incidenza della teoria delle coordinate trilineari allo studio delle figure connesse ad un triangolo la quale sfuggì anche ai più dotti cultori della geometria del triangolo: se in avvenire essi dedicheranno a quella memoria la debita attenzione, non solo vi incontreranno certi punti e certe rette a cui di consueto si attribuisce un'origine diversa e meno antica (1), ma ancora altri elementi a cui sarebbe opportuno di accordare un posto stabile nella scienza. Nè va taciuto che i metodi adoperati dal BELTRAMI sono indubbiamente suscettibili di altre applicazioni; onde è strano che essi siano stati tosto abbandonati e quindi siano caduti in una immeritata e deplorevole dimenticanza (2).

XVI. — I lavori del BELTRAMI di cui ci resta ancora di parlare appartengono tutti all'analisi.

Sorvolando sopra una questione (IV, 167) che egli propose nel Giornale di matematiche e che fu tosto risoluta da tre giovani destinati a prendere più tardi un posto onorevole nella schiera degli scienziati (3), spenderemo qualche parola intorno ad un suo lavoro giovanile che, benchè abbia un'umile origine, merita se ne narri la breve storia per assegnarne il posto e determinarne il valore.

Nelle Nouvelles annales de mathématiques il VALTON propose (Question 654) di dimostrare che

$$\text{se } \varphi(2\omega) = \varphi(\omega) \cdot \cos\omega, \text{ si ha } \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\varphi(0).$$

Trasformato questo teorema in problema nasce la questione di « determinare la funzione φ soddisfacente all'equazione funzionale $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega)$ cos ω ». Ora siffatto problema venne incontrato sin dalla fine del sec. XVIII da GREGORIO FONTANA, in una memoria (4) ove egli giunse alla curva trascendente chiamata oggi cocleoide, e venne risolto in una maniera concordante con quella che risulta dall'enunciato Valtoniano. Orbene il BELTRAMI (*Nouv. Ann. de Math.*, II Ser. T. II, 1863, p. 302), con un

(1) Citiamo ad esempio il così detto punto di LEMOINE, intersezione delle simmediane di un triangolo.

(2) Dopo che le linee precedenti erano state scritte uscì alla luce l'elegante nota di E. CESÀRO, *Sulle radici dell'Hessiana d'una cubica in relazione con quelle della cubica stessa* (Giorn. di matem. **39**, 1901), la quale dimostra non prive di fondamento le qui fatte previsioni sopra l'avvenire del metodo di BELTRAMI.

(3) G. ASCOLI, A. ROITI e E. PADOVA; Giorn. di matem. **5**, 1867, p. 254-235.

(4) *Sopra l'equazione di una curva, sopra la falsità di due famosi teoremi, e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli* (Mem. della soc. italiana delle Scienze **2**, 1784).

Digitized by Google

ragionamento semplice e convincente, ha fatto vedere che la soluzione FONTANA-VALTON è ben lungi dall'essere la soluzione generale, giacchè l'espressione completa delle funzioni soddisfacenti al quesito è $\frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega}$. $\Theta\left(\operatorname{sen} \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}\right)$, Θ essendo simbolo di una funzione arbitraria di due variabili.

Per incontrare altri scritti analitici del BELTRAMI è mestieri che saltiamo un intervallo di tempo che comprende non meno di sedici anni; tocchiamo così all'epoca della sua vita in cui egli era totalmente assorbito da ricerche fisico-matematiche; ed infatti è agevole persuadersi che i lavori di analisi del Nostro non sono che diramazioni laterali di quelli che egli consacrò all'interpretazione matematica dei fenomeni della natura (e di cui, per scarsità di competenza, non intendiamo occuparci).

Un gruppo considerevole riflette le funzioni sferiche. Il più antico elemento di esso (III, 163) venne presentato all'Istituto Lombardo addì 5 Giugno 1879 ed ha per iscopo di dare una dimostrazione diretta della formola

$$\int_0^{\pi} (z - \cos\zeta\sqrt{z^2-1})\ d\zeta = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(z + \cos\varphi\sqrt{z^2-2})^{n+1}},$$

che l'HEINE aveva stabilito con un'argomentazione non esente da obbiezioni; quella suggerita dal Nostro, meriterebbe di prendere posto in tutti i trattati sulla teorica delle funzioni di variabili affatto libere, come esempio di integrazione nel campo complesso.

Importanza ancora maggiore possiede una comunicazione fatta all'Istituto Lombardo il 16 Giugno 1887 (IV, 236) ed intesa a mettere in piena luce la parte fondamentale che rappresentano nella teoria delle funzioni sferiche le due seguenti equazioni differenziali (dovute a F. NEUMANN):

$$\frac{dR_{n+1}}{dx} = x\frac{dR_n}{dx} + (n+1)R_n$$

$$\frac{dR_{n-1}}{dx} = x\frac{dR_n}{dx} - nR_n,$$

ove $R_n = AP_n(x) + BQ_n(x)$, essendo A, B due costanti arbitrarie e $P_n(x)$, $Q_n(n)$ funzioni sferiche d'ordine n risp. di I e II specie. Le molteplici applicazioni fattene dal BELTRAMI in quella nota ed in altre posteriori (IV, 362 513 e 543) dimostrano che con piena ragione egli ravvisò in

Digitized by Google

esse l'attitudine di esercitare una parte fondamentale nella teoria delle funzioni sferiche. In tale teoria egli ha poi introdotte le funzioni

$$S_n = \frac{R_n + R_{n-1}}{2}, \quad T_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{2},$$

ha risolta la questione «sotto quali condizioni l'equazione differenziale delle funzioni sferiche a due variabili è soddisfatta da una funzione di una sola variabile?» ed ha suggerita una nuova definizione delle funzioni sferiche dei tre coseni di direzione di un raggio.

Di un'altra classe di funzioni il BELTRAMI fu condotto ad occuparsi (III, 248) studiando il ben noto articolo di ABEL intitolato *Résolution d'un problème de mécanique*. In esso il grande geometra norvegese ha stabilito un teorema di calcolo integrale il quale permette in molti casi di determinare la forma di una funzione esistente sotto il segno d'integrale definito, quando si conosca l'espressione di questo mediante un parametro che entra nell'integrale stesso. Il BELTRAMI ne ha trasformato convenientemente l'enunciato e quindi lo ha applicato alle due funzioni cilindriche:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\Theta)\,.\,d\Theta, \quad I_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\Theta)\ \operatorname{sen}\Theta\,.\,d\Theta\,;$$

ottenne così lo sviluppo di una funzione di una variabile reale in serie trigonometrica di seni e coseni degli argomenti $v_1 x, v_2 x, \ldots$, le v essendo radici di una delle equazioni $I_0(x) = 0$, $I_0'(x) = 0$, $I_0''(x) = 0$: tale sviluppo offre grande analogia con quelli in serie di FOURIER. Di funzioni cilindriche il Nostro si è poi occupato anche più tardi (III, 345), ottenendo col loro ajuto una nuova espressione del potenziale di un anello.

L'ultimo ordine di investigazioni del BELTRAMI di cui ci rimane da rendere conto è consegnato in una terna di memorie recanti il medesimo titolo (IV, 245). Osserva l'autore, nell'esordio della prima, che alla teoria delle ordinarie funzioni potenziali a tre coordinate indipendenti si fa di solito corrispondere quella delle funzioni potenziali logaritmiche e che per quanto questo riscontro sia da ritenersi per molti rispetti il più legittimo ed ovvio, non è escluso che si possano concepire altre maniere di corrispondenza; quella che egli propone presenta la circostanza notevole che l'equazione differenziale facente riscontro a quelle di LAPLACE-POISSON è di primo ordine invece che di secondo. Per definire le nuove funzioni $U(x,y)$, si indichino con a, b le coordinate rettangolari di un punto generico di una qualunque regione finita σ del piano, e x, y quelle di un punto arbitrario di questo stesso piano, Si ponga $c = a + ib$, $z = x + iy$ e si chiami h una funzione, reale o complessa,

Digitized by Google

di a, b, supposta monodroma finita e generalmente continua. Pongasi

$$U(x,y) = \int \frac{h \cdot d\sigma}{c - z};$$

all'infinito si avrà

$$\lim (zU) = -\int h \cdot d\sigma,$$

inoltre

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \begin{cases} -2\pi h \text{ pei punti } (x,y) \text{ appartenenti a } \sigma \\ 0 \quad \text{» » » esterni » »;} \end{cases}$$

se s' è una linea chiusa qualunque limitante un'area σ' e $\zeta = \xi + i\eta$ il numero complesso relativo ad un punto qualunque del piano, e con ε si designa 1 o 0 secondochè quel punto è interno od esterno a σ', si avrà:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s1} \frac{Udz}{h - \zeta} = U(\xi,\eta) - \int \frac{h \cdot d\sigma'}{z - \zeta'} = \varepsilon U(\xi,\eta) + \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{d\sigma}{z - \zeta};$$

per la validità di questa formola — da riguardarsi come la generalizzazione del noto teorema di CAUCHY per le ordinarie funzioni di una variabile complessa — si richiede che U sia una funzione monodroma continua e finita in tutta la regione σ e che le sue derivate prime siano ivi finite e generalmente continue.

In qual modo si possa determinare una funzione potenziale complessa nel caso in cui σ sia limitata da una linea assegnata, vedrà il lettore nelle due ultime note del BELTRAMI, ove è esaurientemente trattato il caso in cui essa sia un'ellisse.

Noi non ne compendieremo i risultati, come non faremo più di un cenno fugace delle traduzioni da lui fatte (1) e dei lavori biografici (2) e bibliografici (3), ritenendo che il fin qui esposto porga già un'idea adeguata della somma dei contributi che egli diede, in circa otto lustri di ininterrotto lavoro, al nostro patrimonio matematico.

---

(1) Giornale di matem. **11**, 1873, p. 153-179; Annali di matem. $\mathbf{6_2}$, 1875, p. 152-215.

(2) ALFREDO CLEBSCH (Giorn. di matem. **10**, 1872. p. 347-349); DOMENICO CHELINI Id. **16**, 1878, p. 345). — *Commemorazione di D. Chelini* (Collectanea mathematica p. I — XXVIII). — ENRICO BETTI (Rendic. del circolo matematico di Palermo 6, 1892, p. 245-246). — ERNESTO PADOVA (Rendic. della r. acc. dei Lincei 5_5: 1, 1896, p. 284-275). — FRANCESCO BRIOSCHI (Ann. di matem. 26_2, 1897, p. 343-347 e Rendic. dell'adunanza solenne della r. acc. dei Lincei, 12 Giugno 1898). — SOPHUS LIE (Rend. della r. acc. dei Lincei 8_5: 1, 1899, p. 281). — *Parole dette in onore di Lord Kelvin* (Ivi p. 419-420).

(3) Giornale di matem. 1, 1863, p. 319-320 (CHELINI) e T. VII, 1869, p. 29 — 41 (CASORATI); veggansi poi nei Rendiconti dell'acc. dei Lincei le parole di presentazione per parecchie opere offerte in omaggio.

Digitized by Google

Infatti, scaturisce dalle pagine precedenti non esservi quasi diramazione delle matematiche pure al cui progresso egli non abbia notevolmente contribuito: dalla geometria elementare alla teoria degli iperspazi, dalla modesta teoria delle sezioni coniche a quella delle funzioni più elevate dell'analisi, dai fondamenti della geometria alla teoria delle forme algebriche, dalla geometria analitica elementare alla geometria infinitesimale, dalla teoria delle equazioni a quella delle curve e superficie. Ed in ciascuna di queste svariate ricerche egli seppe adoperare i procedimenti più consentanei alla natura del soggetto, palesandosi pienamente padrone tanto dei metodi astratti dell'analisi, quanto di quelli che i geometri ricavarono dall' intuizione spaziale; in tutte egli seppe scoprire la via che mena al midollo della questione trattata e condurre i propri lettori con mano così esperta e sicura, con passo così scevro da tentennamenti ed incertezze, da far nascere in essi l'illusione che essi avrebbero potuto fare anche a meno di una guida tanto sapiente; strana illusione che solo è capace di produrre l'arte più perfetta, che, ove tutto fa, meno si mostra.

La matematica è un'arte ed una scienza ad un tempo, dice una massima antica; se tutta l'odierna letteratura matematica venisse ad un tratto a scomparire e sole superstiti rimanessero le opere di EUGENIO BELTRAMI, la verità di quel detto sarebbe sufficientemente dimostrata.

XIV.

E. DE JONQUIÈRES.

Memoria pubblicata in francese nel T. III (1902), III Ser., della *Bibliotheca mathematica.*

JEAN PHILIPPE ERNEST FAUQUE DE JONQUIÈRES nacque a Carpentras il 3 Luglio 1820. Entrò nella marina francese nel 1835, essendo stato allora ammesso alla Scuola navale di Brest. Sei anni dopo conseguì il grado di tenente di vascello e nel periodo 1848-1850 appartenne al Consiglio dell'ammiragliato. In seguito soggiornò in parecchi paesi, dei quali è agevole avere notizia approssimativa osservando le date delle sue memorie matematiche. Notiamo soltanto che fu durante la navigazione 1860-61, che egli potè dedicarsi con maggiore continuità ad alcune ricerche geometriche nell' indirizzo PONCELET-CHASLES, da lui intraprese quattro o cinque anni prima. Come constatazione ufficiale dei risultati delle sue ricerche ci basti in questo momento di

Digitized by Google

notare che nel 1862 gli furono conferiti i due terzi del Gran Premio delle scienze matematiche proposto sul seguente argomento: « Riassumere, discutere e perfezionare in qualche punto importante i risultati sinora ottenuti sopra la teoria delle curve piane del quarto ordine ».

Promosso nel 1865 capitano di vascello, DE JONQUIÈRES ebbe la carica di capo di stato maggiore dell'ammiraglio DE LA GANDIÈRE in Cocincina, carica che gli porse l'occasione di organizzare a Saigon la prima esposizione agricola e industriale. Entrò poi nel Consiglio dei lavori della Marina; fu promosso contrammiraglio il 17 Dicembre 1874 e viceammiraglio il 1 Ottobre 1879; successivamente fu direttore della Scuola delle torpedini di Boyardville, prefetto marittimo a Rochefort, direttore della Commissione permanente di difesa marittima, capo del Servizio idrografico della Francia, ecc. Nel 1885 venne collocato a riposo.

La sua brillante e utile carriera come marinajo ed i suoi lavori matematici gli valsero il posto di *académicien libre* che l'Istituto di Francia gli conferì il 24 Marzo 1884(1); questa ben meritata distinzione è collegata a due sue pubblicazioni, cioè ad un'esposizione particolareggiata della sua carriera (2) ed all'elogio del suo predecessore L. F. C. BRÉGUET (C. R., 98, 1884). DE JONQUIÈRES, a cui alcune buone traduzioni delle *Epistole* di ORAZIO accordano un posto anche nella storia letteraria della Francia, si spense dolcemente a Parigi il 12 Agosto 1901.

La sua attività scientifica abbraccia circa quarant'anni e diede per risultato una brillante raccolta di circa 150 memorie matematiche (3); essa presenta un massimo d'intensità negli anni 1856-66 ed un minimo durante il decennio successivo; essa s'inizia con lavori di geometria pura e si chiude con ricerche aritmetiche, dando di quando in quando risultati che interessano la meccanica applicata e che noi siamo obbligati a passare sotto silenzio.

Tenendo conto degli argomenti che trattano, i lavori che analizzeremo si distribuiscono naturalmente in parecchi gruppi. Un certo nu-

---

(1) Molto prima era stato candidato al posto di corrispondente; precisamente negli anni 1863, 1866 e 1867 come successore ordinatamente di STEINER, HAMILTON, KUMMER e PLÜCKER; ma l'Accademia gli preferì rispettivamente SYLVESTER, RIEMANN, WEIERSTRASS e KRONECKER. Nel 1884 fu in competizione come successore di LA GOURNERIE, ma in sua vece fu eletto HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

(2) *Notice sur la carrière maritime, administrative et scientifique du Vice-Amiral* DE JONQUIÈRES, *Grand Officier de la Légion d'honneur, Directeur général du Dépôt des cartes et plans de la Marine, Vice-Président de la Commissions des phares, Membre de la Commissions de l'Observatoire* (Paris, 1883).

(3) Cfr. l'*Etenco* pubblicato nel T. V (1902) del *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*; agli scritti ivi enumerati vanno aggiunti gli articoli firmati *Nauticus* e pubblicati nell'*Intermédiaire des mathématiciens*.

Digitized by Google

mero si riferisce alla geometria superiore nel senso di CHASLES (v. i nostri §§ I e II); altri (§§ III e IV) rappresentano contributi alla teoria delle curve piane algebriche e dei sistemi da esse formati; essi sono legati strettamente a quelli, non meno importanti, relativi alle curve gobbe algebriche ed alle superficie (§ V). Una sezione più breve (§ VI) dell'opera matematica di DE JONQUIÈRES è costituita da indagini (in parte critiche) sopra le trasformazioni geometriche ed i poliedri euleriani. Finalmente l'ultima (§ VII) consta dei suoi studi sopra la teoria delle equazioni e l'aritmetica superiore. Questo è, a grandi linee, il catalogo delle ricchezze che esporremo ora dettagliatamente.

I. Applicazioni della « Géométrie supérieure » a questioni elementari.

1. — L'adolescenza di DE JONQUIÈRES cade nel periodo in cui CHASLES aveva raccolto e brandito lo scettro geometrico che PONCELET aveva lasciato cadere in un momento di deplorevole scoraggiamento. Era l'epoca nella quale l'autore dell'*Aperçu historique* prendeva possesso della cattedra di geometria fondata (1846) apposta per lui; in cui egli pubblicava sopra questa materia il *Traité* che doveva essere in Francia, per alcuni decenni, l'EUCLIDE dei nuovi tempi, in cui egli elaborava lentamente il suo *Traité des sections coniques*; in cui, finalmente, nei suoi corsi della Sorbona, mostrava sopra numerosi esempi l'inesauribile fecondità delle idee di cui egli era, in parte creatore, in parte l'apostolo più convinto. DE JONQUIÈRES, che ebbe occasione di vivere più volte a Parigi in quest'epoca di rinàscita della geometria, subì l'influenza dell'ambiente; impressionato vivamente e profondamente da teorie la cui eco era giunta sino a lui, la sua fantasia geometrica si sviluppò portentosamente ed egli non tardò a divenire il discepolo più caldo(1) e il commentatore più originale di CHASLES; *discepolo* non nel senso scolastico di tale vocabolo, perchè non gli fu mai dato di seguire regolarmente alcun corso della Sorbona, ma discepolo nel senso in cui si dice che i grandi hanno discepoli in tutti i tempi e presso tutti i popoli; *commentatore*, non nel significato più stretto della parola, ma in quello di uomo che cammina francamente nella strada che il suo autore ha aperta, rendendola più agevole e più diritta, più lunga e più ampia.

Gli è particolarmente nelle sue prime memorie matematiche che riesce più evidente il legame fra JONQUIÈRES e CHASLES; perchè in gran parte hanno per iscopo la dimostrazione di teoremi o la soluzione di

(1) Cfr. le recensioni da lui inserite nel T. XX della I Ser. e nel T. IV della II delle *Nouv. Ann. de Math.*

Digitized by Google

problemi che questi aveva enunciati, ovvero l'applicazione dei principii esposti nella *Géométrie supérieure* a questioni elementari sulle curve di 2° o 3° ordine o sopra l'omografia. Occorre entrare a questo riguardo in qualche particolare e per ciò esaminare separatamente le memorie in questione.

2. — Una di queste (*Nouv. Ann. de Math.* 14, 1855 p. 435) si riferisce alla costruzione, richiesta da CHASLES, della conica cha divide armonicamente cinque dati segmenti. DE JONQUIÈRES vi giunge mediante uno speciale ragionamento che permette di descrivere la conica che passa per n (<5) punti e divide armonicamente $5-n$ segmenti, quando si sappia risolvere lo stesso problema per $n+1$ punti e $4-n$ segmenti. Il problema enunciato è abbastanza importante e la soluzione ideata dal nostro autore è abbastanza semplice per ottenere un posto in qualunque esposizione elementare della teoria delle coniche. Una questione analoga ha per iscopo la costruzione di una curva di 2° ordine determinata da un fuoco e tre punti. Un matematico oggi dimenticato, il NICOLLIC scoprì (*Mém. de Paris*, 1746) un teorema, un po' complicato, che permette di trovare la direzione dell'asse della curva cercata; di questo teorema l'HOUSEL diede (*Nouv. Ann. de Math.* 14, 1855 p. 425) più d'un secolo dopo una dimostrazione analitica; ora DE JONQUIÈRES dimostrò (Id. id.) che esso può dedursi anche dai principii della geometria moderna, non senza aggiungere la giustissima osservazione che per costruire la conica soddisfacente alla questione il meglio è ricorrere all'omologia che, secondo PONCELET, esiste fra una conica ed un cerchio avente per centro uno dei fuochi della curva.

Nello stesso ordine d'idee sono scritte altre note (Id. 16, 1857, p. 116 e 18, 1859, p. 404) aventi per iscopo l'applicazione dei teoremi di PASCAL, BRIANCHON e DESARGUES alla costruzione della conica passante per n punti e tangente a $5-n$ rette; le soluzioni esposte da DE JONQUIÈRES sono quelle che tutti i nostri scolari conoscono; ma quando egli scriveva avevano caratteri di novità.

3. — A DE JONQUIÈRES sono anche dovute (Id. 15, 1856, p. 160) alcune proprietà dell'iperbole che CHASLES inserì, senza indicarne la provenienza, nel suo *Traité des sections coniques* (p. 35 e 53). Sempre applicando le teorie fondamentali della *Géométrie supérieure* egli riuscì anche a provare che « la tangente condotta dal centro d'un'ellisse al cerchio circoscritto a un qualunque triangolo conjugato alla curva è eguale alla corda del quadrante della stessa » (Id. 20, 1861, p. 25); servendosi poi del « principe de correspondance anharmonique » enunciato allora da CHASLES, diede alla geometria un contributo ben più importante (Id. p. 94 e 190) dimostrando alcuni teoremi enunciati da STEINER (v.

Digitized by Google

Gesammelte Werke, T. II, p. 425). Questo lavoro non potrà venire passato sotto silenzio da chi in avvenire colmerà la lacuna esistente nella letteratura matematica per la mancanza di un elenco delle ricerche compiute per dimostrare le numerose asserzioni sparse nelle opere di STEINER (1).

La memoria testè citata non è l'unica con cui DE JONQUIÈRES prese posto fra i commentatori del sommo matematico tedesco, giacchè tre anni dopo egli ne compose un'altra (*Journ. de mathém.*, II Sér., 4, 1859, p. 49) su cui è necessario arrestarci. Scopo di essa è di mostrare le formole enunciate da STEINER (*Ges. Wer.* II, p. 425) che esprimono il numero $N(p, t, n)$ delle coniche che passano per p punti, e sono tangenti a t rette e normali a n, essendo naturalmente $p + t + n = 5$. Supponendo, come è lecito, già noti i valori di $N(p, t, n)$ per $n = 0$, DE JONQUIÈRES stabilisce quelli relativi all'ipotesi $n > 0$ mediante un'argomentazione che giova qui riassumere: Sia a una delle rette a cui una delle coniche cercate deve riuscire normale e A il punto all'infinito comune a tutte le rette perpendicolari ad a. Tutte le coniche che passano per p punti, sono tangenti a t rette e normali a $n - 1$, formano un sistema le cui caratteristiche (nel senso di CHASLES) sono

$$\mu = N(p + 1, t, n - 1), \quad \nu = N(p, t + 1, n - 1).$$

Ora il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte dal punto A alle curve di questo sistema è una curva dell'ordine $\mu + \nu$, di cui A è un punto μ — plo; essa incontra la retta a in $\mu + \nu$ punti ognuno dei quali dà una conica del sistema normale alla retta a; si ha pertanto la seguente relazione ricorrente:

$$N(p, t, n) = N(p + 1, t, n - 1) + N(p, t + 1, n - 1).$$

Siccome per ipotesi si conoscono tutti i numeri $N(p, t, 0)$, si potranno così dedurre i numeri $N(p, t, 1)$, poi i numeri $N(p, t, 2)$, ecc. cioè tutti i numeri enunciati da STEINER. Questo metodo di dimostrazione, secondo il mio parere, è quello stesso usato tacitamente da STEINER, stesso; esso è indubbiamente semplice ed elegante, ma ha il grave difetto di non indicare le soluzioni corrispondenti a coniche degeneri; in conseguenza parecchi dei numeri registrati nei lavori di STEINER e DE JONQUIÈRES devonsi dichiarare inesatti, come ha recentemente provato A. WIMAN (*Zeitschr. f. Math.* 40, 1895, 296).

Prima di lasciare le coniche citiamo ancora i procedimenti ideati da DE JONQUIÈRES per determinare la specie di una conica di cui si conoscono cinque punti o cinque tangenti (*Nouv. Ann. de Math.* 18, 1859, p.

(1) In conseguenza di tale osservazione, la segnalata lacuna fu colmata da R. STURM in un articolo inserito nel T. IV (1903) della *Bibliotheca mathematica* (1935).

Digitized by Google

215), una soluzione semplicissima di una questione proposta da CAYLEY (Id. 16, 1857, 189), la generalizzazione di un teorema di CHASLES relativo a quattro coniche inscritte nel medesimo quadrilatero (Id. 15, 1856, p. 312), finalmente le dimostrazioni da lui date per tre teoremi enunciati da SCHRÖTER (Id. II Ser. 2, 1863, p. 33).

4. — Passando ad altri temi, segnaleremo anzitutto la ricerca dovuta a DE JONQUIÈRES (Id. 17, 1858, p. 51) degli elementi uniti di un'omografia solida; è una ricerca simile a quella che CHASLES aveva già compiuta nel piano, ma che, grazie alla sua importanza, era ben degna di un lavoro *ad hoc*; tale era pure l'opinione di STAUDT, che dedicò ad essa uno speciale § nell'ultimo dei suoi *Beiträge zur Geometrie der Lage*.

Si deve ancora a DE JONQUIÈRES (Id. 17, 1858, p. 399 e 18, 1859, p. 64) la prima soluzione della seguente questione proposta da CHASLES: « Dati in un piano due sistemi in corrispondenza, di sette punti ognuno; far passare per ciascuno un sistema di sette raggi corrispondentisi in un'omografia ». E' il *problema della projettività* nel piano che, sia nella primitiva forma, sia generalizzato, diede luogo ad importanti ricerche.

A questo gruppo di note, varie nei loro argomenti ma rassomiglianti per i metodi di ricerca, si connettono finalmente due lavori sulle superficie di 2° ordine (*Journ. de mathém.* II Ser., 3, 1858, p. 53 e 4, 1859, p. 81), di cui uno ha per iscopo la ricerca di un procedimento che serva a riconoscere se un punto dato nello spazio sia interno od esterno ad una quàdrica individuata da nove punti o nove piani tangenti, mentre l'altro concerne il problema di determinare la specie della quàdrica determinata da nove punti o da altrettanti piani tangenti. Le soluzioni proposte da DE JONQUIÈRES vennero poi perfezionate, ma meritano di venire ricordate come primi passi in un campo allora intatto e sempre importante.

II. I « Mélanges de géométrie pure ».

5. — All'epoca nella quale DE JONQUIÈRES camminava sulle orme di CHASLES appartiene la collezione di lavori da lui pubblicata col lungo titolo *Mélanges de géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le Traité de géométrie supérieure de M. Chasles au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, etc. etc. et la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre* (Paris, 1856). Gli è grazie a questo volume che DE JONQUIÈRES prese onorevole posizione fra i geometri francesi; i temi trattati nelle sue varie parti sono talmente diversi fra loro che siamo costretti a considerare queste separatamente.

Digitized by Google

Il I Cap. può intendersi per un commento alla memoria *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace* presentata da CHASLES all'Accademia di Parigi il 26 Giugno 1843. Le questioni ivi trattate sono talmente importanti sia per la cinematica che per la geometria, che si deve essere grati a DE JONQUIÈRES per l'abilità e la cura da lui spiegata nell'illustrare e svolgere gli accenni dell'illustre geometra.

Le dimostrazioni degli eleganti teoremi sopra gli archi di conica a differenza rettificabile, che lo stesso matematico enunciò nelle sedute che l'Accademia delle Scienze tenne il 23 Ottobre 1843 e il 21 Giugno 1845, costituiscono il II Cap. dei *Mélanges*. Le questioni trattate hanno un'apparenza elementare, ma possiedono il grande pregio di provare la possibilità di trattare geometricamente questioni che si giudicavano allora di esclusiva pertinenza del calcolo integrale.

Nel Cap. III è diffusamente esposta la generalizzazione delle proprietà dei fuochi e dei diametri conjugati delle coniche schizzata da CHASLES nel 1846 (C. R. *22*, p. 874); essa ha per punto di partenza la considerazione dell'involuzione delle rette reciproche rispetto ad una conica avente per centro un punto qualunque del suo piano.

6. — Il IV Cap. dell'opera in esame si presenta dotato di maggiore originalità ed importanza; gli è il « principe de correspondance anharmonique » che ne costituisce lo scheletro; DE JONQUIÈRES ne fa conoscere l'enunciato dato da CHASLES nelle sue lezioni per le forme di I specie, mediante il concetto di corrispondenza univoca; è quello che CHASLES stesso espose nei C. R. del 24 Dicembre 1855, ma gli sviluppi aggiunti da DE JONQUIÈRES risalgono ad una data più antica; d'altronde essi si riferiscono quasi totalmente a questioni inspirate da memorie anteriori di CHASLES. Il passo veramente originale e maggiormente importante è quello in cui il nostro geometra, per dimostrare essere dell'ordine, $m + n$ la curva generata dagli elementi corrispondenti di due fasci di curve degli ordini m e n, usa il ragionamento consueto fondato sul principio di corrispondenza che si attribuisce a CHASLES. È una circostanza che ci sembra importantissima e su cui gli storici in generale non insistettero abbastanza (1); DE JONQUIÈRES stesso l'ha dimenticata dichiarando nel corso di una celebre disputa letteraria che « tout le mérite du procédé de demonstration dont il s'agit appartient à CHASLES » (2). Si può

(1) Fa eccezione C. SEGRE: vedine la nota inserita nella *Bibl. mathem.* II Ser., 5, 1892, p. 33.

(2) DE JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris, 1867), p. 10.

Digitized by Google

aggiungere che la determinazione fatta da DE JONQUIÈRES (*Nouv. Ann. de Math.*, 20, 1861, p. 206) dell'ordine del luogo del vertice di un angolo di grandezza costante circoscritto a una curva di classe n prova che sin dal 1860 egli era in grado di servirsi senza fatica del citato principio. Nella seconda parte dello stesso Cap. dei *Mélanges* DE JONQUIÈRES completa una memoria in cui CHASLES (C. R. 36, 1853, p. 943) aveva esposta la costruzione di una cubica piana determinata da nove punti; infatti DE JONQUIÈRES, oltre a dare altre soluzioni della medesima questione, insegna a determinare le ulteriori $5 - k$ intersezioni di due curve piane di terzo ordine passanti pei medesimi $4 + k$ punti ($k = 0, 1, ..., 4$): si tratta di nuove applicazioni delle teorie della *Géométrie supérieure*, « dont les ressources sont inépuisables », dice il Nostro.

7. — L'ultima parte del volume in questione è occupata da una versione libera e commentata del trattato di MACLAURIN sulle curve di terzo ordine. Considerata come opera di propaganda questa sezione dei *Mélanges* si connette ad una nota dello stesso autore (*Journ. de Math.* II Ser., 2, 1857, p. 153) ove parecchie proposizioni della *Geometria organica* del citato geometra inglese concernenti le curve piane di 3^0 e 4^0 ordine sono lumeggiate col mezzo della *Géométrie supérieure*. Considerata invece come contributo alla conoscenza delle cubiche piane, essa collegasi ad alcuni articoli dello stesso autore che non ci è lecito passare sotto silenzio. Due di essi (*Nouv. Ann. de Math.* 14, 1855, p. 318 e 20, 1861, p. 26) insegnano nuove generazioni di dette curve; un terzo (Id. 15, 1856, p. 99) a stabilire e generalizzare alcune proprietà delle stesse; e un quarto (Id. 18, 1859, p. 261 e 406) a dimostrare essere una cubica il luogo dei punti d'incontro delle normali ad una conica in coppie di punti allineati con un punto fisso. Nello stesso gruppo troviamo una nota (Id. II Ser., 4, 1865, p. 504) ove è risolta la seguente questione: « costruire, servendosi del solo compasso, la conica osculatrice di quart'ordine in un punto di una cubica determinata da nove dei suoi punti »; essa si chiude con l'enunciato di due teoremi sulle stesse curve, esatti soltanto se ci si limita a considerare elementi reali.

III. Teoria generale delle curve piane.

8. — Quasi tutti i lavori di DE JONQUIÈRES che abbiamo testè analizzati mirano a dimostrare teoremi o a risolvere problemi enunciati da CHASLES o da altri (1); la novità dei risultati ottenuti essendo scarsa,

(1) Non parlammo di un articolo (*Nouv. Ann. de Math.* 16, 1857, 407) destinato a risolvere un problema proposto da altri, perchè effettivamente non risolve la questione.

Digitized by Google

il valore di quei lavori è per forza limitato. Ma per il nostro autore il periodo di noviziato (e tale è appunto quello in cui essi furono pubblicati) non doveva avere lunga durata. Infatti, nell'anno stesso in cui vedevano la luce i *Mélanges de géométrie pure,* egli presentava (15 Settembre e 17 Novembre 1856) all'Istituto di Francia un lungo lavoro dal titolo *Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe du quatrième ordre,* che fu pubblicato in riassunto nel *Journ. de Math.* (II Ser., 1, 1856, p. 411) e *in extenso* dall'Accademia delle Scienze nella raccolta dei *Sav. étr.* (16, 1858). Per comprendere la natura e l'importanza della questione trattata da DE JONQUIÈRES bisogna ricordare che NEWTON verso la fine della sua *Enumeratio linearum tertii ordinis* espose una costruzione della cubica individuata da un punto doppio e sei punti semplici, aggiungendo che in modo analogo si possono costruire altre curve algebriche aventi punti singolari; gli è quanto mostrarono MACLAURIN e BRAIKENRIDGE, senza affrontare il problema (che NEWTON dichiarò « inter difficiliora numerandum » e che G. CRAMER considerava come essenziale per la conoscenza delle curve) di descrivere una curva generale nel proprio ordine, determinata da un numero sufficiente dei suoi punti. Il mezzo per vincere le relative difficoltà fu offerto da STEINER nel 1848 quando scoprì che due fasci projettivi di curve generano, con le intersezioni dei loro elementi corrispondenti, una curva dell'ordine $n+n'$. Circa nello stesso tempo CHASLES insegnava a costruire, col mezzo di fasci projettivi, le curve di terzo e quarto ordine. Tali risultati facevano sorgere naturalmente la questione di trovare costruzioni analoghe per le curve di ordini superiori a quattro, questione tanto più importante perchè era evidente che, risoluta che fosse, si poteva invertire il citato teorema di STEINER, cioè affermare che qualunque curva algebrica è generabile mediante fasci projettivi di curve d'ordini inferiori. Ora nel suo citato *Essai* DE JONQUIÈRES ha completamente risolto quella questione ed il procedimento da lui all'uopo ideato lo guidò a un teorema inatteso che è dovere nostro segnalare.

Si poteva credere che gli $n^2+n'^2$ punti base di due fasci generatori di una curva dell'ordine $m=n+n'$ potessero venire scelti ad arbitrio fra gli $\frac{m(m+3)}{2}$ punti determinatori della curva; DE JONQUIÈRES invece dimostrò che $nn'-1$ di essi devono scegliersi fuori dei dati punti; però questi $nn'-1$ punti, nonchè la corrispondenza dei due fasci, sono pienamente determinati dai dati della questione. In conseguenza per costruire una curva d'ordine m passante per $\frac{m(m+3)}{2}$ punti dati si deve anzitutto scomporre il numero m in due parti n, n' e poi distri-

Digitized by Google

buire gli $nn' - 1$ punti fondamentali incogniti fra le basi dei due fasci; in generale ciò potrà farsi in vari modi; ma, fatto ciò, tutto il resto è determinato. Queste conclusioni sono così belle che furono bentosto annoverate, sotto il nome di *teorema di de Jonquières*, fra i fondamenti della teoria delle curve piane algebriche (v. ad es. l'*Introduzione* del CREMONA). Reputo doveroso aggiungere che furono precisamente queste ricerche del Nostro che inspirarono a CHASLES (delegato dall'Istituto ad esaminarle e riferire) un altro analogo teorema (C. R. 45. 1857, p. 321 e 1061) che divenne esso pure prontamente classico. Giunti alle conseguenze da noi riferite, la costruzione effettiva di una curva algebrica non esige che teoremi della *Géométrie supérieure*; DE JONQUIÈRES, familiare con quest'opera, non trovò difficoltà a stabilire alcune eleganti costruzioni delle curve degli ordini $3^0,\ldots,6^0$ le quali occupano l'ultima parte del suo *Essai* e su cui CHASLES attrasse l'attenzione del mondo matematico nel suo *Rapport* sul lavoro del Nostro, fatto all'Istituto di Francia (C. R. 45, 1859, 318).

Giova citare qui tre brevi note del nostro autore, ove leggonsi alcune applicazioni dei principii esposti nell'*Essai*. Una (*Nouv. Ann. de Math.*, 15, 1856, p. 369) concerne la costruzione di una cubica piana mediante fasci projettivi; un'altra (Id. id. p. 370) l'analoga descrizione di una curva di quarto ordine passante per 14 punti, 8 dei quali stanno su una conica; l'ultimo (*Ann. di matem.* 1, 1857 p. 112) ha per oggetto lo studio della curva di equazione polare

$$\varrho = a\cos\varphi - b\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi\,.\cos\varphi;$$

è una sestica incontrata dall'autore in una questione di cosmografia e di cui egli insegna le proprietà e la generazione mediante fasci projettivi. Si può aggiungere che molti passi di altri lavori di DE JONQUIÈRES contengono nuove applicazioni degli stessi metodi di costruzione.

9. — Sulle medesime idee egli è ritornato assai più tardi, non soltanto per esporre minutamente come si possano costruire le curve unicursali d'ordine qualunque (C. R. 105, 1887, p. 1184) e particolarmente quelle di 5° ordine (*Rend. del Circ. mat. di Palermo*, 2, 1888, p. 118), ma ancora per tentare di determinare il numero massimo di punti multipli di cui può essere dotata una curva piana algebrica d'ordine qualsivoglia, senza spezzarsi (C. R. 105, 1887, p. 917 e 971).

A questo ritorno di DE JONQUIÈRES ai suoi antichi amori devesi se egli si occupò di risolvere il bel problema di costruire, mediante coppie di fasci projettivi di superficie d'ordini inferiori, una superficie d'ordine m determinata da $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1$ dei suoi punti. Ricorrendo a considerazioni semplicissime e puramente aritmetiche (C. R. 105, 1887,

Digitized by Google

p. 1203 e 106, 1888, p. 234), non solo egli ritenne di avere stabilita la possibilità generale di un tale procedimento, ma s'illuse (Id. 106, 1888, p. 19 e 152) di potere così determinare il numero massimo di punti multipli che può avere una superficie d'ordine m. Ben presto però s'accorse che le sue argomentazioni non potevano ritenersi conclusive (Id. p. 526) ed avevano bisogno di complementi dovuti al fatto che l'intersezione di due superficie d'ordine n non si trova sempre sopra una superficie d'ordine $m > n$.

Benchè, dunque, questi ultimi scritti non possano essere annoverati fra quelli con cui DE JONQUIÈRES fece progredire la geometria, pure furono punto di partenza per altre ricerche più speciali, il cui valore non può essere negato, giacchè insegnano la costruzione di una superficie cubica variamente definita (C. R. 106, 1888, p. 526 e 907; 107, 1888, p. 209) o di una superficie di quarto ordine determinata da sette punti doppi e sei semplici (Id. id. p. 430). Va poi rilevato che in uno di questi lavori DE JONQUIÈRES fece notare come il ragionamento usato dal SALMON (*Anal. Geom. des Raumes*, II Tl. 1880, p. 370) per dimostrare che una superficie di terzo ordine non degenere può avere al massimo quattro punti doppi, serve anche a stabilire che una superficie propria d'ordine n possiede al massimo

$$\frac{n(n-1)(2n-5)}{2} + 1$$

punti doppi.

10. — Il legame logico degli argomenti ci costrinse ad abbandonare la teoria delle curve piane algebriche, alla quale ritorniamo dopo questa scorreria nello spazio per osservare che se l'*Essai sur la génération des courbes géométriques* rappresenta il più antico contributo dato da DE JONQUIÈRES alla teoria generale delle curve piane algebriche considerate isolatamente, non è il solo. Infatti nella collezione dei suoi lavori troviamo un'esposizione della teoria dei poli e delle polari rispetto alle curve algebriche (*Journ. de math.* II. Ser., 2, 249), più elementare di quelle anteriori; è un lavoro che contiene particolari e applicazioni di una certa importanza e novità, ma il cui merito principale è da cercarsi nel metodo usato; a dimostrarne il valore basta notare i molti punti di contatto che la memoria in questione presenta col capitolo corrispondente dell'*Introduzione* di L. CREMONA, uscita posteriormente.

In quest'opera fu anche riprodotta la sostanza di altro lavoro (*Ann. di matem.* 2, 1859) del Nostro, ove è generalizzata la teoria dell'involuzione quadratica. Benchè la priorità a questo riguardo spetti senza contrasto al PONCELET (ed il DE JONQUIÈRES ebbe a riconoscerlo), è indubitato che le idee di questo grande geometra, essendo state soltanto incidentalmente

Digitized by Google

schizzate (C. R. 16, 1848, p. 953), avevano bisogno di essere svolte per dare tutti i frutti che se ne potevano ragionevolmente attendere. E' certo che a PONCELET appartiene la scoperta del legame fra le involuzioni ed i fasci di curve; ma è a DE JONQUIÈRES che risalgono i concetti di «rapporto anarmonico di quattro gruppi di una involuzione» e di «involuzioni omografiche», è lui che determinò il numero dei punti doppi di un'involuzione d'ordine qualunque e segnalò l'uso che si può fare delle involuzioni nella risoluzione delle equazioni algebriche. DE JONQUIÈRES si è anche occupato di costruzioni relative alle involuzioni; le soluzioni da lui proposte hanno l'inconveniente di basarsi sopra curve d'ordine superiore, ma servirono a mostrare il legame di questioni vecchie con teorie nuove, e così agevolarono la buona accoglienza che queste finirono per ricevere.

11. — Prima di chiudere questo Cap. ci resta da esaminare un ultimo lavoro di DE JONQUIÈRES concernente le curve piane algebriche (*Journ. f. r. u. a. Mathem.* 59, 1861, 313). E' uno studio nato dal desiderio di rispondere alle questioni proposte da STEINER nella sua grande memoria *Über solche algebraische Curven, welche einem Mittelpunkt haben*, che una traduzione eseguita dal WOEPCKE aveva popolarizzata in Francia; scopo di esso è di risolvere il seguente problema generale: «Determinare la classe della curva inviluppata da una trasversale che incontra una curva algebrica C dell'ordine m per modo che una determinata funzione (F), algebrica, razionale e intera delle mutue distanze degli m punti d'intersezione della trasversale con la curva abbia un assegnato valore». E' un problema che può oggi risolversi applicando il principio di trasporto di CLEBSCH e, in certi casi, sostituendo alla data curva un sistema di m rette. DE JONQUIÈRES, senza ricorrere a questi artifici, espone nell'esordio della sua memoria alcune delicate considerazioni generali mediante le quali il problema può trattarsi per qualunque funzione (F) e le illustra sopra numerosi esempi, in gran parte tratti dalla citata memoria di STEINER. Malgrado il talento di cui ivi egli diede prova, bisogna riconoscere essere questa una delle sue memorie meno lette, forse per il limitato interesse che hanno i problemi da lui risolti; in conseguenza non si sono notate le relazioni che hanno gl'inviluppi da lui studiati con i punti e le tangenti singolari della data curva, relazioni capaci di gettare qualche luce sopra tali elementi e che per ciò meriterebbero di venire accuratamente investigate.

IV. Le serie di curve.

12. — Passiamo ora ad esaminare un gruppo di scritti di DE JONQUIÈRES che possiedono grande importanza, malgrado le inesattezze che lo storico della geometria non può nè deve passare sotto silenzio, nep-

Digitized by Google

pure per un doveroso riguardo verso un illustre scienziato di recente scomparso; sono lavori che procurarono al loro autore amarezze e dolori, giacchè furono oggetto di fondate critiche e l'origine di una disgraziata polemica, che troncò definitivamente l'amichevole legame esistente fra CHASLES ed uno dei più distinti fra i suoi allievi.

Il primo degli accennati lavori (*Journ. de Math.*, II Ser., 6, 1861) ha per punto di partenza la seguente definizione: « des courbes géométriques de degré n forment une série quand elles satisfont toutes en commun à $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ conditions qulconques; et si N désigne le nombre des courbes de cette série qui passent en outre par un même point quelconque donné, la série se dira de l'indice N ». Ritenendo sottinteso che le condizioni di cui si parla siano tutte algebriche, questa definizione non lascia nulla a desiderare. Ma sgraziatamente DE JONQUIÈRES ritenne precisarla aggiungendo il seguente Lemma: « Toutes les courbes C_n d'une série d'indice N peuvent être représentées analytiquement par une équation $F(y, x) = 0$ du degré n dont tous les coefficients sont des fonctions algébriques, entières et rationnelles d'une indéterminée λ, qui s'élève dans l'un d'entre eux au moins au degré N, mais jamais à un degré supérieur ». Ora questo lemma è evidentemente falso o, volendo essere più indulgenti, restringe enormemente la portata delle conclusioni a cui giunse l'autore, rendendole applicabili esclusivamente a serie *razionali*. Gli è quanto osservò subito il matematico italiano G. ASCOLI (*Giorn. di Matem.* 5, 1867, p. 377) citando la serie costituita dalle tangenti di una curva generale nel suo ordine, la quale evidentemente non può rappresentarsi nel modo indicato applicando il citato Lemma; gli è quanto CAYLEY confermò poco dopo (*Phil. Transactions* 158, oppure *Mathematical Papers* 6, p. 212) servendosi di considerazioni sue proprie. DE JONQUIÈRES non si convinse dell'essere dalla parte del torto, chè in un articolo inserito nel T. 6 del *Giornale di matematiche* (p. 212) scrisse: « Quand je dis qu'une série d'ordre m et d'indice μ peut toujours être représentée par une seule équation algébrique du degré m en x et y et du degré μ en λ (λ étant indéterminée), je n'entends parler que d'une possibilité idéale; car il arrivera souvent que l'analyse sera impuissante à effectuer les éliminations nécessaires pour obtenir cette équation ». Per attenuare la sua colpa si può osservare che egli non faceva che uniformarsi ad un'opinione diffusissima, non solo nel 1861, ma anche anni dopo (1).

(1) A riprova di ciò riferiamo la seguente frase di CHASLES, che leggesi in una comunicazione presentata il 19 Novembre 1866 (C. R. 63, 1866): « M. de Jonquières a exprimé et défini les systèmes de courbes d'ordre m, comme tout le monde, par l'équation $F(x, y, \lambda) = 0$, qui ne renferme qu'un paramètre variable ».

Digitized by Google

Malgrado questa imperfezione la memoria di cui ci occupiamo contiene alcuni teoremi dotati di una validità insospettabile (v. una sua nota nelle *Nouv. Ann. de Math.*, II Ser., 7, 1868, p. 111 e 192) e che (sia detto a loro onore) permisero di ritrovare risultati noti da altra fonte; alludiamo specialmenie al seguente teorema di BISCHOFF (*Journ. f. r. u. a. Mathem.*, 56, 1859, p. 166): Se delle curve d'ordine n debbono passare per $\frac{n(n+3)}{2} - \mu$ punti e toccare μ curve degli ordini $m_1, m_2 \ldots, m_\mu$, il loro numero è espresso da $m_1 m_2 \ldots m_\mu (m_1+2n-3)(m_2+2n-3) \ldots (m_\mu + 2n - 3)$.

Fondandosi sopra congeneri considerazioni DE JONQUIÈRES stabilì poi (*Nouv. Ann. de Math.* 20, 1861, p. 83) alcune notevoli proposizioni relative al sistema costituito da un punto ed una curva; sono tutte casi particolari di un teorema che egli enunciò nelle *Nouv. Ann.* sotto forma di *Question* (n. 583) e che merita di venire qui riferito: « Date due curve piane fisse, una di grado m e l'altra di grado m'; se una tangente si muove sulla seconda e si conducono nei punti in cui essa incontra la prima le corrispondenti tangenti e le corrispondenti normali, le tangenti si taglieranno a due a due in una curva dell'ordine $\frac{1}{2} m m' (m-1)(2m-3)$ e le normali in altra dell'ordine $\frac{1}{2} m m' (m-1)(2m-1)$ ».

13. — Le fatte osservazioni intorno all'eccessiva generalità dei teoremi enunciati nella memoria citata in principio del n. prec. indussero DE JONQUIÈRES a dichiarare che i numeri da lui trovati non erano veri che in generale e al più (*Journ. de Math.* II Ser. 7, p. 71; *Giorn. di Matem.* 1, 1863, p. 128; *Nouv. Ann. de Math.* II Ser. 2, 1863, p. 203).

La ragione per cui i ragionamenti di DE JONQUIÈRES (in particolare quelli in cui intervengono condizioni di contatto) guidano a conclusioni errate risiede meno nella ipotetica razionalità delle serie di curve considerate, che nella presenza di curve singolari che è necessario separare da quelle generali se non si vuole attenersi a risultati puramente algebrici. Ora è una delle maggiori glorie di CHASLES l'avere insegnato ad ottenere conclusioni esatte ricorrendo a un secondo numero analogo all'indice di una serie; l'introduzione di esso si presenta spontaneamente allorquando si considera una curva piana tanto come luogo de' suoi punti, quanto come inviluppo delle sue tangenti; ma l'immensa utilità di esso non poteva essere preveduta che da un matematico di primo ordine. Per ciò nella teoria dei sistemi costituiti da ∞^1 curve piane è necessario distinguere due periodi; uno, che merita il nome di DE JONQUIÈ-

Digitized by Google

RES, l'altro quello di CHASLES; il primo prepara il secondo, ma questo gode di una perfezione che manca a quello.

Gli è ciò che oggi tutti ritengono pacifico, ma che nè CHASLES nè DE JONQUIÈRES vollero mai riconoscere, almeno pubblicamente (1). Il maestro negava a torto che l'introduzione dell'indice di una serie costituisse nella scienza un progresso importante; mentre il discepolo, irritato da attacchi forse troppo vivaci, arrivò a negare la fecondità dell'idea di definire mediante due caratteristiche qualunque sistema di coniche, fecondità di cui non dubitava quando, prima della polemica, lo applicò (*Nouv. Ann. de Math.* 20, 1861, p. 85) e, circa contemporaneamente a CHASLES (*C. R.* 58, 1864, p. 535), lo estese a curve d'ordine superiore. Oggi non è più lecito dubitare del suo valore, dopo le innumerevoli applicazioni fatte, alcune delle quale toccano persino un'estesa classe di curve non algebriche (cioè le curve panalgebriche).

Non seguiremo nei suoi particolari questa dolorosa disputa letteraria (2), nella quale, giova riconoscerlo, la parte più bella fu rappresentata da DE JONQUIÈRES; ma è nostro dovere osservare che essa non fu sterile per la scienza, avendo spinto il geometra di cui ci occupiamo ad approfondire e chiarire i metodi da lui usati (v. *Journ. de Mathém.* II Ser. 10, 1865, p. 412 e *C. R.* 63, 1866, p. 793). Come frutti di tali ricerche citiamo anzitutto le considerazioni mediante le quali egli ha fissati alcuni limiti di validità per certe sue formole relative ai sistemi di curve (o superficie): inoltre un *teorema fondamentale* (*Giorn. di matem.* 6, 1866, p. 45) che riferiamo affinchè il lettore vi ravvisi una delle forme del principio della conservazione del numero: « In qualunque questione relativa a proprietà projettive di una serie di curve (o superficie) il numero delle soluzioni è in generale eguale a μ volte ciò che esso è, nella stessa questione, per un semplice fascio, μ essendo l'indice della serie».

Di questo principio, chiamato da DE JONQUIÈRES *legge di moltiplicazione*, ZEUTHEN diede subito una dimostrazione analitica, che lo scopritore inserì in una sua nota anteriormente citata (*Giorn. di Matem.* 6, p. 212).

14. — Il teorema di BISCHOFF che riferimmo dianzi (n. 12) servì a DE JONQUIÈRES come punto di partenza per speciali ricerche (*C. R.* 63, 1866, p. 423, 485 e 522) che attrassero subito l'attenzione di CAYLEY (Id. p. 666; *Math. Papers* 7, p. 41-3) e per gli sforzi grazie a cui egli

(1) Mi esprimo così avendo presente un brano di una lettera che DE JONQUIÈRES diresse a G. ENESTRÖM il 4 Maggio 1890 e che questi pubblicò nella *Bibliotheca mathematica* (III Ser., 3, 1902, p. 298, nota 1).

(2) Mi è lecito farlo rinviando a un articolo di C. SEGRE citato in una nota precedente (v. p. 215).

Digitized by Google

giunse (*Journ. f. r. u. a. Mathem.* 66, 1866, p. 289) a determinare il numero delle curve algebriche d'un determinato ordine che, sotto certe condizioni, passano per punti dati, hanno con una data curva U_m contatti di ordini assegnati e soddisfanno ad altre condizioni in cui non entra questa curva. La formola risolutiva è troppo complicata per venire qui riferita, ma il suo valore è documentato dalle ricerche cui essa diede luogo (1). DE JONQUIÈRES ne diede due dimostrazioni; in una suppose che U_m fosse una curva razionale, nell'altra che fosse un gruppo di rette, in entrambi i casi determinando con cura le modificazioni che tali particolarizzazioni arrecano alla formola generale. Questo metodo di dimostrazione era stato da tempo immaginato da DE JONQUIÈRES; CHASLES a cui egli l'aveva fatto conoscere con lettera del 17 Febbrajo 1859, non esitò a dichiarare che esso non aveva nulla di matematico, benchè nella sua seconda forma lo avesse dichiarato (*Aperçu historique* p. 76) naturale ed usitatissimo; ciò non ostante in una comunicazione fatta all'Accademia delle Scienze il 12 Luglio 1886 egli pure ricorse a curve razionali con uno scopo analogo a quello di DE JONQUIÈRES. Il tipo di ragionamento di cui è parola si è imposto grazie alla sua forza, giacchè, anche nel mondo delle idee, « la force prime le droit »; per molto tempo costituì una delle più preziose risorse della geometria numerativa, essendo uno degli aspetti sotto cui presentasi il principio della conservazione del numero. DE JONQUIÈRES, non pago di averlo esposto chiaramente nella memoria da ultimo citata, ne fece uno studio *ad hoc* (*Ann. di Matem.* II Ser., 8, 1877, p. 132) aggiungendone eleganti applicazioni a questioni di geometria del piano e dello spazio (p. es. alla ricerca del numero delle costanti da cui dipende una superficie algebrica generale nel suo ordine) (2).

Queste osservazioni ci hanno trascinato fuori dell'argomento proprio del presente Cap.; vi saremo ricondotti (n. 16) per segnalare una proprietà scoperta da DE JONQUIÈRES in una rete di curve, nel corso di altre ricerche di cui ci occuperemo ora.

V. Superficie e curve gobbe algebriche.

15. — L'interesse di DE JONQUIÈRES per la geometria delle superficie e delle curve gobbe algebriche risale almeno al 1859; ciò risulta da una sua nota (*Nouv. Ann. de Mathém.* 18, 1859, p. 129) destinata a far

(1) CAYLEY, *Philos. Trans.* 158, 1868, o *Math. Papers* 9; A. BRILL, *Math. Annalen* 4, 1871, p. 527; 6, 1873, p. 32; 7, 1874, p. 607.

(2) La legittimità dei ragionamenti usati dal DE JONQUIÈRES fu in tempi vicini a noi, oggetto di ricerche approfondite che culminarono in quelle definitive di F. SEVERI (1935).

Digitized by Google

conoscere in Francia il procedimento che condusse CAYLEY e SALMON alla scoperta delle 27 rette di una superficie cubica; però è soltanto tre anni dopo che egli cominciò a occuparsi metodicamente di quelle figure. Il *Treatise on the Geometry of three dimensions* era allora appena uscito; l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* di CREMONA non contava che pochi mesi di vita; per ciò un matematico della mentalità di DE JONQUIÈRES doveva essere sedotto dall'idea di colmare le lacune che ancora presentava la teoria delle superficie facendole raggiungere il livello di perfezione toccato, grazie specialmente al geometra italiano, dalla teoria delle curve piane. E' prova di siffatto orientamento del suo pensiero una memoria sulle singolarità delle superficie (*Journ. de Mathém.*, II Ser., 7, 1862) basata sulla teoria delle polari rispetto ad una superficie algebrica. I teoremi stabiliti da DE JONQUIÈRES insegnano il numero dei punti doppi di superficie d'ordine qualunque appartenenti a un fascio, a una rete o ad un sistema ∞^3 ed i contatti che possono avere luogo fra superficie di differenti sistemi lineari; si trova ancora fra essi la seguente: « Il luogo dei punti aventi lo stesso piano polare rispetto a una superficie fissa S_m e ad una delle superficie di un fascio (S_n) è una curva gobba dell'ordine $(m + 2n - 3)^2 - (n - 1)(n + 2m - 3)$ ». Esso dà il corollario seguente: « Fra le superficie d'ordine n di un fascio se ne trovano in generale $m\{(m + 2n - 3)^2 - (n - 1)(n + 2m - 3)\}$ tangenti a una superficie dell'ordine m »: è una proposizione che il Nostro enunciò sotto forma di *Question n. 643* nelle *Nouv. Ann. de Mathém.* (II Ser., 2, 1863, p. 164).

16. — Alle singolarità delle superficie si riferisce un'altra Sua memoria (Id. II Ser., 3, 1864, p. 5) il cui precipuo scopo è di mostrare che una superficie generale dell'ordine n possiede

$$\frac{1}{6} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2 + 58n - 960)$$

piani tangenti tripli (1). La questione era stata trattata poco chiaramente da G. SALMON (*Trans. of the Irish Acad.* 23, 1857, e *Geom. of three dimensions*). Il metodo seguito da JONQUIÈRES venne ritenuto degno di prendere posto nella versione tedesca di quest'opera (p. 654); esso consiste nel considerare un piano bitangente di una superficie S_n come posizione limite di un piano tangente comune a S_n e ad un'altra superficie S'_n avente per limite S_n e un piano tritangente come posizione limite di un piano bitangente a S_n e tangente a S'_n. Questo tipo di ragionamento, ideato dal DE JONQUIÈRES, è degno di nota perchè è applicabile, *mutatis mutandis*, ad un grande numero di questioni; egli stesso

(1) Per $n=3$ si ritrova il numero 45, non 135 come per una svista scrive l'autore.

Digitized by Google

se ne servì più tardi (*Math. Ann.* 1, 1869, p. 424) per determinare, ricorrendo a considerazioni stereometriche, il numero delle curve d'ordine n di una rete aventi ciascuna due punti doppi (1); a tal fine cominciò dall'osservare che il numero cercato non differisce da quello delle superficie di una rete d'ordine n che sono bitangenti ad un piano, e per trovarlo considerò le superficie della rete che toccano due piani distinti, riservandosi di fare che questi coincidano: così riuscì a concludere la seguente espressione del numero cercato: $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ (2).

17. — Mentre il secondo dei lavori testè analizzati presenta col primo un legame assai superficiale, ve n'è un altro (*Annali di Matem.* 5, 1863, p. 24) che è una vera continuazione di quello che analizzammo nel n. 15. Scopo di esso è di svolgere un programma di ricerche sulle curve gobbe che era stato delineato da CHASLES (*C. R.* 53, 1861, p. 985). Ivi l'autore studia esclusivamente curve che sono intersezioni complete di superficie, i sistemi lineari da esse formate e le questioni di contatto a cui danno luogo; per risolverle fa mestieri ricorrere alla teoria delle superficie, anzi molti teoremi dimostrati da DE JONQUIÈRES non sono che modi particolari per enunciare teoremi relativi a tali figure. Le proposizioni stabilite dal nostro autore appartengono in generale alla geometria numerativa e nella massima parte alla geometria di posizione (3); ne riferiamo soltanto due.

La prima afferma che per una arbitraria retta r dello spazio si possono condurre $mn(m+n-2)$ piani tangenti alla curva d'intersezione di due superficie degli ordini m, n; i loro punti di contatto sono quelli in cui la data curva è incontrata da una certa superficie dell'ordine $m+n-2$; per ciò essi si trovano sopra due curve gobbe una dell'ordine $m(m+n-2)$, l'altra dell'ordine $n(m+n-2)$, la prima delle quali viene chiamata dall'autore *curva gobba polare di r*, nome che poteva benissimo essere invece dato alla seconda (4).

---

(1) DE JONQUIÈRES ragiona sopra una rete con $\frac{n(n+3)}{2}-2$ punti base, ma il risultato a cui giunge è generale. La questione da lui trattata era stata risolta prima da CREMONA (*Ann. di Matem.* 6, 1864).

(2) In una comunicazione preliminare (*C. R.* 67, 1868, p. 1338) questo numero era stato dato inesattamente.

(3) Alla geometria metrica appartiene la seguente: per un punto qualunque dello spazio passano $mn(m+n-1)$ piani normali della curva d'intersezione di due superficie degli ordini m, n.

(4) Sembra miglior consiglio introdurre come *superficie polare* della retta r la superficie d'ordine $m+n-2$ che taglia la data curva nei punti di contatto dei considerati piani tangenti.

Digitized by Google

La seconda proposizione concerne i fasci di curve determinati sopra una superficie dell'ordine n da due fasci di superficie degli ordini m e p; DE JONQUIÈRES afferma che in detti fasci si trovano

$$n\left|n^2 + 3(m^2 + p^2) + 6n(m + p) + 12mp - 12n - 24(m + p) + 26\right|$$

coppie di superficie aventi fra loro un contatto di secondo ordine; è un risultato notevolissimo, onde si lamenta che l'autore ne abbia taciuta la dimostrazione; supponendo $n = 1$ si ritrova un teorema enunciato da STEINER; in generale lo si può considerare come corollario di una formola di C. SEGRE (*Atti di Torino* 31, 1896, p. 485).

18. — Grazie a queste assidue ricerche sulle superficie algebriche e sopra i sistema che esse formano, DE JONQUIÈRES era mirabilmente preparato per affrontare la teoria dei sistemi di ∞^1 superficie. Nessuna meraviglia, dunque, se sino dal 28 Marzo 1864 egli potè presentare all'Accademia di Parigi una memoria (*C. R.* 58, 1864, p. 567) in cui sono estese a superficie algebriche qualsivogliano le considerazioni esposte prima (15 Febbrajo 1864) da CHASLES sulla teoria dei sistemi di ∞^1 coniche. Gli è nella citata comunicazione che il Nostro introdusse la considerazione delle *caratteristiche* μ, ν, ϱ di un sistema ∞^1, numeri che esprimono il numero delle superficie del sistema che passano per un punto o toccano una retta o un piano dato. Fra le applicazioni fatte notiamo la formola $N = \mu r + \nu n + \varrho m$, che esprime il numero della superficie d'un sistema (μ, ν, ϱ) che sono tangenti ad una superficie di cui m è l'ordine, r la classe e n il rango. DE JONQUIÈRES la dimostrò anzitutto per una superficie generale; più tardi (C. R. 61, 1865, 440) fece vedere che essa è pure vera se la superficie consta di un gruppo di piani, ovvero se non possiede che una linea doppia; si è per ciò indotti, dice l'autore, ad ammettere che sussiste in ogni caso; ricerche posteriori(1) trovarono rigorosamente la fondatezza della considerazione del geniale matematico francese. Analoga alla precedente è la formola $N = \mu r + \nu p$ che esprime il numero delle superficie del sistema considerato che toccano una curva gobba d'ordine p e classe r; è facile stabilirla nel caso in cui la curva considerata sia intersezione completa di due superficie; DE JONQUIÈRES mostrò che sussiste anche quando essa costituisce, insieme a $k - 1$ intersezioni complete, una curva di tal fatta; da ciò fu indotto ad ammetterla vera in generale, come fu poi dimostrato rigorosamente da altri (2).

19. — Proseguendo in questo ordine di considerazioni egli fu condotto ad occuparsi delle « serie di curve a doppia curvatura »

(1) A. BRILL (*Math. Ann.* 8, 1875, p. 534) e H. SCHUBERT (*Göttinger Nachr.* 1879, p. 401 e *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 54).

(2) SCHUBERT, *Kalkul* citato p. 296.

Digitized by Google

(*Giorn. di Matem.* 4, 1866, p. 210), ognuna delle quali suppose generata dalle mutue intersezioni di due serie projettiva di superficie, una d'ordine m e indice μ, l'altra d'ordine m' e indice μ'. Su di esse DE JONQUIÈRES espose tre teoremi di cui ecco gli enunciati:

I. « Una retta qualunque dello spazio è incontrata da $m\mu' + m'\mu$ curve del sistema »; lo si dimostra con una facile applicazione del principio di corrispondenza.

II. « Un piano qualunque è in generale toccato da $\mu' m(m' + 2m - 3) + \mu m'(m + 2m' - 3)$ curve del sistema »; ammessa la razionalità dei sistemi di superficie generatori della serie considerata, lo si può dimostrare ricordando che il *tact-invariant* di due curve degli ordini m e m' è nei coefficienti della prima del grado $m(m' + 2m - 3)$ e in quelli della seconda del grado $m'(m + 2m' - 3)$. I due numeri che intervengono in questi teoremi si chiamano *caratteristiche* della data serie di curve.

III. « Il numero dei punti doppi di curve della serie è espresso come segue:

$$\mu' m[(m+2m'-3)^2-(m'-1)(m'+2m-3)]+\mu m'[(m'+2m-3)^2-(m-1)(m+2m'-3)]\text{ »};$$

Si dimostra ciò servendosi del fatto che il *tact-invariant* di due superficie degli ordini m e m' è nei loro coefficienti rispettivamente degli ordini, m e m^1 ordini $m'[m'+2m-3)^2-(m-1)(m+2m'-3)]$ e $m[(m+2m'-3)^2-(m'-1)(m'+2m-3)]$, e supponendo sempre che i sistemi di superficie generatori della serie siano razionali.

Dei citati teoremi DE JONQUIÈRES fece notevoli applicazioni ai sistemi di ∞^1 coniche nello spazio.

Chiuderemo ricordando le *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque* (Paris, 1866), grazie alle considerazioni ivi svolte intorno ai limiti di validità dei surriferiti teoremi.

VI. Trasformazioni geometriche. Teoria dei poliedri.

20. La nostra analisi dei lavori geometrici dello scienziato-marinaio volge al termine; ma prima di chiuderla dobbiamo dar notizia dei frutti da lui raccolti nel campo delle trasformazioni geometriche. Quasi agli inizi della sua carriera matematica egli vi ha volto il pensiero (*Ann. di Matem.* 1, 1858, p. 110) applicando la legge di trasformazione ideata dal MAGNUS (*Journ. f. r. u. a. Mathem.* 8, 1832, p. 51) alla costruzione di alcune curve con tre punti multipli. Alla stessa teoria egli fu poi indotto cercando di perfezionare la teoria delle curve gobbe che non sono intersezioni complete di superficie; con ragione egli vide che lo scopo potevasi conseguire generalizzando il noto metodo di generazione delle cubiche gobbe ideato dal SEYDEWITZ mediante due stelle projettive di raggi. Ciò era

Digitized by Google

possibile disponendo di una corrispondenza univoca diversa dall'omografia. Una trasformazione siffatta trovasi definita e studiata in una memoria comunicata da DE JONQUIÈRES all'Istituto di Francia nelle sedute del 10 Ottobre 1859 e del 23 Gennajo 1860; i *Comptes Rendus* (49, 1859, p. 542) ne contengono un breve riassunto, ma un rapporto non fu mai presentato; la prima parte di essa apparve nel 1864 (*Nouv. Ann. de Math.*, II Ser., 3, p. 97) e il lavoro completo ventun anno dopo per cura di G. B. GUCCIA (*Giorn. di Matem.* 23, 1885, p. 48; cfr. *C. R.* 101, 1885, p. 499); tuttavia già da tempo si è dato il nome di «trasformazione di DE JONQUIÈRES» alla legge di corrispondenza da lui immaginata.

La memoria in questione si apre con l'osservazione che tutte le curve d'ordine n di un piano π che hanno comuni un punto $(n-1)$—plo e $2(n-1)$ punti semplici sono in numero di ∞^2 e si tagliano a due a due in un unico punto variabile. Stabilendo una corrispondenza biunivoca fra esse e le rette di un altro piano π_1, con la condizione che al punto comune a due di queste corrisponda l'intersezione delle curve corrispondenti di π, si giunge ad una relazione biunivoca fra π e π_1. Due figure corrispondenti in questi due piani si diranno *isografiche* e DE JONQUIÈRES fa l'osservazione importante che in π_1 si troverà un sistema di curve d'ordine n del tutto analogo a quello donde si è partiti. Facendo coincidere π_1 con π si avranno $n+2$ punti uniti. Ciò prova che projettando i due piani considerati da due centri arbitrari si otterranno due *stelle isografiche* che, con le intersezioni delle coppie di raggi corrispondenti, genereranno una curva dell'ordine $n+2$.

DE JONQUIÈRES applicò più tardi la sua trasformazione (*Nouv. Ann. de Math.*, II Ser., 3, 1864, p. 218) alla ricerca delle curve di una delle sue reti che sono tangenti a due curve del proprio piano o che sono bitangenti od osculatrici ad una; supposto $n=2$ si ottengono così i numeri delle coniche passanti per tre punti dati e tangenti a due date curve, bitangenti od osculatrici ad una; egli aggiunge, senza dimostrazione i numeri analoghi delle coniche che passano per k $(=2, 1, 0)$ punti e sono $(5-k)$ — tangenti a una data curva; ma essi furono riconosciuti inesatti (1).

DE JONQUIÈRES, nell'ultimo periodo della sua vita, si occupò nuovamente della teoria delle trasformazioni univoche (*C. R.* 101, 1885, p. 720) indicandone una speciale che si presenta quando il grado n della trasformazione è il prodotto di due numeri primi e facendo alcune considerazioni (Id. id. p. 857 e *Giorn. di Matem.* 24, 1886, p. 1) sull'aspetto aritmetico della ricerca delle trasformazioni geometriche di dato ordine, senza però ar-

(1) CAYLEY, *Mathem. Papers* T. VII p. 550 e 553.

Digitized by Google

restarsi all'essenziale questione di distinguere le soluzioni aritmetiche da quelle geometriche.

21. — Il Nostro in tarda età ha rivolto il pensiero alla teoria dei poliedri, ma piuttosto da storico che da investigatore originale. Ignoriamo per quale via egli sia stato condotto a occuparsi, dal punto di vista storico-critico, della relazione $F + V = S + 2$ che in generale intercede fra il numero F delle facce, quello V dei vertici e quello S degli spigoli di un poliedro; possiamo soltanto citare i suoi lavori sull'argomento. In uno (*C. R.* 110, 1890, p. 110) egli fa una rivista delle dimostrazioni che ne diedero LEGENDRE, CAUCHY e POINSOT, mentre in altro (Ivi, p. 169) fa un esame critico delle considerazioni sulla sua validità dovute a LHUILLIER e GERGONNE. Ma, proseguendo in tali ricerche, avendo osservato che quella formola si trova anche in uno scritto postumo di DESCARTES che FOUCHER DE CAREIL rinvenne fra le carte di LEIBNIZ, si propose di stabilire la priorità di DESCARTES *di fatto* se non di *diritto*; tale è lo scopo di due note (Id. p. 261 e 315), ove spesso l'erudito cede il posto al geometra. La tesi storica abbracciata da DE JONQUIÈRES era già stata sostenuta da R. BALTZER (1): gli è quanto io mi permisi di far notare al dotto ammiraglio (mi sia perdonato questo ricordo personale relativo ad una circostanza che fu punto di partenza di rapporti cordiali con l'illustre defunto) e che egli si affrettò a riconoscere pubblicamente (Id. p. 687). Non ancora pago di tale rivendicazione in favore di un suo compatriotta, egli credette opportuno di fare una nuova edizione critica del testo di DESCARTES (*Mém. de Paris* 45, 1899, p. 325; cfr. anche C. R. 110, 1890, p. 677) che potevasi leggere soltanto in un volume estremamente raro; un riassunto di questo lavoro fu inserito nella *Bibliotheca mathematica* (II Ser. 4, 1890, p. 43), onde tutto fa credere che in avvenire dagli storici non sarà trascurata questa benemerenza dell'illustre filosofo.

VII. Algebra e Teoria dei numeri.

22. — Gli sforzi compiuti da DE JONQUIÈRES per attrarre l'attenzione dei matematici sopra una scoperta ordinariamente non attribuita secondo giustizia, richiama alla memoria quelli da lui fatti sei anni prima (*C. R.* 99, 1884, p. 62 e 111) per diffondere la conoscenza di una celebre regola sulle equazioni numeriche enunciata da NEWTON e dimostrata soltanto nel 1865 da SYLVESTER, e poi per collegarla alla nota regola dei segni di DESCARTES (Ivi p. 165 e 269). Condotto da siffatti studi a meditare sopra la teoria delle equazioni algebriche, egli diede a questa alcuni

(1) *Monatsberichte der Akad. der Wisseuschaften zu Berlin* 1861, p. 1043.

Digitized by Google

complementi che dovrebbero prendere posto in qualunque trattazione completa della materia (Ivi p. 345, 469 o 483); fra le conclusioni a cui egli giunse limitiamoci a citare il seguente teorema: « Un'equazione trinomia di grado m possiede al più quattro radici reali se m è pari e tre se è dispari; essa può avere tutte le sue radici immaginarie o almeno due nel primo caso e tutte meno una nel secondo ». Ulteriori studi gli permisero di estendere questo teorema a qualunque tipo di equazioni algebriche (Id. 1143 e *Atti dell'Acc. Pontif. dei Nuovi Lincei* 38, 1886, p. 55).

23. — Mentre la teoria delle equazioni non occupò che un breve periodo nella vita di DE JONQUIÈRES, all'aritmetica superiore egli s'interessò per circa un quarto di secolo (1878-1901). Le due prime sue pubblicazioni sull'argomento (*Nouv. Ann. de Math.* II Ser., 17, 1878, p. 374 e 516) si riferiscono alle condizioni di risolubilità delle equazioni $x^3 \pm a = y^2$, questione su cui egli è ritornato in una delle sue ultime pubblicazioni (*L'interm. des math.* 6, 1899, p. 91). Al pari di questi si riferiscono all'analisi indeterminata quadrato-cubica altri due scritti (*C. R.* 98, 1883, p. 1025; *Atti dell'Acc. Pontif. dei Nuovi Lincei* 37, 1886, p. 183), concernenti l'equazione indeterminata

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$$

che s'incontra nella teoria dell'osculazione delle superficie. Nel corso dell'anno 1878 egli si occupò della scomposizione nella somma di due quadrati di un numero che sia il prodotto di numeri della forma $4n+1$ (*Nouv. Ann. de Math.* II Ser., 17, p. 241 e 289); ma in alcune applicazioni fattene si riscontrano errori irreparabili (1). Un po' più felice fu scoprendo una formola esprimente il numero dei numeri primi che non superano un dato limite (*C. R.* 95, 1882, p. 1144); ma sgraziatamente in ciò egli era stato preceduto assai prima da LEGENDRE (2); DE JONQUIÈRES, avvertitone, lo riconobbe pubblicamente (Id. p. 1343) e poi diede di quella formola una dimostrazione originale e assai pregevole (*C. R.* 96, 1882, p. 231).

24. — Questa circostanza non è la sola in cui DE JONQUIÈRES dovette riconoscere di essere stato prevenuto da altri; infatti nel suo primo saggio sul teorema di FERMAT (*C. R.* 98, 1884, p. 863) egli involontariamente scelse lo stesso punto di partenza che ABEL aveva indicato in una lettera a HOLMBOË del 4 Agosto 1823. Al torema di FERMAT collegasi la risoluzione, compiuta da DE JONQUIÈRES (*C. R.* 120, 1895, p. 1139 e 1236), della questione se nella formola $p^n q^n = c^n - b^n$ è possibile

(1) E. NETTO in *Jahrbuch über die Fort. des Mathematik*, 10 Bd., 1878, p. 137.
(2) *Théorie des nombres*, II éd., Paris 1808, p. 414.

Digitized by Google

esprimere c e b mediante funzioni algebriche di p, q, in modo che fra i due membri si stabilisca un'identità letterale: egli concluse l'impossibilità per $n>2$.

Questo lavoro, in cui egli applicò considerazioni algebriche in questioni aritmetiche, si collega ad altri in cui da un analogo punto di vista egli trattò questioni della teoria delle funzioni ellittiche (*C. R.* 101, 1885, p. 415) e di speciali determinanti (Id. 126, 1895, p. 408 e 580). In quest'ultimo lavoro rileviamo l'enunciato del seguente notevole teorema: « Il prodotto di n numeri differenti per le loro mutue differenze è sempre divisibile per $1!\,2!\ldots n!$ » (1).

25. — Un importante gruppo di lavori di DE JONQUIÈRES (*C. R.* 96, 1883, p. 568, 694, 832, 1020, 1129, 1210, 1297, 1351, 1420, 1490, 1571, 1721) concerne lo sviluppo dei radicali quadratici in frazione continua, teoria rimasta stazionaria a partire da LAGRANGE ed a cui egli ha la gloria di avere fatto compiere notevoli progressi.

Gli ultimi scritti di cui ci dobbiamo occupare documentano la profondità degli studi da lui compiuti sopra le *Disquisitiones arithmeticae* di GAUSS, matematico pel quale nutriva ed ebbe a manifestare la più schietta ammirazione (cfr. C. R. 122, 1896, p. 829 e 857). Alcuni concernono le radici primitive dei numeri interi (Id. id. p. 1451) e quelle dette da DE JONQUIÈRES secondarie (Id. id. p. 1513); esse mirano a scoprire le proprietà di cui godono i loro prodotti. In altri è dato un complemento a quanto nelle *Disq. arith.* leggesi riguardo alla funzione $\frac{x^p - y^p}{x - y}$ (Id. 98 1884, p. 1358), sono esposte alcune osservazioni sopra i residui di potenze (Id. 124, 1897, p. 334 e 428) e finalmente è dato qualche contributo all'importante questione di decidere per quali valori di D sia risolubile l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ (Id. 126, 1898, p. 1837 e 127, 1898, p. 596). Chiuderemo ricordando alcune sue note (Id. id. p. 863, 991, 1077, 1177; 127, 1898, p. 964; 132, 1901, p. 750) di analisi indeterminata di secondo grado, ove è notevole un parallelo fra i relativi metodi di risoluzione di LAGRANGE e di GAUSS, maestri di DE JONQUIÈRES in aritmetica, come CHASLES lo era stato in geometria.

Eccoci al termine della nostra rassegna della produzione matematica di DE JONQUIÈRES! Se siamo riusciti a far condividere ai nostri lettori il piacere che procurò a noi lo studio di una collezione tanto ricca, brillante e variopinta, avremo raggiunto lo scopo di qualunque biografia, quello di farne ammirare il protagonista. Ma, anche se a tanto non

(1) Questo teorema fu dimostrato da E. GUYON (*C. R.* 126, 1895, 534).

Digitized by Google

siamo arrivati, anche se ne rimanemmo ben lungi, ci lusinghiamo che coloro che ebbero la pazienza di seguirci sin qui, riconosceranno che non è un'illusione di panegirista quella che ci fa collocare DE JONQUIÈRES in prima linea fra i geometri francesi di secondo ordine vissuti dopo la prima metà del Secolo XIX. Se egli non ha conquistato un posto ancora più cospicuo, presumibilmente è che a ciò furono di ostacolo i suoi doveri marinari: lo si può credere perchè l'influenza della sua professione è visibile sulla totalità dei suoi lavori matematici. Infatti, la discontinuità nelle sue indagini di scienza pura e i suoi frequenti allontanamenti da centri scientifici produssero le lacune nella sua coltura, l'insufficiente conoscenza della letteratura, che sono visibili in tanti suoi lavori. Ma d'altronde, la diuturna lotta con le onde dell'oceano, a cui erasi abituato sin da giovane, sembra avergli fatto acquistare un ammirabile coraggio ed una straordinaria iniziativa anche riguardo alle questioni scientifiche. In conseguenza noi lo vediamo affrontare quasi sorridendo questioni capaci di spaventare un matematico consumato e usare tranquillamente metodi pericolosi, sul cui rigore oggi ancora si discute. Si direbbe che mentre DE JONQUIÈRES, come soldato appartiene all'armata regolare, come geometra abbia tutti i caratteri di un volontario, sempre ardito ed entusiasta, sprezzante della vecchia pratica e corrente all'assalto con procedimenti inauditi.

I geometri pavidi, che preferiscono le vie note e sicure, si compiaceranno di fare un'esposizione delle ferite da lui ricevute e che noi, da storici imparziali, non abbiamo celate; ma si può risponder loro che siffatte ferite sono la prerogativa dei pionieri e che, d'altronde, soltanto i vili che ignorano i campi di battaglia, non conoscono la via dell'ospedale. Si può aggiungere che quest'attitudine coraggiosa sino alla temerità assunta da DE JONQUIÈRES, corrisponde al carattere dell'epoca (nella quale cadde appunto la sua giovinezza) in cui la geometria, risvegliata dopo un lungo riposo, mostravasi impaziente di riguadagnare il tempo perduto, per raggiungere il livello a cui era arrivata l'analisi.

Il regno matematico si arricchisce incessantemente con rapidità tanto vertiginosa, l'aspetto della nostra scienza si trasforma in modo talmente meraviglioso che io non so se nei futuri trattati d'algebra superiore e di alta aritmetica troveranno posto le proposizioni e le osservazioni dovute a DE JONQUIÈRES. E' anche da dubitare che i metodi disinvolti con cui egli ha determinati tanti numeri relativi a curve e superficie algebriche, siano per essere in avvenire considerati come legittimi. Ma una cosa è certa: qualunque sia la sorte che l'avvenire prepara alla geometria numerativa, DE JONQUIÈRES sarà sempre riguardato, da giudici imparziali, come uno di coloro che efficacemente contribuirono alla creazione di questa importante disciplina.

31 Maggio 1902.

Digitized by Google

XV.

LUIGI CREMONA

(Riassunto di una memoria pubblicata in francese nel T. V (1904) Ser. III della *Bibliotheca mathematica*).

I. Infanzia e adolescenza (1)

Il grande geometra, di cui oggi si piange la perdita irreparabile, appartenne ad una distinta famiglia, oriunda da Novara, che godette di una considerevole agiatezza in epoca non molto lontana da noi. Sua nonna (MARGHERITA FERRARI CREMONA), rimasta vedova giovanissima e di indole dissipatrice, fu la causa precipua della rovina economica della famiglia. Quando, nel 1770, il padre del matematico (GAUDENZIO) vide la luce, il patrimonio della famiglia era dilapidato; ma sgraziatamente egli pure era portato allo spendere e non seppe dare l'energico colpo di timone che sarebbe stato indispensabile per evitare il naufragio. All'età di 25 anni, avendo conseguito a Pavia il grado di dottore in legge, sposò CATERINA CARNERALI, da cui ebbe tre figli, GIUSEPPE, GIOVANNI e GIOVANNA: il primogenito si stabilì a Venezia e vi divenne distinto avvocato; GIOVANNI fu ragioniere: e la figlia sposò a Groppello G. B. MAGENTA.

Nel 1818 GAUDENZIO fu costretto a lasciare Milano, ove si era stabilito, per provvedere al sostentamento della famiglia e allora accettò un modesto impiego presso la Delegazione austriaca di Pavia. Rimasto vedovo si rimaritò il 28 Novembre 1829; e benchè contasse oltre 59 anni scelse come compagna una giovane la quale non ne contava che 20. Da questo nuovo matrimonio nacquero altri quattro figli: il 7 dicembre 1830, nella casa recante oggi il numero 8 nella via Severino Boezio, ebbe i natali ANTONIO LUIGI GAUDENZIO GIUSEPPE, colui che doveva assicurare una rinomanza perenne al nome CREMONA nel campo scientifico; due anni dopo PIETRO, morto nel 1855 di tisi, mentre era tuttora studente; in seguito FRANCESCO, morto decenne della medesima malattia; e finalmente il 10 aprile 1837, TRANQUILLO, il futuro eminente pittore, morto a Milano il 10 Giugno 1878.

(1) Per quanto concerne le notizie biografiche, mi furono d'inestimabile ajuto alcune note comunicatemi dalla sig.a ITALA COZZOLINO CREMONA, figlia dell'illustre matematico. Il prof. BERZOLARI ebbe la cortesia di compiere, dietro mia richiesta, alcune ricerche negli archivi del Ginnasio e dell'Università di Pavia e porne a mia disposizione i risultati. Anche i Prof.ri E. BERTINI e M. MISANI mi furono larghi di preziose informazioni. A tutti i miei più vivi ringraziamenti.

Digitized by Google

Il secondo matrimonio di GAUDENZIO CREMONA, per ragioni facili a comprendere, venne disapprovato e combattuto dai figli del primo letto: tuttavia il figlio GIUSEPPE non si rifiutò mai di soccorrere spesso una famiglia che egli riconosceva degna, non soltanto di compassione, ma della più alta stima. Tali soccorsi divennero indispensabili quando (1841) morì il padre CREMONA, in seguito ad una caduta, lasciando una vedova trentenne che, con l'unica risorsa di una minuscola pensione, doveva mantenere ed educare quattro figliuoli, il maggiore dei quali non contava più di undici anni.

Il commovente spettacolo offerto dalla lotta quotidiana che doveva sostenere questa giovane madre e che essa combatteva con nobile e serena fierezza avrà indubbiamente esercitata un'influenza benefica sopra LUIGI CREMONA e contribuito a foggiare il suo carattere irreprensibile e fermo: infatti si può dire che in tutti gli atti da lui compiuti si trovi fedelmente ritratta la fisonomia morale della sua venerata madre. Alla morte del padre egli trovavasi nell'ultimo anno di ginnasio; nell'intento di affrettare il giorno in cui avrebbe potuto essere giovevole alla famiglia egli raddoppiò di ardore e attività nello studio: così, durante tutto il corso secondario, ottenne la nota «eminente» in tutte le materie e fu sempre il primo della sua classe.

Durante l'intero corso «filosofico» (per usare la nomenclatura ufficiale del tempo) egli ebbe sempre una grande propensione per le lettere: gli è così che potè, non soltanto formarsi quell'ammirabile stile, ben noto a tutti i matematici, ma rendersi familiare il Latino e il Greco. Giova osservare qui che in età matura rimase entusiasta ammiratore dei grandi pensatori antichi; infatti, quando nel 1901 si discusse una nuova volta in Italia l'opportunità di sopprimere il Greco dai programmi dell'insegnamento classico, egli si schierò dalla parte dei conservatori, sostenendo pubblicamente che «la vera scuola classica, col latino e col greco, deve rimanere intatta; e tale rimanendo sarà sempre la scuola preferita dalle intelligenze elette» (1).

Gli eroi di OMERO e VIRGILIO infiammavano il giovane CREMONA per la sua povera patria, la quale era allora tutta scossa dal grande movimento rivoluzionario che, preparando il glorioso '48, poneva in effervescenza tutta la gioventù studiosa delle Università di Pavia e di Padova. Se si riflette ancora che fra i condiscepoli del futuro scienziato si trovavano ENRICO e GIOVANNI CAIROLI e che egli trascorreva le proprie vacanze a Groppello con i due fratelli maggiori BENEDETTO ed ERNESTO, non

(1) Cfr. una lettera al Prof. RAMORINO datata «Vallombrosa 29 luglio 1901» e pubblicata in *Atene e Roma* (Firenze, Agosto 1901).

Digitized by Google

ci si stupirà apprendendo che, quando la legione « Italia libera », costituita da 160 studenti napolitani diretti a combattere l'Austria, attraversò Pavia, egli abbandonasse la casa materna « senza rimorso » (come egli ebbe a scrivere) perchè « avrebbe creduto di mancare ai dettami della più santa delle religioni e di commettere un atto di viltà e inettitudine ricusando di dare il sangue per la patria ». Pochi giorni dopo, un altro futuro sommo matematico, ENRICO BETTI, si batteva a Curtatone sotto il comando di O. E. MOSSOTTI, il ben noto professore di fisica matematica dell'Università di Pisa.

Il corpo a cui era stato iscritto L. CREMONA, il 12 Aprile 1848 andò a Ferrara per raggiungere il generale DURANDO; questi lo inviò subito a Polesella e di qui, con una faticosissima marcia, a Treviso sotto la guida del capitano MAURO. Era sempre con profonda emozione che l'oscuro milite, destinato a divenire una delle pure glorie italiane, raccontava gli episodi della guerra a cui ebbe a partecipare, gli attacchi contro gli Austriaci a Nevesa sul Piave, l'assedio di Treviso e in particolare l'energica difesa fatta del forte situato in vicinanza della porta S. Tommaso; « in quel giorno » (egli diceva) « sparavamo tanto e così serrato che uno squadrone di cavalleria nemica non potè avanzare ». Il suo coraggio e la sua perizia gli valsero la nomina a caporale, tosto seguita da quella a sergente.

Ogni resistenza essendo ormai divenuta inutile in aperta campagna contro un nemico numerosissimo, la legione « Italia libera » accorse in difesa di Venezia che, mediante un assedio rimasto celebre, ritardava l'ora suprema di una resa inevitabile. L. CREMONA, appena giunto a Venezia, si recò nella casa di suo fratello GIUSEPPE, più per avere notizie della sua povera madre, che per chiedergli soccorsi: ivi, dopo una breve romanzina per la sua scappatella, GIUSEPPE CREMONA pose a disposizione di LUIGI la propria casa e la propria tavola per tutto il suo soggiorno a Venezia. Ma la legione « Italia libera » venne bentosto inviata a Chioggia (forte di Brondolo) e poi alla difesa di Marghera. CREMONA ebbe parte così importante in questa memorabile difesa che il capitano MAURO lo segnalò ai soldati come modello di virtù civili e militari grazie al suo coraggio, alla sua intelligenza, alla sua disciplina ed alla sua probità. Tutti sanno che tale difesa finì soltanto quando un mucchio di rovine segnò il posto in cui era stato il forte di Marghera. Allora i resti della compagnia alla quale apparteneva il nostro eroe, si ritirarono a Venezia, ove, benchè perseguitati dal colèra e da una spaventevole carestia, essi cooperarono ad un'accanita difesa del ponte che attraversa la laguna. Ma, ad onta dell'indescrivibile eroismo di tutta la popolazione, non tardò a sorgere l'alba del 24 Agosto 1849, ultima

Digitized by Google

dell'indipendenza veneta. CREMONA ebbe almeno un'ultima suprema soddisfazione, quella che quanto restava dell'esercito nazionale potè sfilare con tutti gli onori delle armi, a bandiere spiegate ed al rullo dei tamburi, dinanzi ai generali austriaci stupiti che un manipolo di reclute pallide e scarne, mal vestite e peggio calzate, avesse potuto tenere in iscacco un intero esercito, formato da veterani provetti in tutti gli accorgimenti della guerra.

II. All' Università. Prime pubblicazioni.

Privo di mezzi finanziari, stanco e ammalato L. CREMONA riprese pieno di tristezza il cammino di Pavia, oppresso dal dolore di vedere sempre schiava la sua diletta patria, malgrado tanto sangue versato; ma sulla soglia della sua casa lo attendeva uu dolore ancora più grande: sua madre era morta già da parecchi mesi. In presenza della desolazione del presente, dell'incertezza dell'avvenire e delle gravi responsabilità che pesavano sopra di lui, egli non si perdette d'animo, ma comprese essere giunto il momento di mostrarsi all'altezza del còmpito che il destino gli aveva affidato. Rimessosi appena da un attacco di febbre tifoide, i cui germi aveva recato seco da Venezia, egli riprese con rinnovata lena gli studi interrotti e il 27 Novembre 1849 conseguì il diploma detto «assolutoria negli studi filosofici». In conseguenza, negli anni successivi potè frequentare nell'Università di Pavia il corso d'ingegneria civile sotto la direzione di A. BORDONI, di A. GABBA e poi di F. BRIOSCHI. Nei giorni 5 Gennaio, 5 Marzo e 6 Maggio 1853 fu ammesso a subire gli «esami di rigore», ottenendo in ciascuno ad unanimità il certificato di «valde bene», epperò fu dichiarato «approbatus p. unanimis cum approbatione». Un decreto del 9 Maggio 1853 lo chiamò a sostenere il giorno dopo la pubblica discussione per conseguire il grado accademico di «dottore negli studi d'ingegneria civile ed architetto» e tale grado gli venne conferito per acclamazione.

Fra i commilitoni che CREMONA ebbe nel corso della sua campagna egli distinse NICOLA FERRARI, giovane genovese amico ed ammiratore di MAZZINI. FERRARI era repubblicano, CREMONA monarchico; tuttavia essi si trovavano d'accordo nella loro aspirazione finale, l'unità e l'indipendenza dell'Italia. NICOLA leggeva spesso al suo amico le lettere, frementi di patriottismo, che gli scriveva sua sorella ELISA, allora direttrice dell'Asilo infantile di Genova; e CREMONA non tardò a scoprire, attraverso queste lettere, la donna meritevole di divenire compagna della sua vita; personalmente egli ne fece la conoscenza a Genova nel 1853, sua moglie essa divenne il 4 Agosto dell'anno successivo; in causa del colèra che infieriva allora a Genova, il matrimonio fu celebrato a Grop-

Digitized by Google

pello in casa Magenta. Per dichiarazione stessa di CREMONA, sua moglie lo consigliò saggiamente in tutte le circostanze difficili della vita: essa si addossò il governo della casa e l'educazione dei figli; così rese possibile a lui il lavoro continuo e fecondo; essa fu il buon genio di tutta la famiglia sino al giorno (16 Luglio 1882) in cui si spense serenamente a Roma.

I primi anni di matrimonio di CREMONA furono un'epoca di patimenti e di lotte incessanti: il Governo austriaco non era propenso ad accordare un posto nella pubblica istruzione all'antico difensore di Venezia; perciò egli dovette rassegnarsi all'ufficio di ripetitore in cospicue famiglie pavesi. Finalmente (Decreto del 22 Novembre 1855) fu ammesso a compire nel Ginnasio di Pavia il prescritto anno di prova e il 26 successivo iniziava la sua carriera magistrale, occupandosi specialmente di fisica. E' da credersi che i servizi da lui prestati alla pubblica istruzione in questo modesto ufficio siano stati giudicati soddisfacienti, dal momento che egli fu nominato (Decreto del 17 Novembre 1856) professore supplente con lo stipendio annuo di lire austriache 1620.

Negli anni che seguirono la laurea egli strinse amicizia con E. BELTRAMI e F. CASORATI, a cui rimase legato per tutta la vita; alla stessa epoca appartengono i suoi primi lavori; essi si riferiscono alla geometria analitica elementare ed all'analisi, pura ed applicata alla geometria, come ora vedremo.

Il più antico [I, 1](1), che risale all'autunno 1855, tratta una questione di geometria infinitesimale suggerita da una nota posta dal BORDONI come chiusa della sua memoria *Sulle figure isoperimetre esistenti in una superficie qualsivogtia* (*Opuscoli matematici e fisici*, T. 1, 1832). Ivi è fatto cenno di una vasta generalizzazione che può ricevere la teoria delle tangenti conjugate di DUPIN; se si considera una linea qualunque Γ tracciata sopra una superficie Σ ed un sistema di ∞^1 superficie ognuna delle quali abbia con Σ un contatto d'ordine r in un punto P di Γ, si hanno due rette notevoli passanti per P, cioè la tangente a Γ e quella alla corrispondente caratteristica dell'inviluppo del detto sistema di superficie. Ora BORDONI ha dimostrato che la relazione esistente fra queste due rette è scambievole: donde la giustificazione del nome di «tangenti conjugate» da lui usato. Quando $r = 1$ e le superficie considerate sono tutte piane, si ricade nell'ordinario concetto di tangenti conjugate; ma se, r essendo sempre $= 1$, si suppone che le dette superficie siano sfere, si giunge alle «tangenti sfero-conjugate» di CREMONA. Servendosi di

(1) I numeri posti in parentesi quadre servono di rinvio alle *Opere matematiche di L. Cremona*; il numero romano indica il volume, l'altro la pagina.

Digitized by Google

una formola generale di BORDONI, o anche ragionando direttamente, il nostro geometra dimostra la costanza del prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli che due curve a tangenti conjugate esistenti sopra una superficie e passanti per un punto P della medesima formano con una delle linee di curvatura passanti per esso, ed aggiunge che le rette tangenti in un punto P di una superficie alle corrispondenti linee di curvatura sono non soltanto conjugate ordinarie, ma anche sfero-conjugate, proprietà questa che può servire a caratterizzare le linee di curvatura. Queste proposizioni sussistono qualunque sia la legge di variazione del raggio r della sfera variabile nel sistema considerato; altre ve ne sono che nascono supponendo che esistano relazioni speciali fra r ed i raggi principali di curvatura R_1 e R_2 della superficie nel punto di contatto; CREMONA suppone successivamente che r sie media aritmetica, geometrica ed armonica fra R_1 e R_2 e giunge così a proposizioni che ci sembrano abbastanza eleganti per prendere posto nei futuri trattati di geometria differenziale. — Cinque anni dopo CREMONA riprese la stessa questione [I, 163] probabilmente per correggere una imperfezione, dovuta ad un segno, notata nel suo primo lavoro. Ma, invece di rifare semplicemente i propri calcoli, generalizzò le questioni relative; cioè suppose che nella teoria di BORDONI le ∞^1 superficie non fossero sfere, ma godessero della proprietà che i loro punti di contatto con Σ fossero ombilichi e, con un procedimento di perfetta eleganza, giunse a fare acquistare ai suoi primitivi risultati, una notevole generalità; perchè mai i trattati di geometria infinitesimale serbano un completo silenzio su queste ricerche del CREMONA e su quelle del BORDONI da cui esse rampollano?

Ritornando alle investigazioni compiute da CREMONA uscendo dall'Università segnaleremo una nota [1, 4] avente per iscopo di dimostrare il teorema di ABEL nel caso particolare segnalato dall'immortale geometra in una lettera a LEGENDRE (*Oeuvres complètes*, Christiania, 1881, T. 2, p. 276). Prima di CREMONA questo caso era stato studiato da O. BROCH (*Journ. f. r. u. a. Math.*, T. 20, 1840); ma la dimostrazione data dal Nostro è di notevole semplicità: essa fondasi su una formula data da SPOTTINSWOODE (Id. T. 51, 1856) e dimostrata da BRIOSCHI e di cui egli fece uso più tardi [I, 114] per stabilire e precisare la seguente relazione dovuta da M. ROBERTS:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta \ldots \alpha+\overline{n-1}\,\delta \\ \alpha+\delta & \alpha+2\delta \ldots \alpha \\ \alpha+2\delta & \alpha+3\delta \ldots \alpha+\delta \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \alpha+\overline{n-1}\,\delta & \alpha+n\delta \ldots \alpha+\overline{n-2}\,\delta \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} n\,\delta^{n-1}(2\alpha+\overline{n-2}\,\delta)$$

Digitized by Google

III. Soggiorno a Cremona.

Questi lavori nonchè i risultati che diede l'insegnamento di CREMONA al Ginnasio pavese mostrarono all'autorità superiore che egli era degno di un posto più alto e meno precario di quello che eragli stato conferito: per ciò, con decreto del 17 Gennaio 1857, fu destinato al Ginnasio di Cremona col grado di professore ordinario. In quella città egli si trasferì con la famiglia e nel secondo semestre dello stesso anno impartì l'insegnamento della matematica agli alunni delle ultime sei fra le otto classi di quell'istituto. Per giudicare quanto gravoso fosse il còmpito del nuovo professore, basti osservare che egli doveva fare ogni settimana 17 ore di lezione insegnando l'aritmetica, l'algebra elementare (sino alle progressioni, il binomio di NEWTON ed i logaritmi), la geometria del piano e dello spazio, la trigonometria e finalmente alcune nozioni sull'applicazione dell'algebra alla geometria. Dello zelo e dell'ardore spiegati da lui come insegnante rimase vivo il ricordo in uno dei suoi alunni da poco scomparso, MASSIMO MISANI (per lunghi anni preside dell'Istituto tecnico di Udine), il quale rammentava la chiarezza, il rigore e l'efficacia delle lezioni del CREMONA; siccome non esistevano allora in Italia buoni testi per l'insegnamento matematico, questi aveva allora la pazienza di redigere dei riassunti delle proprie lezioni che gli scolari trascrivevano per proprio uso. Tale implicita dichiarazione della poca stima che CREMONA nutriva per i manuali in uso allora in Italia, ci spiega il piacere che egli provò quando furono pubblicate le versioni italiane dell'*Algebra* del BERTRAND e della *Geometria* dell'AMIOT; la soddisfazione relativa alla prima ci è nota pel tramite dello stesso scolaro del CREMONA che citammo prima, mentre quella concernente la seconda è documentata da un dotto articolo bibliografico [I, 176], sgraziatamente incompleto, che il Nostro dedicò a quella versione e che indubbiamente contribuì potentemente al successo di un libro, il quale somministrò una buona istruzione geometrica a molte generazioni di studenti italiani.

Poco tempo dopo la sua nomina a professore ordinario, CREMONA venne invitato a scrivere una memoria scientifica per il Programma annuale dell'Istituto a cui apparteneva; avendo accettato, scelse come argomento del suo lavoro [I, 11] alcuni teoremi enunciati dal LAFITTE nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Maggio 1857); per dimostrarli egli ricorse al metodo elegante e così potente quando si tratta di questioni relative alla geometria di posizione che gl'inglesi chiamano «abridged notation». I teoremi in questione si riferiscono alle figure omografiche ed alle sezioni coniche; nello stabilirli CREMONA si mostrò pienamente

Digitized by Google

padrone di un procedimento che, esteso allo spazio, doveva poco dopo condurlo a importanti risultati.

Da Cremona è pure datato un articolo bibliografico del Nostro [I, 34] che merita di venire segnalato, non solo come documento degli studi che egli stava allora compiendo, ma anche per alcune notevoli dichiarazioni di principio. Esso concerne i due primi fascicoli dei *Beiträge zur Geometrie der Lage* dello STAUDT; CREMONA non era fautore del metodo puro applicato dall'eminente professore dell'Università di Erlangen, perchè riteneva che «le proprietà descrittive e le proprietà metriche delle figure sono legate fra loro così intimamente che non è opportuno pronunciare fra esse un completo divorzio»; così egli prendeva posto nell'armata capitanata da CHASLES e STEINER, nella quale doveva militare durante tutta la propria vita.

IV. Ricerche sulla teoria delle cubiche gobbe.

Durante il proprio soggiorno a Cremona il Nostro scrisse buon numero di lavori che fissarono su di lui l'attenzione del mondo scientifico e che hanno tuttora notevole importanza: alludiamo specialmente a quelli sulle curve sghembe del terzo ordine. Il primo di tali scritti [I, 39] risale alla primavera 1858 ed ha per precipuo scopo la dimostrazione dei teoremi enunciati da CHASLES nella Nota XXXIII dell'*Aperçu historique* e più completamente in una comunicazione fatta all'Istituto di Francia (*C. R.* T. XLV, 1857, p. 189). Seguendo l'esempio dato dal suo maestro BRIOSCHI (v. un articolo pubblicato nel T. VI, 1855, degli *Ann. di sc. mat.*), per conseguire l'intento CREMONA ricorse all'analisi scegliendo come punto di partenza un'osservazione che, sotto altra forma, s'incontra in MÖBIUS; consiste in ciò che, indicando con A, B, C, D quattro funzioni lineari fra loro indipendenti delle coordinate cartesiane di un punto dello spazio, due coni aventi una generatrice comune possono rappresentarsi mediante le due equazioni $BD - C^2 = 0$, $AC - B^2 = 0$.

Emerge da ciò che la curva in cui essi ulteriormente si tagliano (la si chiama generalmente *cubica gobba* appunto dietro proposta del CREMONA) può rappresentarsi mediante un parametro con le formole seguenti:

$$A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1.$$

Nessuno ignora oggi che questa rappresentazioue analitica guida per la via più diretta e breve a tutte le proprietà dei punti, delle tangenti e dei piani osculatori della curva: a quelle dianzi note CREMONA ne aggiunse di nuove; emerge fra le altre la considerazione seguente. Un piano osculatore variabile di una cubica gobba incontra un piano fisso π secondo una retta e la sviluppabile osculatrice secondo una conica (*inscritta* nella

Digitized by Google

sviluppabile); il polo di quella retta rispetto a questa conica ha per luogo geometrico una seconda conica, il cui piano π' chiamasi *congiunto* a π perchè se π è congiunto a π', viceversa π' lo sarà a π. Al concetto di *piani congiunti* corrisponde secondo la legge di dualità quello di *punti congiunti*; entrambi sono il fondamento di un nuovo capitolo della teoria delle cubiche gobbe, che STAUDT scrisse soltanto dopo CREMONA. Questi svolse considerevolmente la stessa teoria in altra memoria [I, 70] ove egli combinò genialmente quei concetti alla considerazione del sistema nullo annesso a qualunque cubica gobba.

Le ricordate proprietà sussistono per qualunque cubica gobba; ma la validità di altre dipende dalla posizione della curva rispetto al piano all'infinito. Una classe notevole di tali proprietà venne studiata dal CREMONA [I, 100] cercando di estendere alle spazio alcuni teoremi relativi alle coniche circoscritte ad un quadrangolo o inscritte in un quadrilatero stabilite allora da TRUDI (*Mem. dell'Acc. di Napoli*, T. I, 1856) e STEINER (*Journ. f. r. u. a. Math.* T. 55, 1858). A tale scopo egli osservò che, scegliendo in modo conveniente gli assi cartesiani, è sempre possibile rappresentare una cubica gobba Γ mediante equazioni del seguente tipo:

$$\frac{x}{a}=\frac{\theta^3}{\varphi}\ ,\ \frac{y}{b}=\frac{\theta^2}{\varphi}\ ,\ \frac{z}{c}=\frac{\theta}{\varphi}$$

essendo θ un parametro e $\varphi=(\theta-\alpha)^2+\beta^2$, la costante α potendosi sempre supporre nulla. I piani osculatori di Γ costituiscono una sviluppabile di quart'ordine e terza classe che ammette ∞^1 coniche inscritte; ora applicando le surriferite equazioni, CREMONA ne determinò in ogni caso le varie specie. A lui non sfuggì l'esistenza di due notevoli sotto-classi di dette curve, una delle quali abbraccia le cubiche gobbe tangenti e l'altra quelle osculatrici al piano all'infinito, e ne trovò le rappresentazioni parametriche canoniche. Si arriva in tal modo alla classificazione di SEYDEWITZ delle cubiche gobbe, che il Nostro non conobbe che più tardi. Alla fine del suo lavoro egli mostra di avere visto sin d'allora quanto notevoli siano quelle fra dette curve che sono osculatrici al piano all'infinito, di cui poco dopo [I, 125] scoperse una proprietà, che ne pone in luce l'analogia con la parabola.

Giova osservare che la memoria testè analizzata presenta qualche analogia con altra di più antica data [I, 82,] relativa alle superficie di terzo ordine, giacchè ha pure lo scopo di estendere allo spazio i succitati teoremi di TRUDI e STEINER. Ivi CREMONA si è proposto di classificare le quàdriche inscritte in una stessa sviluppabile di quarta classe; ma i suoi risultati non sono completi perchè suppongono reale il tetraedro autopolare comune a tutte le superficie considerate. Uno speciale sistema dell'indicata specie è costituito dalle quàdriche omofocali e CREMONA se ne

Digitized by Google

occupò in una notevole *Rivista bibliografica* [I, 133], ove sono dimostrati e generalizzati i teoremi relativi, semplicemente enunciati da CHASLES.

Dopo questa digressione riprendiamo la rassegna dei lavori del Nostro sulle cubiche gobbe. Il primo che incontriamo [I, 224] è posteriore di circa un anno a quello da ultimo analizzato; nel frattempo egli aveva presa notizia dei lavori sull'argomento di MÖBIUS, SEYDEWITZ e SCHRÖTER ed erasi convinto della bontà dei metodi usati da quest'ultimo, onde il nuovo lavoro è interessante anche perchè manifesta una nuova orientazione del pensiero del CREMONA; in detta memoria egli stabilisce la generabilità di qualsivoglia cubica gobba mediante un fascio di piani in corrispondenza univoca con le generatrici di un iperboloide ad una falda, oppure mediante elementi correlativi, non senza notare i casi speciali che offrono questi metodi di generazione. Quanto utili essi siano viene dimostrato dalle soluzioni da lui date di due problemi proposti da CHASLES e STEINER; uno consiste nella costruzione delle due cubiche gobbe situate su un iperboloide rigato e passanti per cinque punti dello stesso; l'altro nella determinazione del numero (quattro) dei punti in cui si tagliano le quaterne di piani corrispondentisi in quattro fasci di piani proiettivi.

L'influenza sopra CREMONA dei citati lavori di SCHRÖTER, lungi dal diminuire col tempo, si direbbe che divenne sempre più intensa; giacchè nella primavera del 1861 egli riprese la teoria delle cubiche gobbe [II, 16], anzitutto per fare un'esposizione storica dei lavori relativi e poi per stabilire, sotto forma puramente geometrica, tanto la sua teoria dei punti e piani congiunti rispetto a una cubica gobba, quanto la classificazione delle coniche esistenti in una sviluppabile di quarto ordine e terza classe. Postosi ad investigare le cubiche gobbe dal punto di vista della geometria moderna, egli si avvide dell'opportunità di trattare questioni di costruzione, epperò compose una memoria [II, 41] per esporre la descrizione di una cubica gobba determinata da n punti e $6 - n$ corde ($n = 6, 5, \ldots, 0$); giova osservare che per $n = 6$ il problema ammette *sei* soluzioni, fatto che egli ha osservato per primo. Nè va taciuto che nel corso di tali indagini egli s'imbattè nel teorema « due cubiche gobbe non aventi alcun punto d'intersezione, hanno comuni dieci corde » e lo dimostrò supponendo che una delle curve considerate fosse formata da una conica e da una retta che l'incontra: è questa una delle prime applicazioni di questo tipo del principio della conservazione del numero. Forse estendendo questo procedimento logico egli giunse al seguente teorema generale, che egli si limitò ad enunciare: Due curve gobbe degli ordini m, m' aventi risp. a, a' punti doppi apparenti e segantisi in r punti, hanno comuni un numero di corde espresso dalla formola:

Digitized by Google

$$\frac{m\,m'\,(m-1)\,(m'-1)}{4} + a\,a' + \frac{r\,(r-1)}{2}$$

In altro lavoro sullo stesso argomento [II, 151] egli determinò il numero delle quàdriche di rivoluzione passanti per una cubica gobba di specie assegnata; ebbe così occasione di considerare una sottospecie di tali curve, cioè quella costituita dalle cubiche che si appoggiano in due punti al cerchio immaginario all'infinito; esse vennero incontrate nuovamente (*Nouv. Ann. de math.* II Ser. T. III, p. 25) da lui cercando il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari calate dai punti di una punteggiata sopra i piani di un fascio ad essa proiettivo. Vanno ancora ricordati altri tre suoi scritti: nell'uno [II, 79] espose un procedimento (da lui chiamato *proiezione iperboloidica*) per riferire univocamente una cubica gobba ad una conica; in altro [II, 62] una proposizione che guida da una di dette curve ad una rigata di quarto ordine con retta doppia; in un ultimo [II, 109], è segnalata la speciale perabola gobba i cui piani osculatori o le cui tangenti formano ∞^1 terne di triedri trirettangoli; queste notevoli curve furono ritrovate venti anni dopo da W. FRANZ MEYER e O. BÖKLEN, indipendentemente dal CREMONA.

La serie di memorie di CREMONA sulle cubiche gobbe, cominciata nell'Aprile 1858 non si chiuse che nell'Aprile 1879; s'inizia col primo lavoro originale del Nostro e finisce con quello che può ben dirsi l'ultimo [III, 437]; in questo la considerazione di certe curve piane studiate da EMILIO WEYR e G. DARBOUX è estesa allo spazio a n dimensioni e porta a stabilire eleganti proprietà di linee che per $n = 3$ si identificano a cubiche gobbe, e ciò usando uno speciale sistema di coordinate omogenee. Tale memoria costituisce un degno coronamento al brillante gruppo di lavori di cui ci siamo ora occupati.

V. Al Liceo di Milano ed all'Università di Bologna.

L'intendimento di porre in luce il legame logico esistente fra i vari lavori del CREMONA ci ha indotti a violare nel nostro racconto l'ordine cronologico; ora riprenderemo il filo degli avvenimenti della sua vita.

Il suo soggiorno a Cremona durò meno di tre anni. La Lombardia essendo finalmente libera dal giogo straniero, il Governo italiano (Decreto 28 Novembre 1859) lo chiamò a Milano in qualità di professore al Liceo S. Alessandro (ora Beccaria). E appunto da Milano è datata una sua memoria di geometria analitica [I, 129], un riassunto della quale [I, 177] fu pubblicata nelle *Nouv. Ann. de Math.* come risposta ad una questione locale di geometria piana proposta in questo periodico; ivi egli usa coordinate tangenziali con ragionamenti (come egli nota) generalizzabili allo spazio.

Digitized by Google

CREMONA non era destinato a rimanere a lungo a Milano; la Romagna essendo stata annessa all'Italia, il dittatore FARINI istituì nell'Università di Bologna una cattedra di Geometria superiore e T. MAMIANI, allora ministro della P. I., chiamò ad occuparla il CREMONA (Decreto del 10 Giugno 1860), essendogli sembrato il meglio indicato per la cattedra analoga a quella istituita a Parigi per CHASLES. A Bologna egli trovò cordiali accoglienze da DOMENICO PIANI ed ebbe a colleghi E. BELTRAMI e D. CHELINI(1), costituendo con questi la fulgida terna che seppe continuare le tradizioni di un Ateneo, che aveva avuti fra i propri docenti S. DEL FERRO e B. CAVALIERI. Chiamato ad occupare una cattedra di nuova fondazione, CREMONA pensò di inaugurare il proprio insegnamento con una Prolusione ove fossero indicati, non solo la natura e gli scopi della materia che egli doveva insegnare, ma anche ciò che essa aspirava a divenire; e l'antico volontario, invece di usare il freddo linguaggio matematico, intonò un vero inno alla scienza ed alla patria [II, 237], scrivendo una delle più belle pagine che annoveri la letteratura scientifica.

L'insegnamento universitario del CREMONA fu quale tutti aspettavansi da lui. Convinto della santità della missione affidata ad un insegnante, egli spendeva molte ore a preparare le proprie lezioni; la sua parola era sempre calma e rigorosa, ma in pari tempo vivace ed attraente; con gli alunni era largo di ajuti e consigli, raccomandando loro di provvedersi di ampie nozioni analitiche, che egli riteneva indispensabili per qualunque geometra; in tale attitudine si ravvisa lo scienziato a vedute larghe, quale appare in tutta la sua opera scientifica. Un gruppo numeroso e brillante di alunni, che seppero mostrarsi investigatori originali, costituisce il miglior documento della sua azione didattica; basti ricordare fra essi A. ARMENANTE, E. BERTINI, E. CAPORALI, R. DE PAOLIS, G. JUNG, G. VERONESE, EMILIO WEYR. Queste informazioni intorno all'influenza didattica di CREMONA può completarsi con due notizie. Anzitutto ricordando la sua traduzione degli *Elemente der Mathematik* di R. BALTZER. In secondo luogo la campagna da lui fatta, col concorso di E. BETTI e F. BRIOSCHI, per introdurre gli *Elementi* di EUCLIDE come libri di testo nelle scuole classiche: così egli giunse (per usare le sue parole) a « sbandire innumerevoli libercoli compilati per pura speculazione, che infestavano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo [III, 132] ».

(1) Essendo sopravvissuto agli altri due, dedicò alla loro memoria (come ad altri suoi commilitoni) importanti scritti biografici [III 367, 434, 454, 456, 470]; inoltre i *Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini*, da lui pubblicati col concorso del BELTRAMI, saranno sempre citati come prova di sentimenti elevati che nobilitano la vita umana,

Digitized by Google

VI. Ricerche sulla teoria delle curve piane.

Un problema di grande importanza contrassegna l'inizio delle ricerche geometriche compiute da CREMONA a Bologna, quello cioè di raccogliere, coordinare ed esporre sotto forma geometrica le numerose proprietà che erano state rilevate nelle curve piane algebriche; l'alta e meritata fama conseguita dall'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [I, 312] costituisce la miglior prova dell'eccellenza della soluzione da lui data di quel problema e ci dispensa dal farne qui una particolareggiata analisi. Rileviamo soltanto che ivi è introdotta la nozione di rapporto *equianarmonico*, di cui egli fece poi numerose applicazioni; notiamo anche che non s'incontrano ivi questioni di forma delle curve; ma che egli fosse disposto a interessarvisi e capace di trattarle è dimostrato dalla dimostrazione da lui data [II, 106] per un teorema enunciato dal SYLVESTER concernente il legame fra l'aspetto di una cubica piana e il segno del suo birapporto. CREMONA, ritenendo con ragione non esservi miglior mezzo per porre in luce il valore di un metodo del farne svariate applicazioni, non lasciò sfuggire alcuna occasione senza servirsi dell'*Introduzione* per risolvere questioni relative — cfr. ad es. [II, 70] —; fra i lavori relativi emerge la memoria sull'ipocicloide tricuspide [II, 19], destinata a stabilire e completare le proprietà di questa curva enunciate da STEINER.

Non ci è lecito chiudere questa rassegna dei contributi dati da CREMONA alla teoria delle curve piane senza dire una parola intorno alla parte da lui rappresentata nella costituzione della teoria dei sistemi di coniche. Essa era nell'infanzia quando egli si sforzò e riuscì [II, 92] a spiegare l'apparente contraddizione che s'incontra quando si cerca d'applicare la teoria generale dei sistemi di ∞^1 curve alla determinazione del numero delle coniche soddisfacenti a cinque condizioni elementari; e quando CHASLES fece giungere quella teoria alla sua maturità introducendo le due note «caratteristiche», egli si affrettò [II, 95] a dare rigorose dimostrazioni dei teoremi enunciati dal celebre geometra francese nella sua comunicazione del 1° Febbraio 1864; di più, sotto il modesto aspetto di una *Rivista bibliografica*, diede [II, 123] un completo commento alle altre comunicazioni fatte nel corso dello stesso anno dal medesimo matematico. Da notarsi poi, come contributo originale, l'estensione della teoria delle caratteristiche ai sistemi di ∞^2 coniche; il valore delle proposte da lui avanzate è dimostrato dal fatto che CHASLES ne diede notizia all'Accademia di Parigi [II, 119]. L'interesse di CREMONA per la teoria delle caratteristiche non si spense col tempo; stanno a provarlo due pubblicazioni; in una leggesi [II, 123] l'estensione ai sistemi di ∞^1 quàdriche delle relazioni stabilite da CHASLES fra le caratteristiche di un si-

Digitized by Google

stema di coniche e i numeri delle curve eccezionali dello stesso; l'altra invece [II, 396] consta di alcune considerazioni di geometria solida atte a illustrare la presenza di elementi eccezionali nei sistemi formati da ∞^1 luoghi algebrici.

VII. Le trasformazioni piane birazionali.

Durante il soggiorno a Bologna, CREMONA gettò le basi di una teoria che gli appartiene in modo tanto indiscutibile che il suo nome è ad essa costantemente legato: parliamo delle trasformazioni birazionali del piano. Egli fu indotto a occuparsene da un lavoro dello SCHIAPARELLI (*Mem. dell'Acc. di Torino*, II Ser., T. 21, 1864); anzitutto esso gli suggerì l'idea [II, 8] di studiare la relazione che fa corrispondere ad una retta una retta e ad un punto (riguardato come centro di un fascio di raggi) una conica inscritta in un triangolo fisso; egli dimostrò che essa può presentarsi sotto due tipi e ne mostrò poi [II 240 e 241] il legame con altra investigata da E. BELTRAMI (1). Continuando a meditare sullo stesso tema, egli fu indotto a dubitare della verità dell'asserzione di SCHIAPARELLI sulla non esistenza di trasformazioni univoche di un grado superiore a due, dal momento che il prodotto di parecchie trasformazioni quadratiche dà origine ad una trasformazione sempre univoca, ma che quadratica non è. Allora egli si propose il problema generale di determinare tutte le trasformazioni piane univoche; per risolverlo egli era mirabilmente preparato dalle sue anteriori ricerche (v. § VI). L'osservazione da cui egli prese le mosse [II, 54] è che in una corrispondenza della indicata specie alle rette dell'un piano corrisponde una rete di curve razionali aventi a due a due un'unica intersezione mobile. Perciò, se queste sono dell'ordine n e hanno x_r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ punti r — pli comuni, sussisteranno le relazioni:

$$\Sigma_r \frac{r(r+1)}{2} x_r = \frac{n(n+3)}{2} - 2, \quad \Sigma_r \frac{r(r-1)}{2} x_r = \frac{(n-1)(n-2)}{2};$$

ad ogni trasformazione univoca corrisponde una soluzione di queste equazioni; ma viceversa nulla assicura che qualunque soluzione delle stesse dia luogo ad una trasformazione geometricamente possibile; solo si può notare che qualunque sia n esiste la trasformazione caratterizzata dai numeri: $x_1 = 2(n-1)$, $x_2 = \ldots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 1$.

Questo lavoro del CREMONA non ebbe per qualche tempo alcun se-

(1) In questa trasformazione CREMONA riconobbe un nuovo metodo per studiare la teoria delle coniche omofocali: v. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, VI Aufl., 2.er Teil (Leipzig. 1903) p. XXI e 796; v. anche [II, 241].

Digitized by Google

guito; ma, avendo egli avuta occasione di occuparsi di certe questioni concernenti le curve piane [II, 135], vi fece un'aggiunta [II, 193] piena di idee originali (1): tale è la considerazione delle *reti conjugate* esistenti in due piani in corrispondenza univoca, tale quella delle *curve jacobiane* delle reti stesse. CREMONA dimostrò che, data una di dette reti, l'altra è determinata; di più notò sui molti esempi da lui scoperti che « se $(x_1\ x_2 \ldots x_{n-1})$ e $(y_1\ y_2 \ldots y_{n-1})$ sono i numeri che caratterizzano due reti conjugate, i numeri x non differiscono dagli y che per l'ordine », importante teorema che fu poi dimostrato da CLEBSCH (*Math. Ann.* T. 4, 1871). Finalmente egli avvertì che due stelle di raggi in corrispondenza univoca d'ordine n, generano con le intersezioni dei raggi corrispondenti una curva dell'ordine $n+2$, lasciando ad altri il còmpito di caratterizzare completamente tale curva. A dimostrare l'importanza di questi lavori del CREMONA sta il fatto che la relativa teoria non subì col tempo alcuna sostanziale innovazione e che l'unica aggiunta che essa ricevette consiste nel teorema relativo alla scomponibilità di qualunque trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche.

VIII. **Ricerche intorno ad alcune speciali curve sghembe algebriche.**

Da Bologna sono anche datate altre memorie di CREMONA che, benchè non abbiano conseguita la celebrità di quelle di cui parlammo nei due §§ precedenti, meritano tuttavia una speciale considerazione, non foss'altro come documenti illustrativi di quell'interessante periodo storico in cui la geometria, risorta a vita novella, aspirava a mostrare il proprio valore con nuove battaglie e nuove vittorie; e nessuno, più di CREMONA, ha contribuito a che, in questa lotta per l'egemonia, la geometria non sia stata vinta dalla sua eterna rivale.

In una memoria sulle rigate di terzo grado, di cui parleremo tra poco, egli indicò alcune proprietà della quartica gobba per la quale passa un'unica quàdrica; avendo continuato ad occuparsene egli la scelse come tema per la sua prima comunicazione all'Istituto di Bologna [I, 279]. Di essa (seguendo la proposta di CREMONA la si chiama quartica *di seconda specie*) si conosceva soltanto l'essere ulteriore intersezione di una quàdrica con una superficie cubica passante per due generatrici dello stesso sistema e l'essere la figura correlativa della sua sviluppabile osculatrice; CREMONA ne stabilì una completa teoria. Alcuni anni più tardi, altre ricerche lo indussero a studiarne a fondo un caso particolare [II, 402], cioè

(1) I risultati ivi esposti, per incarico del CREMONA, furono comunicati da T. ARCHER HIRST alla British Association for the Advancement of Science [II, 179].

Digitized by Google

la quartica avente due tangenti stazionarie, scoprendo, fra l'altro, il sistema nullo rispetto a cui essa corrisponde alla propria sviluppabile osculatrice.

Il succitato lavoro del Nostro sulle quartiche di II specie non era stato peranco pubblicato quando egli prese conoscenza della comunicazione sulle curve situate sopra un iperboloide ad una falda fatta da CHASLES all'Istituto di Francia il 3 Giugno 1861; la lettura di essa gli rivelò [I, 467] che le proprietà di cui godono quelle curve sono casi speciali di altre possedute da curve d'ordine qualunque appartenenti a due grandi categorie; l'una consta delle curve d'ordine $2m+1$ generate dalle terne di elementi corrispondenti in tre fasci projettivi, due di piani e il terzo di superficie dell'ordine m; le curve dell'altra categoria sono similmente generate da due fasci di piani e dagli ∞^1 gruppi di piani di un fascio costituenti un'involuzione di grado m; esse sono dell'ordine $m+2$.

IX. Ricerche intorno ad alcune speciali superficie algebriche.

Al gruppo di lavori di cui nel § precedente ne fanno riscontro altri, sopra particolari superficie, di cui ora ci occuperemo.

Il più antico [I, 261] fu inspirato dalla lettura dell'enunciato del principio di corrispondenza sotto la prima forma data ad esso da CHASLES (*C. R.* 41, 1855, p. 677); applicandolo CREMONA considerò la figura generata dalle ∞^1 rette che uniscono i punti corrispondenti di due punteggiate in corrispondenza (1, 2); è una rigata di terzo grado, avente per direttrici le sedi delle due punteggiate, di cui il Nostro ha scoperte e dimostrate le più essenziali prerogative. CAYLEY al ricevere questo lavoro del suo giovane collega, gli scrisse (12 Giugno 1861) per segnalargli il caso speciale in cui le direttrici della superficie coincidono; ciò indusse il CREMONA a riprendere l'iniziato studio: in tal modo egli potè dare anche della nuova superficie una trattazione completa [II, 46].

In base ai temi svolti ed al metodo usato si collegano ai lavori testè esaminati altri due di data un po' più recente. Il primo è una breve nota [II, 397] avente lo scopo di svolgere la teoria delle rigate con due direttrici rettilinee coincidenti, che il CAYLEY aveva segnalate in uno dei suoi lavori sulle superficie rigate. L'altro [II, 420] è più esteso ed è senza dubbio uno dei più importanti fra quelli usciti della penna del nostro fecondo compatriotta. Intento di esso è lo studio e la completa classificazione delle rigate di quarto grado ed è pienamente raggiunto: non solo vengono dalla stessa rettificate asserzioni inesatte di CHASLES e CAYLEY, ma è insegnata una ripartizione di tutte le figure considerate in dodici classi, che prese posto stabile nella scienza e, fra l'altro, per-

Digitized by Google

mise di costruirne i modelli. Si può notare che il Nostro matematico erasi già occupato di rigate di quarto grado [II, 246], dimostrando con elegante ragionamento geometrico alcuni teoremi sopra le sviluppabili di eguale pendio, che il LA GOURNÉRIE aveva dimostrati col calcolo.

Un anno prima egli aveva dedicato un importante lavoro [II, 155] alla superficie di IV ordine e III classe detta *romana* per essere stata concepita da STEINER a Roma nel 1844; sono ivi non solo stabilite le proprietà dianzi note, ma molte altre ancora; da notarsi che alle stesse superficie il CREMONA fu ricondotto dai suoi studi (v. § XIV) sulla rappresentazione di una superficie su di un piano.

Chiuderemo questa rassegna delle ricerche sopra speciali superficie algebriche citando le proposizioni sopra le sviluppabili di quinta classe da lui enunciate [II, 11] e che furono poco dopo munite di convincenti dimostrazioni per opera di N. SALVATORE DINO ed E. D'OVIDIO.

X. Ricerche sulle superficie algebriche in generale e in particolare su quelle cubiche.

Il mondo che di regola esige sempre più di quanto già ricevette attendeva dall'autore dell'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* un analogo lavoro sopra le superficie algebriche, a scrivere il quale il CREMONA si era mostrato mirabilmente preparato con i lavori analizzati nel § precedente. Per deciderlo a intraprenderlo era necessaria una occasione e questa non tardò a presentarsi. Il 7 Luglio 1864 l'Accademia di Berlino proponeva come tema di concorso per il premio STEINER dell'anno 1866 la dimostrazione, con eventuali aggiunte, delle proposizioni enunciate dal grande geometra svizzero nella sua famosa comunicazione *Über die Flächen dritten Grades*. CREMONA si sentì attratto a schierarsi fra i concorrenti; ma invece di proporsi semplicemente di dimostrare i succitati teoremi, preferì dedurli come casi speciali di altri che sussistono per superficie d'ordine qualunque, contando di giungere per tale via a tutte le proprietà delle superficie cubiche. Il *Mémoire de géométrie pure* [III, 1] che egli presentò tempestivamente e che l'Accademia di Berlino premiò (1), è appunto redatto sopra tale piano.

I capitoli introduttori di questo lavoro furono il germe dei *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* [II, 279] che, tradotti in tedesco da M. CURTZE (traduttore anche dell'*Introduzione*), insieme al *Mémoire* e arricchiti di importanti note dall'autore, formano oggi ancora la migliore esposizione sintetica della teoria generale delle curve gobbe e delle superficie

(1) L'Accademia di Berlino gli conferì il premio STEINER una seconda volta (1874) in considerazione del complesso dei suoi lavori.

Digitized by Google

algebriche. L'opera è talmente conosciuta che siamo dispensati dal presentarne qui un riassunto.

CREMONA si occupò nuovamente delle superficie del terzo ordine [III, 168] cercando un completo quadro geometrico per le considerazioni analitiche esposte dal JORDAN nel suo monumentale *Traité des substitutions et des équations algébriques*; così apportò notevoli contributi alla conoscenza della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una di quelle superficie. Sullo stesso argomento egli ritornò un'ultima volta [III, 406] cercando un procedimento stereometrico per stabilire i teoremi sull'esagrammo di PASCAL dovuti a G. VERONESE. Anche per tale via egli giunse a nuove proprietà di detta configurazione: limitiamoci a citare le scoperte di 36 esaedri connessi a qualunque superficie cubica e del loro stretto legame con il pentaedro di SYLVESTER [III, 430].

XI. **Professore di Geometria descrittiva e di Geometria analitica.**

A partire dal 1861 e durante sei anni CREMONA insegnò nell'Università di Bologna, in qualità d'incaricato, anche la Geometria descrittiva. Il piano delle sue lezioni è informato all'idea (già intravvista dal BELLAVITIS e attuata poi dal FIEDLER) di applicare largamente i concetti fondamentali della geometria projettiva; l'esame del corso da lui tenuto nell'anno 1864-65 (1) prova che egli vi incluse il metodo di MONGE, la prospettiva (o projezione centrale) secondo le vedute di BROOK TAYLOR(2), le proiezioni quotate, l'assonometria e finalmente la teoria delle ombre.

Per Decreto reale del 18 Gennajo 1863 egli fu nominato professore di Geometria analitica e descrittiva nell'Università di Bologna, ma poco dopo (Decreto dell'8 Aprile 1863) ritornava alla cattedra di Geometria superiore, pur continuando a insegnare Geometria descrittiva. Questo suo breve soggiorno in una cattedra di Geometria analitica ci porge occasione per ricordare alcuni suoi scritti, ove il protagonista è il metodo cartesiano, dei quali non avremmo occasione di parlare altrove. Alcuni [II, 65] non contengono che enunciati di teoremi relativi all'applicazione della teoria delle forme alla geometria e furono poi stabiliti dal BATTAGLINI; un altro [II, 73] ha per iscopo la dimostrazione di una notevole formola con cui SYLVESTER espresse l'area di un segmento di sezione conica: tale dimostrazione venne inserita dal SALMON nel suo noto trattato su queste ce-

(1) Il prof. E. BERTINI che seguì questo corso ne compilò un riassunto, che ebbe la cortesia di porre a mia disposizione.

(2) Dell'opera del noto matematico inglese egli fece un'esposizione originale mentre era in campagna in casa di un suo eminente collega (l'oculista MAGNI); la pubblicò sotto il pseudonimo di MARCO UGLIENI [II, 271].

Digitized by Google

lebri curve. Siccome queste pubblicazioni appartengono all'epoca in cui CREMONA occupò la cattedra di Geometria analitica, si potrebbe ritenere che il suo interesse per questa materia sia stato transitorio; nulla di più falso, chè si può dire che tale sua inclinazione durò tutta la vita. Stanno a provarlo i primi lavori che egli compose a Cremona; da questa città è pure datata una nota [I, 112] destinata a far conoscere l'equazione omogenea della sfera circoscritta ad un tetraedro, mentre a Milano scrisse un più esteso lavoro [I, 133] inteso a dimostrare i teoremi enunciati da CHASLES nel suo *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales*; più tardi [II, 176] applicò le coordinate cartesiane alla dimostrazione di una formola di MANNHEIM.

Ai primi giorni del suo soggiorno a Bologna risale pure un'entusiastica analisi [I, 473] delle *Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes* di O. HESSE ed una Rivista bibliografica sulla teoria delle linee congiunte rispetto ad una conica od una quàdrica [I, 137]: alcune linee inserite in altra posteriore memoria [II, 175] provano che egli continuò a meditare su questo stesso argomento. Ma di tutti gli scritti di Geometria analitica senza dubbio il più importante è quello [II, 396] destinato a far conoscere il seguente teorema: « Sia

$$F(x,y) = y^2(ax^2 + 2bx + c) + 2y(a'x^2 + 2b'x + c') + (a''x^2 + 2b''x + c'')$$
$$= x^2(ay^2 + 2a'y + a'') + 2x(a'y^2 + 2b'y + b'') + (cy^2 + 2c'y + c'');$$

detti $X(x)$ e $Y(y)$ i discriminanti di $F(x,y)$ secondochè la si considera come funzione di y o di x; X e Y sono forme biquadratiche aventi il medesimo invariante ». CREMONA lo dimostra riducendolo a quello che afferma la costanza del birapporto delle quattro tangenti che si possono condurre ad una cubica piana da un suo punto qualunque.

XII. All'Istituto tecnico superiore di Milano.

F. BRIOSCHI, che dal 1863 trovavasi alla testa dell' Istituto tecnico superiore di Milano, pensò nel 1867 essere opportuno introdurre fra le materie d'insegnamento dei futuri ingegneri quei metodi grafici ideati da CULMANN e che, col valido aiuto di T. REYE, egli diffondeva nel Politecnico di Zurigo. Sembrandogli che nessuno in Italia potesse meglio del CREMONA assumere tale ufficio, ottenne (Decreto ministeriale del 16 Ottobre 1867) che egli venisse comandato a insegnare Geometria superiore nella scuola da lui diretta (il grado di ordinario gli fu conferito soltanto in data 9 Novembre 1872): ebbe così origine per CREMONA un nuovo fecondo periodo della vita.

Il mutamento di residenza da Bologna a Milano esercitò una modificazione profonda nell'orientamento mentale del Nostro. Da un lato, il soggiorno in un istituto a scopo professionale e l'obbligo d'insegnare la

Digitized by Google

Statica grafica, lo condussero ad occuparsi di argomenti a cui non aveva dianzi volta la mente; d'altra parte il contatto quotidiano col grande analista suo antico maestro lo trascinò insensibilmente ad abbandonare la geometria tipo CHASLES e STEINER per accostarsi ai metodi algebrici di cui il CLEBSCH era allora il più eminente rappresentante.

Del corso tenuto dal CREMONA al Politecnico di Milano esistono riassunti che permettono di formarsene un concetto preciso (1); essi mostrano che era diviso in tre parti dedicate rispettivamente alla Geometria di posizione, al Calcolo grafico ed alla Statica grafica: ora alcune pubblicazioni di cui dobbiamo occuparci mostrano che a ciascuna di queste materie egli seppe arrecare rilevanti contributi personali.

Nell'Ottobre 1874 il Governo italiano introdusse nei Programmi d'insegnamento degli Istituti tecnici la teoria delle sezioni coniche fondata sui concetti di rapporto anarmonico ed involuzione. Non esistendo in Italia alcun libro di testo per tale materia, il CREMONA, che non fu estraneo a quella provvida innovazione, sentì il dovere di fornirlo. Così ebbero vita gli *Elementi di geometria projettiva* (Torino 1873), i cui meriti furono riconosciuti in tutto il mondo, come stanno a dimostrarlo le versioni in francese, tedesco ed inglese che ricevettero; va rilevato che il CREMONA, allontanandosi dai suoi predecessori, non usò per la materia trattata i nomi di geometria superiore o moderna o derivata o di posizione, ma uno nuovo, certamente ispirato da un'opera classica del PONCELET, che fu poi generalmente usato: a lui risale anche il sistema di indicare regolarmente i punti con le lettere latine majuscole, le rette con le minuscole ed i piani con le lettere greche minuscole.

I pregi rilevati nell'opera testè citata si ritrovano nei posteriori *Elementi di calcolo grafico* (Torino, 1874), che pure non tardarono a venire tradotti in tedesco ed inglese.

Il terzo dei lavori del CREMONA prodotti dal suo insegnamento a Milano possiede una ancora maggiore originalità; concerne *Le figure reciproche della statica grafica* (Milano, III ed. 1879). Pubblicato dapprima (1° Giugno 1872) in occasione delle nozze della figlia di BRIOSCHI, fu ristampato poi due volte e tradotto in inglese. La sua importanza è dovuta a ciò che è ivi dimostrato che il poligono delle forze e il poligono funicolare possono considerarsi come projezioni ortogonali di due poliedri corrispondentisi in un complesso lineare (2).

---

(1) Io ho potuto esaminare i riassunti relativi agli anni 1867-68 e 1868-69 grazie al prof. G. JUNG che ebbe la cortesia da prestarmeli.

(2) Non è questo l'unico scritto del CREMONA che si riferisca alla geometria della retta; in altro [III, 295] egli ha insegnato a rappresentare su un piano tutte le rette dello spazio mediante uno speciale sistema costituito da ∞^4 coniche.

Digitized by Google

XIII. Ricerche sulle curve dal punto di vista del genere.

L'azione didattica di CREMONA all'Istituto tecnico superiore di Milano non si mantenne entro i limiti che indicammo nel § prec., giacchè allora questo contava anche una Scuola normale destinata alla formazione dei professori per gl'istituti tecnici, e CREMONA fu incaricato di tenervi lezioni e conferenze di matematiche superiori; fra coloro che le ascoltarono notiamo A. ARMENANTE, G. ASCOLI, E. BERTINI, G. JUNG, M. MISANI ed EMILIO WEYR. Le più celebri di tali lezioni furono quelle tenute durante l'anno 1868-69, in accordo con BRIOSCHI e CASORATI, sulla teoria delle funzioni ellittiche. Dal riassunto che ne pubblicarono ARMENANTE e JUNG (*Giorn. di matem.* T. 7, 1869) emerge che, mentre il corso di BRIOSCHI era basato sui metodi di JACOBI e quello di CASORATI su quelli di RIEMANN, CREMONA scelse per guida la *Theorie der Abel' schen Functionen* di CLEBSCH e GORDAN, non senza tener conto delle memorie pubblicate da CLEBSCH nei vol. 64 e 65 del *Giornale* di CRELLE. La parte più originale di esse trovasi in una memoria del CREMONA sopra gli integrali a differenziali algebrici [III, 136]. Altre osservazioni sulle curve dal punto di vista del genere leggonsi in tre lavori [III, 136], uno dei quali scritto in collaborazione col CASORATI.

XIV. Trasformazioni razionali dello spazio; rappresentazione delle superficie algebriche su di un piano.

Il 21 Luglio 1866 CLEBSCH annunciava a CREMONA di avere scoperto « durch Integration » che le asintotiche di una superficie di STEINER sono quartiche gobbe di II specie; la bellezza di questo risultato fece nascere in CREMONA il desiderio di ottenerlo geometricamente e sino dal 25 Settembre seguente era in grado di annunciare al suo amico di avere conseguito lo scopo. L'artificio usato consiste nella rappresentazione di quella superficie su di un piano, rappresentazione adombrata da WEIERSTRASS in una sua comunicazione sull'argomento, ma svolta completamente da CLEBSCH e da CREMONA stesso [II, 389]. In questo scritto il Nostro fu indotto a occuparsi, oltrechè dei casi particolari della superficie di STEINER, delle rigate di III grado e di queste giunse pure a determinare le linee asintotiche. Ciò lo indusse a studiare [II, 409] le rigate d'ordine $m + n$, dotate ciascuna di due direttrici, una m — pla e l'altra n — pla e di $(m - 1)$. $(n - 1)$ generatrici doppie; scoprì che sono razionali e che le loro asintotiche sono curve algebriche dell'ordine $2\ (m + n - 1)$ se le due direttrici sono distinte, $2m + n - 2$ se sono coincidenti. Proseguendo nello stesso ordine di ricerche egli si propose [III, 209] di investigare in generale se, per una superficie rappresentabile su un piano, fosse possibile

Digitized by Google

determinare le asintotiche e scoprì non solo le loro equazioni differenziali, ma anche quelle delle linee di curvatura e delle linee isotrope; applicando i risultati generali alle quàdriche, ritrovò alcuni risultati che rimontano a MONGE.

E' noto che CLEBSCH non soltanto insegnò la rappresentazione su un piano di parecchie superficie algebriche, ma scrisse un'importante memoria sulla relativa teoria generale. Colpito dall'importanza di siffatte indagini, CREMONA se ne occupò dal canto suo ed in un lavoro di grande importanza [III, 260] indicò una geniale procedura che permette di ottenere una infinità di superficie razionali; essa consiste nell'applicazione di trasformazioni razionali dello spazio: ad. es. partendo da una superficie di III ordine, egli scoprì non meno di diciassette superficie razionali, degli ordini IV-VIII. Altre applicazioni dello stesso procedimento si trovano in parecchi altri lavori del Nostro [III, 231].

Indotto ad occuparsi delle trasformazioni razionali dello spazio, era naturale che il CREMONA volgesse il pensiero ad una metodica esposizione della teoria, analoga a quella da lui creata per il piano; gli è quanto egli compì in due fondamentali comunicazioni fatte all'Istituto Lombardo nella Primavera del 1871 [III, 241 e 251]; esse, fuse e completate dal punto di vista dottrinale, diedero origine alla grande memoria, rimasta sgraziatamente incompiuta, *Sulle trasformazioni razionali dello spazio* [III, 298]; notisi però che la parte in nostro possesso non esonera dal tener conto delle succitate comunicazioni e tanto meno di articoli posteriori [III 326, 444, 465, 461 e 458], chè le une e gli altri danno informazioni intorno ad altre importanti applicazioni della teoria generale.

Queste notizie intorno ai lavori di CREMONA sulla teoria delle trasformazioni nello spazio sarebbero incomplete se non contenessero un cenno di due [III, 384 e 405] che, per dichiarazione dell'autore, non hanno che lo scopo di fissare l'attenzione dei matematici sopra ricerche di LIE « piene d'idee nuove e feconde », e specialmente sulla trasformazione di rette in sfere ideata e genialmente applicata dall'eminente geometra norvegese.

XV. A Roma.

L'alta fama conseguita dal CREMONA come scienziato e come insegnante è documentata dalle attestazioni di alta stima che gli vennero, non solo dall'Italia, ma anche da tutte le parti del mondo: ci limiteremo a ricordare le più significanti. Nel 1876, G. FINALI lo invitò indarno ad accettare la carica di Segretario generale al Ministero di agricoltura, di cui egli era allora titolare; il conte ALBICINI sollecitò pure invano il suo

Digitized by Google

concorso negli studi che andava facendo per istituire a Bologna una Scuola per gl'Ingegneri. Miglior successo ebbe A. SCIALOJA, il quale, in qualità di ministro della pubblica istruzione, gli propose di assumere la direzione dell'antica Scuola pontificia degli ingegneri, da porsi sopra nuova base; chè, col consenso del CREMONA, un Decreto reale del 9 ottobre 1873 lo nominava direttore del nuovo Politecnico e professore ivi di statica grafica: così ebbe termine il periodo eroico della sua produzione scientifica, ma permise a lui di esercitare un'azione sommamente benefica nella formazione dei futuri ingegneri. Tuttavia egli avvertiva sempre in sè stesso un'attrattiva potente per la scienza pura; onde fece buon viso a un progetto di trasferimento a Pisa in qualità di professore di geometria superiore, ma esso dovette venire abbandonato per l'opposizione del ministro dell'istruzione del tempo; tuttavia, per rendergli possibile il ritorno alla geometria, con Decreto reale del 10 Novembre 1877 fu trasferito alla, cattedra di Matematiche superiori nell' Università di Roma, pur conservando la direzione di quella Scuola d'applicazione. Chiuderemo queste notizie intorno alle cattedre occupate dal CREMONA rilevando che egli tenne a Roma per primo (anno 1888-89) un corso di Geometria analitica e projettiva, istituito appunto dietro sua proposta; questa fusione fu a lui suggerita esclusivamente dal desiderio di alleggerire l'insegnamento dei futuri ingegneri, onde il corso risultò (e tale rimase anche quando fu professato da altri) una mescolanza meglio che una fusione dei due metodi analitico e sintetico.

XVI. Nella pubblica amministrazione ed al Governo.

Il 16 Marzo 1879 CREMONA fu eletto senatore; l'anno seguente il ministro DE SANCTIS lo nominò R. Commissario per il riordinamento della Biblioteca V. E. di Roma, ciò che gli portò un lavoro di quasi due anni, il quale ebbe per risultato una nuova vita di quell'istituto. Nel 1881, Q. SELLA gli offrì il portafogli della pubblica istruzione, ma egli rifiutò di prendere posto in un ministero succeduto a quello presieduto dal suo amico B. CAIROLI. Nel 1897 fu vice-presidente del Senato, carica a cui dovette rinunciare per la nomina a ministro della pubblica istruzione; avvenimenti di carattere generale non gli consentirono di tenere il potere che circa un mese (1-29 Giugno 1898). Nel 1900 fu nominato presidente della Commissione d'inchiesta sopra le pubbliche costruzioni eseguite a Roma e poi della Commissione d'inchiesta sul crollo dei muraglioni del Tevere: la relazione che egli scrisse in questa occasione è considerata come un modello del genere.

I discorsi e le relazioni di CREMONA sopra questioni relative al pub-

Digitized by Google

blico insegnamento racchiudono tale somma di scienza pedagogica che è da lamentare siano sepolti negli Atti del Senato, raccolta che non è letta neppure dai pochi che hanno agio di consultarla. Il punto più luminoso della sua opera di senatore è rappresentato dallo studio da lui fatto, a nome dell'assemblea vitalizia, delle *Modificazioni alle leggi vigenti per l'istruzione superiore del Regno*, presentate dal ministro G. BACCELLI il 1° Marzo 1884. Si trattava di un progetto che la Camera dei deputati aveva approvato a stento, dopo una discussione durata 41 sedute. Ora il Senato si manifestò contrario al concetto di autonomia che informava la nuova legge ed incaricò il CREMONA di redigere un contro-progetto. Tale còmpito egli disimpegnò in modo superiore ad ogni elogio, presentando (15 Marzo 1885) una Relazione ove tutte le questioni concernenti l'insegnamento superiore sono trattate con dottrina pari a sommo acume. M. COPPINO, nuovo ministro della pubblica istruzione, finì per accettare le idee del CREMONA e il Senato approvò dopo ampia discussione (sedute dal 27 Novembre 1886 al 25 Gennaio 1887) il contro-progetto del proprio Ufficio centrale: ma la caduta del ministero del tempo, avvenuta il 29 Luglio 1887, impedì a quel disegno di divenire legge dello stato.

Non è questo l'unico caso in cui il Senato insorse contro il Governo per iniziativa del CREMONA: infatti il fenomeno si rinnovò a proposito del riordinamento delle Scuole di architettura proposto dal Ministro dell'istruzione P. BOSELLI nella seduta del 14 Giugno 1889 e di altro progetto presentato il 15 Aprile 1902 dal Ministro di agricoltura, il quale avrebbe condotto alla distruzione degli istituti tecnici. La relazione del CREMONA sull'argomento porta la data 6 Maggio 1903 e fu redatta in un'epoca in cui egli subiva quasi ogni giorno attacchi anginoidali causati dai progressi dell'arteriosclerosi da cui era affetto. Malgrado tali sofferenze egli, il 6 Giugno di detto anno, volle riunire ancora una volta il consiglio dei professori della sua Scuola; il giorno dopo una violenta crisi di angina pectoris annunciò una prossima fine; e il 10 Giugno l'Italia apprese costernata la fine del più grande dei suoi geometri.

Perciò il prode combattente cadde, colpito al cuore, ma con l'arma in mano; se egli, giunto alla sera della sua giornata terrena, avrà gettato uno sguardo all'opera compiuta, avrà potuto riconoscere che l'intera sua vita era stata spesa a vantaggio della Patria e della Scienza. All'Italia offrì il proprio braccio in uno dei più gravi momenti delle lotte per l'indipendenza; la sorte avendolo risparmiato, gli fu dato di prestare rilevanti servizi come professore, come senatore, come ministro, e adempiendo con zelo e intelligenza esemplari gli uffici confidatigli dal Governo. Nè meno importanti sono le sue benemerenze di fronte alla Scienza, le sue pubblicazioni possedendo uno straordinario valore per *l'esten-*

Digitized by Google

sione del campo che abbracciano, per *l'importanza* dei risultati che contengono, per la meravigliosa *erudizione* che testimoniano nel loro autore.

Riguardo all'*estensione*, limitiamoci a ricordare che gli argomenti trattati vanno dalla trigonometria (v. *Nouv. Ann. de Math.* II Ser., T. 3. p. 73) alla geometria iperspaziale, dalla teoria dei determinanti a quella delle funzioni Abeliane; nè va taciuto che nel risolvere i problemi in cui si imbatteva egli diede prova di un illuminato eclettismo, ricorrendo a tutti gli strumenti che riconosceva giovevoli, da quelli classici dell'analisi più rigorosa a quelli, ancor oggi discussi, della geometria numerativa.

Riguardo all'*importanza*, notiamo che egli giunse a conseguenze che la scienza ha subito collocato fra le verità indiscutibili; i geometri posteriori poterono aggiungere qualche anello all'aurea catena da lui costruita, ma nessuno scoperse qualche imperfezione in quelli precedenti.

Finalmente per ogni argomento da lui trattato mostrò di conoscere perfettamente la relativa letteratura (1); così furono a lui risparmiate le delusioni che sono riserbate a coloro che, per ignoranza del passato, sciupano tempo e fatica a ritrovare cose già note; così egli potè nei brevi anni in cui si consacrò totalmente alla matematica, scrivere un numero di lavori che direbbesi avere riempita un'intera esistenza.

Per ciò le sue Opere recano il marchio dell'immortalità; esse sono e saranno guida sicura per tutti i cultori della geometria, fonte di istruzione e di ispirazione che non si dissecchera mai.

Genova, 31 Gennaio 1905.

XVI.

L'OPERA GEOMETRICA DI A. MANNHEIM.

Dal tomo XXVI (1908) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

> « Si confessi dunque volentieri, che la provincia sulla quale domina siccome Reina l'Analisi, è molto più estesa e più vasta di quella che appartiene alla Sintesi; ma non s'inferisca da tal preminenza, che l'altra debbasi abbandonare, l'altra tanto benemerita e per tanti secoli della Geometria antica che serve anche oggidì all'Algebra medesima di util compagna . . . ».
>
> G. F. MALFATTI.

Quantunque la mirabile produzione scientifica di M. CHASLES non abbia ancora trovato il suo storico, pure, un semplice esame superficiale palesa in essa tre facce. È, infatti, noto come una sua parte pre-

(1) La sua vasta conoscenza della storia della geometria è confermata da alcuni scritti di erudizione [I, 176, 208 e 254; II, 275, 284 e 405].

Digitized by Google

ponderante sia rappresentata dalle memorabili *ricerche storiche* di quel grande; una seconda, non meno cospicua, dagli studî di *Geometria proiettiva*, inteso questo vocabolo nella sua accettazione più ampia; un'ultima, infine, forse meno estesa, ma per fermo non meno importante, abbraccia le ricerche di *Cinematica pura* (o *Geometria cinematica*, adottando la proposta fatta nel 1859 dal TERQUEM), teoria del movimento indipendentemente dalle cause che lo producono (forze) e dal tempo durante il quale esso avviene. Mentre CHASLES come storico trovò, non nella propria patria, ma nella terra di AMLETO, un discepolo degno di calcarne le orme gloriose (1), mentre in E. DE JONQUIÈRES trovò chi fu capace di proseguire e completare le sue indagini sulle figure algebriche (2), gli è nell'eminente geometra, di cui intendiamo di occuparci nel presente lavoro e per la cui recente dipartita è così vivo il dolore, che egli ravvisò la persona destinata a svolgere in modo originale e portare alle loro più lontane conseguenze le feconde sue idee sulla dottrina geometrica del movimento. Egli ebbe così netta la visione della missione che questi era destinato a compiere da considerarlo e designarlo come proprio « figlio spirituale »; ma per quanto acuto fosse il suo sguardo, per fermo non avrà saputo prevedere la mole imponente del grande edificio che questi avrebbe architettato ed eretto.

Una Primavera rigogliosa.

VITTORIO AMEDEO MANNHEIM nacque a Parigi il 17 Luglio 1831.

Fino dalla più tenera età manifestò attitudini spiccatissime per le scienze esatte, giacchè a dieci anni, pur essendo il più giovane della propria classe, fu il solo che riuscisse a risolvere un problema di geometria proposto dal professore.

Compiuto il corso degli studi costituenti il programma dell'« Institution Martelet », a sedici anni venne ammesso all'« École centrale »; ma tale istituto egli abbandonò ben presto pel Liceo Carlomagno, ove, sotto la guida amorosa e sapiente di E. CATALAN, si preparò all'ammissione nella Scuola politecnica: questo eminente geometra ebbe ragione di andare orgoglioso di un discepolo che fu accolto (1848) nella più famosa scuola del mondo, essendo sempre il più giovane del proprio corso.

Uscitone due anni dopo sottotenente d'artiglieria, venne destinato

---

(1) « Come discepolo di CHASLES », scrive lo ZEUTHEN nella prefazione alla sua grande opera sopra le ricerche dei Greci intorno alle coniche, « da tempo io m'interesso ai risultati ottenuti nell'antichità ».

(2) Cfr. lo studio sopra *E. de Jonquières* ristampato nel presente volume, p. 209 e segg.

Digitized by Google

alla scuola d'applicazione di Metz; ed appunto in tale epoca ideò una modificazione al *regolo calcolatore* che fu adottata dal corpo a cui apparteneva il MANNHEIM e poi generalmente, ottenne una distinzione all'Esposizione Universale del 1855, riscosse le lodi di un giudice competente (1) e servì di modello nella costruzione di altri apparati congeneri (2).

Appunto ai primi tempi (Gennaio 1851) del soggiorno a Metz del giovane sottotenente d'artiglieria appartiene una delle prime sue pubblicazioni geometriche. Essa contiene svariate applicazioni della trasformazione per polarità rispetto ad un cerchio alla ricerca di nuove *proprietà descrittive* delle figure piane; da ultimo l'Autore cerca la relazione che passa fra la distanza di due punti e qualche elemento metrico della figura corrispondente e la trova almeno in alcuni casi speciali: ciò va notato perchè mostra come egli sin da allora abbia rivolta la propria attenzione alla polarizzazione delle *proprietà metriche* delle figure, argomento che (come vedremo) egli non perdette mai di vista durante tutta la sua vita.

Promosso nel 1852 tenente d'artiglieria, il MANNHEIM andò peregrinando per varie guarnigioni; delle sue ottime qualità militari rende fede il fatto che a Parigi, durante un'epidemia colèrica, col proprio contegno fermo egli seppe tenere alto il morale delle truppe affidategli, mentre alcune sue osservazioni sparse, alcune questioni proposte ed alcune eleganti soluzioni (3) possono citarsi come prova del non avere egli mai abbandonati del tutto gli studi prediletti. D'altronde, appunto a tale periodo appartengono altri suoi buoni lavori, i quali meritano qualche considerazione da parte di chi intende seguire passo passo l'evoluzione delle sue idee matematiche.

Nell'uno (*Nouv. Ann.* T. XII, 1853, p. 113), trovasi applicata un'elegante considerazione stereometrica (senza dubbio ispirata da MONGE) per di-

---

(1) « Il sig. MANNHEIM ha fatto eseguire un nuovo ed ingegnoso regolo, per mezzo del quale si ha un'esattezza doppia di quella data da eguali regoli ordinarii, non solo per la moltiplicazione e divisione, ma benanco per ogni proporzione, per i quadrati, cubi, radici quadrate, cubiche e simili ». [Q. SELLA *Teorica e pratica del regolo calcolatore*, Torino 1859, p. 100; II. ed. italiana, Torino 1886, p. 102].

(2) Cfr. P. ROZÉ, *Théorie et usage de la règle à calculs* (*règle des écoles*, *règle* MANNHEIM), Paris 1907, p. 2. Va aggiunto che nel tomo XIII (1854), p. 36, delle *Nouvelles Annales de Mathématiques* è detto che il nostro autore fece costruire « une *Règle à calculs cylindrique*, plus commode, plus exacte, que sa règle plate ». Notiamo qui anche avere egli più tardi (*C. R.* T. LXXV, 1872, p. 1495) ideato un altro utile strumento che riscosse l'approvazione di PONCELET e il cui modello originale può tuttora vedersi nel « Conservatoire des Arts et Métiers » di Parigi.

(3) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, T. XII (1853), pp. 107-108; XIII (1854), pp. 35-36, 210-211, 266-267; XVI (1857), pp. 187-189.

Digitized by Google

mostrare essere formato da quattro rette concorrenti in un punto il luogo dei centri delle circonferenze seganti sotto angoli eguali tre circonferenze date.

In altro (*Id.* T. XV, 1856, p. 60) MANNHEIM enuncia una proprietà dell'inviluppo di una sfera costantemente tangente a due piani ed una sfera, preludendo così ad altre ricerche che poco dopo attrassero la sua attenzione.

Finalmente in un terzo (*Id.* 289) egli dimostra che l'isottica di due circonferenze è costituita da un certo numero di lumache di PASCAL; a tale scopo egli adopera considerazioni di pertinenza della Geometria cinematica, le quali provano come sin dal 1856 egli fosse familiare con tale disciplina e spiegano come poco dopo egli potesse venire considerato come il rappresentante di essa (1).

Nel 1855 troviamo il MANNHEIM a Marsiglia, nel punto in cui, essendo stato destinato in Crimea, aveva già imbarcato la propria compagnia e stava per salpare. Ma la presa di Sebastopoli e la pace che ne fu il corollario sospese la partenza di nuovi rinforzi e risparmiò forse alla patria ed alla scienza il sagrificio d'un' esistenza preziosa.

Durante il soggiorno a Marsiglia, prolungatosi parecchi mesi, il protagonista della storia che stiamo narrando potè riprendere con agio e tranquillità relativi gli studi interrotti; le risultanze di essi leggonsi in alcuni lavori, su cui è nostro dovere arrestarci qualche istante.

In quello di più antica data egli ritorna, per svolgerlo con l'ampiezza necessaria, su un tema già toccato in una sua precedente pubblicazione, cioè la ricerca di un metodo per trasformare le proprietà metriche delle figure piane col mezzo d'una polarità rispetto ad un cerchio, ricerca di cui la soluzione doveva sembrare del massimo valore nel tempo in cui scriveva il MANNHEIM, cioè in un'epoca in cui il regno della Geometria era governato da due dittatori: PONCELET, di cui sono giustamente rinomati i contributi alla teoria della polarità, e CHASLES, di cui è notorio l'affetto per le relazioni metriche. Per risolvere quella questione il nostro autore generalizza la formola stabilita in una precedente pubblicazione e così ottiene la relazione generale che intercede tra la distanza di due punti di una figura piana e gli elementi metrici della figura polare (2). Molteplici applicazioni fattene dall'autore chiariscono il modo di servirsi di tale notevole relazione; ci dispensiamo dal citare le propo-

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, T. XVIII (1859), p. 445.

(2) Non potendo qui trascriverla, noteremo che una delle forme sotto cui può presentarsi ebbe l'onore di essere riferita da CHASLES nel suo *Rapport sur les progrès de la Géométrie* (Paris, 1870), p. 294.

Digitized by Google

sizioni così ottenute dal MANNHEIM essendo in parte note ed in parte di enunciazione complicata: ciò che invece va rilevato si è che con questo suo lavoro giovanile egli non ha esaurito il relativo soggetto, come vedremo meglio in seguito. — Gli altri lavori composti dal nostro geometra mentre era in servizio militare attivo trattano temi che rientrano nel vasto campo di studi a cui egli doveva poi dedicare la miglior parte della propria attività, cioè la costruzione delle normali e dei centri di curvatura di determinati luoghi geometrici, ovvero dei punti di contatto di speciali inviluppi. Fra i risultati più generali ottenuti nel più antico di essi (*Nouv. Ann.* T. XVI 1857 p. 322) notiamo ad esempio il seguente: *Una retta R tocchi in r una curva fissa U ed incontri in a e b due altre curve A, B; sia m un punto del segmento ab tale che sia* $\frac{am}{mb} = \lambda$ *(cost.); la normale alla curva (m), luogo dei punti m, divide nello stesso rapporto* λ *il segmento determinato sulla normale in r ad U dalle normali in a, b alle curve A, B.* Nè vanno dimenticate varie costruzioni del centro di curvatura di una conica (1), da inscriversi nel ricco elenco dei contributi dati dal MANNHEIM alla teoria delle curve di second'ordine. — Tra le questioni risolte in altro (*Ann. di mat.* T. I, 1858, p. 364) dei riferiti lavori, ricordiamo la costruzione della tangente al luogo geometrico del punto in cui si tagliano le tangenti in due punti *a*, *b* di due date curve *A*, *B* scelti in modo che *b* sia il piede di una normale condotta da *a* a *B*; fra le conseguenze speciali segnaliamo una costruzione semplice del raggio di curvatura dell'ovale di CARTESIO (in particolare di una conica) ed altre dei punti di una caustica: soggetto quest'ultimo sul quale il MANNHEIM doveva ritornare tanti anni appresso. Nello stesso lavoro egli fa cenno della seguente questione, che il marchese DE L'HÒPITAL aveva incompletamente risolta nella sua *Analyse des infiniment petits: date due curve A, A' ed un punto qualunque f del loro piano, si conduca per f una trasversale arbitraria a segare quelle curve in a, a'; determinare la tangente del luogo del punto in cui tagliansi le tangenti in a, a' alle curve date;* ed in uno posteriore (Id. T. II, 1859, p. 208-13) la risolse in due modi entrambi notevoli e che conservano la propria validità nell'ipotesi che *f* vada all'infinito. Analoghe considerazioni infinitesimali guidarono il nostro autore a costruire il centro di curvatura in un punto qualunque della curva che nasce da una curva piana dividendone le ordinate in un rapporto costante; ne dedusse che: *se una curva ammette un diametro rettilineo, i raggi di curvatura negli estremi di*

(1) Segnaliamo, a mo' d'esempio, quella emergente dalla proposizione seguente: *la parabola tangente agli assi di un'ellisse nonchè alla normale ed alla tangente in un punto della curva, tocca tale normale nel relativo centro di curvatura.*

Digitized by Google

una corda ad esso conjugata stanno fra di loro come i cubi delle relative tangenti limitate al loro punto d'intersezione, e in particolare che: *i raggi di curvatura in due punti qualunque di una conica stanno fra di loro come i cubi delle corrispondenti tangenti limitate al loro punto comune.* Ora è degno di nota che tale elegante proprietà delle coniche era stata avvertita, prima che il MANNHEIM la scoprisse, dall'UMPFENBACH (1) e dal LIOUVILLE (2), mentre lo fu poi del PEAUCELLIER (3). Il MANNHEIM la riottenne più tardi, assieme ad altre concernenti le cubiche piane, deducendola da quest'altra da lui semplicemente enunciata: *Una trasversale condotta per un punto O incontra in A, A_1, A_2, ... le curve fisse (A), (A_1), (A_2), ...; si prende sulla trasversale un punto M tale che si abbia*

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{OA} + \frac{\lambda_1}{OA_1} + \frac{\lambda_2}{OA_2} + \cdots = \frac{\mu}{OM},$$

ove λ, λ_1, λ_2, ..., μ sono costanti date. Quando la trasversale ruota attorno ad O, il punto M descrive una curva (M) tale che

$$(2) \qquad \frac{\lambda}{\varrho \cos^3 \alpha} + \frac{\lambda_1}{\varrho_1 \cos^3 \alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\varrho_2 \cos^3 \alpha_2} + \cdots = \frac{\mu}{R \cos^3 \psi},$$

ove ϱ è il raggio di curvatura della curva (A) in A, e α l'angolo che la relativa normale forma con quella trasversale, mentre ϱ_1, ϱ_2, ..., R e α_1, α_2, ..., ψ hanno significati analoghi per le curve (A_1), (A_2), ..., (M). — Per determinare la genesi dell'ultimo (*Jour. Éc. Pol.* Cah. XXXVII, p. 179) dei lavori costituenti il gruppo succitato, fa mestieri ricordare come ABEL TRANSON (4) abbia scoperta una procedura assai semplice per determinare il raggio di curvatura della trajettoria di un punto appartenente ad una figura piana mobile nel proprio piano con una legge determinata e come CHASLES ne abbia subito rivendicata a sè stesso la priorità e poco dopo fatta conoscere la sua *Construction des rayons de courbure des*

---

(1) *Ein Lehrsatz von Kegelschnitten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXX (1864), pp. 95-96].

(2) *Sur une propriété des sections coniques* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, I sér. t. IX (1844), pp. 350-352].

(3) *Rélation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective, et considérations sur les foyers des lunettes* [Nouvelles Annales de Mathématiques, I sér. t. XX (1861), pp. 427-430].

(4) *Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. X (1845), pp. 148].

Digitized by Google

courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan (1). Ivi, fra l'altro, è notato che il moto di una figura piana nel proprio piano può intendersi ottenuto facendo ruzzolare una curva su di un'altra e che, quando il moto è infinitesimo, a tali curve è lecito sostituire i corrispondenti cerchi di curvatura. Donde emerge la possibilità di applicare alla questione enunciata nel titolo di quella memoria di CHASLES una nota formola (2) che va sotto il nome di SAVARY (3). Ora è appunto di tale sostituzione che il MANNHEIM profittò per trattare questioni dello stesso tipo, ad esempio la seguente: *supposto che un triangolo variabile di forma e grandezza si muova nel proprio piano con data legge, dai centri di curvatura degli elementi descritti da due vertici dedurre quello dell'elemento descritto dal terzo.* Fra gli speciali risultati da lui ottenuti notiamo un bel teorema di CHASLES relativo al centro di curvatura dell'ellisse, l'estensione ad un asteroide obliquo di un'elegante proprietà scoperta dal LAMARLE nell'asteroide regolare ed alcune proprietà della curva di DELAUNAY e delle linee reptorie del BERNOULLI.

Un'Estate feconda.

Nel 1859 il MANNHEIM, già capitano, era applicato alla Fabbrica d'armi di Châtellerault. Un posto di ripetitore alla Scuola politecnica essendosi reso vacante, il Consiglio direttivo, accogliendo il suggerimento d'un illustre geometra, il LAMÉ, chiamò il MANNHEIM ad occuparlo: questi potè così tornare, in qualità d'insegnante, nel famoso Istituto che lo aveva annoverato fra i propri migliori discepoli e nel quale doveva rimanere per quasi tutta la sua vita, prima come esaminatore d'ammissione (1863), poi (1864-1901) come successore di J. DE LA GOURNERIE nella cattedra fondata ed illustrata da MONGE. Egli lo lasciò soltanto durante un breve periodo, per seguire nel 1860 la spedizione scientifica di Costantina, nel corso della quale egli fece alcune osservazioni di fisica che furono reputate degne di venire inserite nelle *Annales de chimie;*

(1) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. X (1845), pp. 204.

(2) Cfr. LEROY, *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition (Paris, 1862), p. 386.

(3) MANNHEIM ha osservato che in realtà appartiene ad EULERO [v. la memoria *Supplementium de figura dentium rotarum* pubblicata in Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XI (1765), p. 209]. Essa e le relative costruzioni si trovano esposte in un altro suo lavoro (*Nouv. Ann.* T. XVIII, 1859, p. 371), il quale va anche segnalato per alcune eleganti proprietà della catenaria, parte nuove, parte dovute a LAMARLE e POINSOT, dimostrate con procedimento uniforme. Cfr. anche la risposta data ne *L'Intermédiaire des Mathématiciens* [t. IX (1902), pp. 120-122] sotto il pseudonimo di CANON alla « Question 475 » proposta da ROSACE (= E. CESÀRO).

Digitized by Google

va eziandio ricordato che durante l'assedio sofferto da Parigi nel 1870, egli comandò la batteria della Scuola politecnica e che, nel sanguinoso periodo della Comune, egli abbandonò la capitale per riprendere il proprio insegnamento a Tours, provvisoria sede di quella Scuola.

Trasferito a Parigi, essendo stato esonerato dalle quotidiane incombenze militari, il MANNHEIM si dedicò completamente alla scienza a lui diletta: le pagine seguenti diranno quale felice ispirazione abbia avuto il LAMÉ nello strappare dalla gamella chi poteva e doveva divenire uno degli uomini di cui oggi la Francia va giustamente orgogliosa.

Per dare un po' d'ordine alla nostra esposizione dell'opera geometrica del MANNHEIM ne raggrupperemo i lavori in un modo che ci sembra conforme alla loro natura; riconosciamo però per primi che la nostra classificazione, suggerita esclusivamente da ragioni d'opportunità, apparirà per fermo artificiale a chi, studiando tutta la produzione del Nostro geometra, avvertirà il carattere che possiede di sostanziale unità, nella grande varietà de' suoi aspetti.

I. *Polarità.* — La trasformazione per polari reciproche, che vedemmo interessare il MANNHEIM sin dagli albori della sua carriera scientifica, continuò ad occuparlo ancora per gran parte delle sua vita. Lo prova anzitutto uno scritterello (*Nouv. Ann. de math.* T. XVIII, 1859, p. 208) in cui egli insegna come scegliere il cerchio direttore d'una polarità affinchè questa muti una conica in altra dotata di proprietà prestabilite; e lo conferma un'elegante proposizione metrica (Id. II Ser. T. I, 1862, p. 436) da lui proposta come esercizio e che, per sua dichiarazione (Id. III Ser. T. XI, 1892, p. 431), egli ottenne, col mezzo di una duplice polarizzazione, da un teorema di DUHAMEL. Ma i risultati più cospicui delle sue indagini sopra tale argomento trovansi consegnati in un esteso lavoro (*Journ. de Math.* II Ser. T. XI, 1866, p. 193), il cui fine è la ricerca di ciò che divengono, per effetto d'una trasformazione polare, le proprietà di curvatura delle linee (piane e sghembe) e delle superficie. Le formole a cui giunse il MANNHEIM non sono abbastanza semplici per essere qui riferite; ma per dimostrarne l'utilità citeremo due delle conseguenze che egli ne trasse. Dalla proposizione, da lui dimostrata altrove, *se una curva di terz'ordine è inscritta e circoscritta ad un triangolo, il prodotto dei raggi di curvatura nei vertici eguaglia il cubo del raggio del cerchio circoscritto al triangolo*, egli dedusse che *se una curva di terza classe è inscritta e circoscritta ad un triangolo, il prodotto dei raggi di curvatura nei vertici è eguale a 64 volte il cubo del raggio del cerchio circoscritto al triangolo.* Dalla notissima formola di EULERO sulla curvatura delle superficie, egli concluse che *la somma dei raggi di curvatura dei contorni apparenti di una superficie su due piani fra loro perpendicolari e ad un piano tangente fisso della stessa non*

Digitized by Google

varia mutando comunque i due piani di projezione: e siccome egli non aveva una sola corda al proprio arco, così segnalò un bel teorema da cui il precedente scaturisce senza il sussidio della polarità. — Dodici anni dopo, in seguito ad altre ricerche, di cui ci dovremo occupare altrove, il MANNHEIM investigò la figura che nasce polarizzando il sistema delle normali ad una superficie. — Finalmente, negli ultimi della sua vita, si servì della polarità, con l'abilità consueta, per ottenere (*Mess. of Math.* T. XX, 1891, p. 1) nuovi teoremi sulle normali alle coniche e per giungere a nuove proprietà focali delle stesse curve (Id. T. XXIV, 1895, p. 190); inoltre segnalò come questione importante da risolvere la ricerca dei teoremi che nascono applicando la stessa trasformazione a proposizioni concernenti gli archi delle curve piane.

II. *Trasformazione per raggi vettori reciproci* (*inversione*). — La superficie («ciclide») inviluppata da una sfera, che muovesi nello spazio conservandosi costantemente tangente a tre sfere fisse, venne incontrata da C. DUPIN come superficie avente per linee di curvatura delle circonferenze; una ciclide speciale, perchè è di rotazione (è l'ordinario «toro»), corrisponde all'ipotesi che i centri delle tre sfere date stiano in linea retta (*Nouv. Ann.* T. XIX, 1860 p. 67.) Ora il MANNHEIM ha per primo osservato che da qualunque ciclide nasce un toro applicandovi un'inversione il cui polo appartenga alla circonferenza determinata dai centri delle date sfere, e di tale osservazione trasse profitto per dedurre da un noto teorema del VILLARCEAU, che *ogni sfera bitangente ad una ciclide la taglia secondo due circoli* e per dimostrare che *la ciclide è suscettibile di due generazioni come inviluppo di una sfera tangente a tre sfere fisse.* Siffatte considerazioni guidarono pure il MANNHEIM a molte proprietà, non tutte anteriormente note, delle superficie aventi per linee di curvatura d'un sistema delle curve sferiche, e ad un procedimento, che, se non c'inganniamo, non conseguì tutta la meritata notorietà, per dedurre da una tale superficie un'altra della stessa specie.

Al MANNHEIM viene pure attribuita (Id. T. XX, 1861, p. 70) la riduzione mediante inversione, oggi ben nota, del problema di APOLLONIO alla ricerca di un cerchio tangente ad un circolo e due rette. A lui poi appartiene (Ivi p. 218) l'idea di considerare le curve e le superficie trasformate in sè stesse da un'inversione, idea che, nelle mani del MOUTARD, guidò alla teoria delle *curve e superficie anallagmatiche* e che i moderni estesero a tutte le trasformazioni geometriche. Non meno originale è l'applicazione (Ivi p. 220) fatta dal MANNHEIM dell'inversione alla teoria delle caustiche; è però da lamentare che il relativo lavoro, contenendo soli enunciati, per la sua estrema concisione sia riuscito intelligibile soltanto a pochi eletti. È anche di pertinenza del MANNHEIM

Digitized by Google

la prima dimostrazione geometrica (*Journ. de Math.* II Ser. T. XVI, 1861, p. 317) del bel teorema di LIOUVILLE, secondo cui il prodotto di quantesivogliano inversioni è un'inversione; essa è così semplice da essere alla portata anche di chi conosce soltanto la geometria di EUCLIDE.

Altre applicazioni dell'inversione piana s'incontrano in uno degli ultimi lavori del MANNHEIM (*Mess. of Math.* T. XIX, 1890, p. 178), nel quale egli, servendosi per l'appunto di tale trasformazione, riuscì a collegare fra loro alcune relazioni segmentarie dovute a STEWART e CHASLES, e ad aggiungerne altre congeneri non meno eleganti. Della medesima trasformazione si parla in una questione che il MANNHEIM propose nel 1904 sotto il pseudonimo di CANON (*Interm. des math.* T. XI, 1904, p. 9) nella quale è segnalata una funzione metrica dell'insieme di due circonferenze, invariante rispetto a qualunque inversione. Notiamo da ultimo che, quasi mezzo secolo fa (*Nouv. Ann.* T. XIX, 1860, p. 115), egli ha incidentalmente considerata la trasformazione che muta un punto in un cerchio ed una retta in un punto, trasformazione la quale si preferisce oggi di riguardare come prodotto di una polarità per un'inversione.

III. *Geometria cinematica.* — È noto che la considerazione del centro d'istantanea rotazione piana condusse CHASLES ad un metodo generale di costruzione delle normali alle trajettorie descritte dai singoli punti d'una figura piana moventesi comunque nel proprio piano. Ora MANNHEIM si propose la questione di estendere tale risultato allo spazio; e, giovandosi del moto elicoidale a cui equivale qualunque movimento infinitesimo di un solido, nonchè (per usare il linguaggio moderno) del complesso lineare connesso a tale movimento (l'uno e l'altro ben noti in Francia sin dal 1843 per merito di CHASLES), pervenne (*Journ. de math.* II. Ser. T. XI, p. 273) ad un risultato a cui con ragione impose il nome di *teorema fondamentale* e che suona così: *Se in un istante qualunque si conducono le normali nei punti corrispondenti delle trajettorie dei vari punti di una figura invariabile parallele ad un piano fisso, si ottengono infinite rette che incontrano una seconda retta parallela a quel piano.* L'utilità di tale proposizione venne dal nostro geometra subito dimostrata applicandola allo studio del movimento d'un triedro di grandezza costante. Generalizzando quella proposizione si vede che, *quando un solido si muove nello spazio, le normali alle trajettorie dei suoi punti che incontrano una retta fissa ne tagliano anche una seconda.* Donde un mezzo semplice per costruire il piano normale alla trajettoria d'un punto qualunque M di un solido il cui movimento è regolato da cinque condizioni: così, ad es., se cinque punti del solido sono costretti a rimanere su altrettante superficie date, in un istante qualunque le normali in quei punti a tali superficie determinano un complesso lineare ed il cercato piano

Digitized by Google

normale è quello che corrisponde a M rispetto a tale complesso. Se invece il solido non è soggetto che a quattro condizioni, i suoi punti descrivono, non linee, ma superficie-trajettorie ed in un istante qualunque le normali in punti corrispondenti s'appoggiano a due rette fisse (1); proprietà questa straordinariamente importante, che il nostro geometra comunicò alla Società filomatica di Parigi il 14 luglio 1866, ma la cui priorità gli venne contestata dallo SCHÖNEMANN, che sin dal 1855 avevala dimostrata in una memoria presentata da STEINER all'Accademia delle Scienze di Berlino: l'indipendenza delle due scoperte essendo fuor di dubbio, è pienamente legittimo il nome di *teorema* SCHÖMANN-MANNHEIM dato a quella proposizione.

La grande fecondità dei germi consegnati nel lavoro ora analizzato risulta palese esaminando un'altra memoria di poco posteriore, la quale, presentata all'Istituto di Francia, fu oggetto di una lusinghiera relazione firmata da BERTRAND, BONNET e CHASLES, ben meritato compenso alle lunghe fatiche durate dal MANNHEIM; è una memoria riboccante di cose nuove ed interessanti, ed il cui stile preciso ed elegante prova la padronanza del soggetto da parte dell'autore e la maturità da questo ormai raggiunta. Esordendo egli cita alcune belle frasi scritte da POINSOT nella sua *Théorie nouvelle de la rotation des corps* e destinate a mettere in luce i vantaggi del metodo geometrico nello studio delle questioni dinamiche. Dimostra poi con procedimento uniforme le proposizioni fondamentali di cinematica enunciate da CHASLES in una comunicazione fatta nel 1843 all'Accademia delle Scienze. *Sei* condizioni essendo necessarie e sufficienti per fissare la posizione di un solido nello spazio, ove non se ne abbiano che *cinque* o *quattro*, ogni punto del solido potrà assumere ∞^1 o ∞^2 posizioni, onde descriverà una trajettoria lineare o superficiale. Ora il MANNHEIM prova che, se i vincoli del movimento consistono in passaggi o contatti di curve e superficie per punti dati o con linee o superficie fisse, quando si tratti di movimenti infinitesimi le condizioni date possono sempre immaginarsi consistere in passaggi per dati punti di superficie appartenenti al sistema mobile; è così condotto allo studio del moto di un solido di cui cinque superficie assegnate passano per altrettanti punti fissi e lo compie nel modo più luminoso e completo, ottenendo una folla di teoremi la cui novità è pari all'importanza. Nella II Parte del suo lavoro il nostro autore applica la teoria generale esposta al mo-

(1) Queste rette sono in generale sghembe; se per eccezione si tagliano, tutte quelle normali passano per un punto fisso: per quali movimenti ciò accade? E' la Questione n. 553 proposta dal MANNHEIM ne *L'intermédiaire des Mathématiciens* [t. II (1895), p. 162] e non ancora risolta.

Digitized by Google

vimento di una retta (caso di grande interesse per la teoria delle superficie rigate), di una coppia di piani fra loro invariabilmente legati, di un triedro (con speciale riguardo al caso in cui gli spigoli di esso siano la tangente, la binormale e la normale principale d'una curva gobba) o di una superficie. Due cose vanno ancora notate; cioè che gli è nel corso di tali ricerche che il MANNHEIM venne condotto ad introdurre la nozione di *normalia* (superficie costituita dalle normali condotte ad una superficie dai vari punti d'una sua linea) e che i cultori della geometria descrittiva troveranno al termine della memoria testè analizzata alcune notevoli costruzioni concernenti l'elicoide rigata.

Come saggi di ulteriori studi del MANNHEIM sopra questioni cinematiche sono da considerarsi due comunicazioni da lui fatte all'Istituto di Francia (*C. R.* T. LXX, 1870, p. 1215 e 1259), le quali contengono i soli enunciati di teoremi scoperti e problemi risolti applicando alcune sue formule allora inedite e che tali dovevano rimanere per lungo tempo.

In seguito egli ha osservato (Ivi T. LXXIII, 1871, p. 1096) che, quando il moto di un solido è soggetto a quattro sole condizioni, gli assi di tutti gli spostamenti che esso può subire a partire da una posizione qualunque costituiscono una speciale conoide del terz'ordine: è la superficie scoperta da HAMILTON (1830) e impropriamente chiamata *cilindroide di* CAYLEY o *conoide di* PLÜCKER, di cui è noto l'intervento in svariate questioni geometriche e meccaniche e di cui il MANNHEIM si occupò, a varie riprese, per tutta la sua vita.

Il movimento d'un solido soggetto a sole quattro condizioni, del quale il MANNHEIM ha la gloria di avere iniziato lo studio, forma il tema anche di un altro suo esteso lavoro (*Journ. de mathém.* III Ser., T. I, 1875, p. 75), nel quale giova rilevare anzitutto l'osservazione nuova, ed allora di apparenza paradossale, che in qualunque movimento vi sono degli elementi fissi: sono i *punti ciclici*, se si tratta d'un moto piano, è il *circolo immaginario* all'infinito, se si tratta del moto d'un solido. Penetrando poi nell'anima del suo tema, il MANNHEIM dimostra essere un'iperboloide il luogo delle normali alle superficie trajettorie de' punti d'una retta qualunque dello spazio e ne trae una nuova dimostrazione dell'esistenza di due rette incontrate dalle normali alle superficie trajettorie di tutti i punti di una figura mobile di forma invariabile. L'artificio qui usato di dedurre le proprietà relative al moto d'una figura qualsiasi dalle analoghe concernenti una retta, viene dal nostro autore applicato più volte, assurge quindi alla dignità di metodo e mena a conseguenze interessantissime. Lo spazio non concedendoci di riferirle per esteso, ci limitiamo ad enunciare le questioni a cui esse si riferiscono: Di qual ordine è il luogo dei punti d'un solido le cui trajettorie: *a*) sono tangenti

Digitized by Google

alle linee asintotiche delle superficie trajettorie dei punti stessi; *b*) osculano le geodetiche delle superficie trajettorie; *c*) hanno raggio di curvatura nullo; *d*) sono tangenti alle linee di curvatura delle superficie trajettorie; *e*) hanno un raggio di curvatura principale infinito; *f*) hanno i loro raggi di curvatura eguali e dello stesso segno oppure di segni contrari? Dalle soluzioni si desume l'esistenza di parecchie curve e superficie algebriche collegate a qualsiasi movimento di una figura solida. « Les géomètres comprendront, sans que nous ayons besoin d'insister, toute l'importance d'un travail qui réunit dans une théorie absolument nouvelle, en les déduisant d'un mode uniforme de démonstration, des résultats aussi précis et aussi considérables » (CHASLES).

Nella chiusa di tale memoria il MANNHEIM allude a speciali movimenti pei quali non sussistono tutte le proprietà esposte, mentre altre se ne presentano. Ora, ad un notevole moto particolare d'un solido qualsivoglia egli consacrò più tardi un importante lavoro (*Journ. Ec. pol.*, LX Cah. 1890 p. 75), nel quale è risoluta la seguente questione: *Determinare direttamente le condizioni affinchè il movimento d'un solido sia tale che qualunque piano ad esso collegato passi per un punto fisso.* In tali ipotesi, come osservò il DARBOUX (*C. R.* T. XCII, 1881, p. 118), quei piani inviluppano ciascuno un cono di rotazione; MANNHEIM aggiunse che gli assi di tali coni sono fra loro paralleli e che al mobile è collegato un fascio di piani i cui singoli elementi passano per altrettante rette fisse, generatrici d'un cilindro. Il detto movimento, se è possibile, può intendersi ottenuto, vuoi facendo muovere un triedro rigido in modo che due facce passino ciascuna per una retta fissa e la terza per un punto fisso, vuoi combinando il ruzzolamento di un cilindro rotondo sopra un altro di raggio metà, con una traslazione parallela alla comune direzione degli assi di tali cilindri. Tutte queste proposizioni postulano la possibilità del movimento in questione; per dimostrarla, l'autore, servendosi di uno speciale moto piano, fa vedere che, quando un triedro rigido si muove in modo che due sue facce siano costantemente tangenti a due coni rotondi ad assi paralleli mentre la terza passa per un punto fisso, qualsivoglia piano connesso al triedro passerà pure per un punto fisso.

Il più semplice sistema di forma invariabile è la *retta*; il movimento di essa (del quale, come vedemmo, il MANNHEIM erasi incidentalmente occupato in precedenti pubblicazioni) diede materia ad un lavoro (*Bull. Soc. math. France* T. I, 1873, p. 106), dal quale togliamo i seguenti enunciati: *Le tangenti alle trajettorie dei singoli punti di una retta in un istante qualunque costituiscono un paraboloide iperbolico, mentre i relativi piani osculatori inviluppano una superficie di quart'ordine e terza classe; sulla retta mobile in generale non esiste alcun punto che sia flesso della corrispondente trajet-*

Digitized by Google

toria, ma, se ve ne è uno, i piani osculatori in punti corrispondenti delle traiettorie di tutti i punti della retta mobile inviluppano un cilindro; ecc. Fra le molteplici conseguenze di queste proposizioni limitiamoci a notare la seguente: *Se quattro punti d'una retta mobile descrivono ciascuno un piano, un quinto punto qualsiasi di essa descriverà una conica; le infinite coniche analoghe hanno i loro centri su di una retta.* La riferiamo non solo perchè ci sembra notevole e perchè servì di punto di partenza per importanti indagini dell'HALPHEN, ma perchè la si ritrova in un posteriore lavoro (*Rend. Circ. mat di Palermo,* T. III, 1889, p. 131), nel quale il nostro scienziato stabilì per via esclusivamente geometrica elementare le circostanze essenziali di un movimento tale che tutti i punti della figura mobile descrivano delle ellissi, giungendo a dimostrare che lo si può ottenere combinando il moto di ruzzolamento di un cilindro circolare retto sopra un altro di raggio doppio, con una traslazione parallela all'asse del cilindro.

Al movimento di una retta si riferisce pure un lavoro del MANNHEIM di più antica data (*Bull. des Sc. math.* II Ser. T. IX, 1885, p. 137), il cui precipuo intento è di stabilire alcune belle proposizioni del DARBOUX. Come questi il MANNHEIM suppose che una retta D muovasi nello spazio con la condizione che tre suoi punti descrivano le facce d'un triedro trirettangolo, e dimostrò che essa è costantemente normale ad una (e quindi ad ∞^1) superficie suscettibili d'un'elegante definizione geometrica; incidentalmente ottenne alcune interessanti costruzioni e proposizioni.

Analogo a tale movimento è quello di una retta D (*C. R.* T. CX, 1890 p. 220, 270 e 391), regolato dalla condizione che tre suoi punti a, b, c percorrano altrettante sfere coi centri α, β, γ sopra una retta O: allora qualunque altro punto l di D percorre pure una sfera col centro in O; e se s'immagina che una fila di sfere coi loro centri in D formino una figura rigida mobile con la condizione che tre suoi elementi tocchino altrettante sfere fisse coi centri in punti di O, qualunque altra sfera della fila toccherà sempre un'altra analoga sfera. In particolare, se D trovasi all'infinito, quelle sfere divengono piani paralleli ad una retta fissa e si conclude che, *se tre piani di un fascio rigido si muovono toccando costantemente tre sfere coi centri sopra una retta O, qualunque altro piano del fascio toccherà un'analoga sfera.* Da questa curiosa considerazione scaturisce un procedimento per dedurre da ogni proposizione concernente la cinematica di una retta un teorema congenere relativo ad un fascio di piani, passando attraverso ad uno relativo ad una fila di sfere. Nell'impossibilità di enumerare tutte le applicazioni fattene dal MANNHEIM, ci basti segnalare la dimostrazione da lui data (*C. R.* T. CXII, 1891, p. 475). per l'identità sostanziale delle due seguenti proposizioni: *Se quattro punti di una retta percorrono altrettante sfere coi centri in un piano, ogni*

Digitized by Google

altro punto di quella retta descriverà una sfera analoga. Se quattro piani d'un fascio rigido toccano altrettante sfere coi centri in un piano, ogni altro piano di quel fascio toccherà una sfera analoga.

Un'altra figura speciale per semplicità paragonabile alla retta è il diedro rigido; il MANNHEIM ne investigò il moto infinitesimo (*C. R.* T. LXXXIV, 1877, p. 1373), dimostrando che in generale esso equivale ad una semplice rotazione; ma se, mentre lo spigolo del diedro genera un elemento di superficie gobba, una delle facce ha per caratteristica una retta perpendicolare allo spigolo stesso, lo stesso accadrà per l'altra faccia e quel moto infinitesimo equivarrà ad una semplice traslazione. L'importanza geometrica di questo risultato è dimostrata dall'avere il MANNHEIM ottenuto col suo mezzo (*Mess. of Math.* T. XIII, 1884, p. 168) l'estensione allo spazio del teorema di RÉAUMUR che sta a base della teoria delle evolute oblique.

Ad applicare i concetti ed i metodi della Geometria cinematica a figure più complicate delle punteggiate e dei fasci di piani il Nostro fu indotto dalle note ricerche che condussero il DE SPARRE a rettificare un punto essenziale della *Théorie nouvelle de la rotation d'un corps* del POINSOT. Studiando direttamente ed esaurientemente (*C. R.* T. C, 1885, p. 938 e 963) il moto d'un ellissoide col centro fisso e che ruzzola sopra un piano fisso, egli giunse nel modo più spontaneo alle conclusioni del DE SPARRE e ad altre che vi si connettono.

Sopra siffatte questioni egli è ritornato (Id. T. CII, 1886, p. 253, 310, 353, 501) in seguito agli studi iniziati da CAYLEY e LARMOR relativi all'iperboloide rigato deformabile, provocati da un bel quesito proposto dal GREENHILL e proseguiti brillantemente in Francia dal DARBOUX; applicandovi i procedimenti caratteristici della Geometria cinematica egli riuscì a collegare armonicamente i risultati del DE SPARRE ai celebri teoremi di IVORY sulle quàdriche omofocali.

Ricordiamo anche, prima di volgerci ad altro soggetto, le ricerche fatte dal MANNHEIM, in seguito ad una comunicazione del RÉSAL, sul movimento d'un doppio cono vincolato da varie condizioni (Id. T. CI, 1890, p. 634 e 817) ed i notevoli contributi da lui dati (*Journ. de math.* V Ser. T. III, 1897, p. 149), alle indagini iniziate da R. BRICARD sull'ottaedro articolato; e giova rilevare come ivi gli aspiranti a proseguire nella via spianata dal nostro autore leggeranno gli enunciati di tutta una serie di questioni importanti e tuttora irresolute concernenti il movimento d'un triangolo rigido.

Chiuderemo questa rassegna dei lavori cinematici del MANNHEIM segnalando le dimostrazioni elementari da lui date (*Mess. of Math.* T. XIV, 1885, p. 20 e T. XXVI, 1899, p. 152) per le proprietà

Digitized by Google

caratteristiche dei noti sistemi articolati dell' HART e del KEMPE-

IV. *Geometria infinitesimale.* — Mentre la geometria infinitesimale trattata col sussidio delle coordinate è intimamente legata al formalismo leibniziano del calcolo sublime, la trattazione sintetica di quel nobilissimo ramo dello scibile matematico è, e sembra dovere sempre rimanere, indissolubilmente connessa alla concezione newtoniana del calcolo stesso; chè l'investigazione delle qualità più riposte delle curve e delle superficie si direbbe non potere essere effettuata geometricamente che da chi ne studia la genesi per mezzo di enti più semplici (punti, rette, piani) variabili con legge determinata. Niuna meraviglia, pertanto, se i lavori di cui ora imprendiamo l'analisi siano così strettamente avvinti a quelli dianzi discorsi che il separarneli, come noi facciamo, sia da ritenersi per un semplice artificio espositivo, analogo a quello che fa considerare separatamente causa da effetto, teoria da applicazione.

a) *Geometria piana.* — Una curva piana qualunque Γ si può notoriamente rappresentare mediante un'equazione $f(r, s) = 0$ fra il suo raggio di curvatura r in un punto qualunque P e la lunghezza s del suo arco compreso fra P ed un punto fisso di Γ: è questo il sistema di coordinate che sta a base della Geometria intrinseca. Ora se s'interpretano r, s come coordinate cartesiane ortogonali d'un punto del piano, l'equazione $f(r, s) = 0$ rappresenta una curva Δ, tale che, come osservò il MANNHEIM (*Journ. de math.* II Ser. T. IV, 1859 p. 93), se si fa ruzzolare Γ sopra una retta g e per ogni posizione si costruisce il centro di curvatura di Γ nel corrispondente punto di contatto, il luogo dei punti risultanti, rispetto ad un sistema cartesiano di cui g sia un asse, ha appunto per equazione $f(r, s) = 0$. Egli ha insegnato a costruirne la tangente in un punto qualunque ed ottenerne per via geometrica la rettificazione e la quadratura, ed ha fatto vedere come essa guidasse alla scoperta di eleganti proprietà di parecchie curve speciali (spirale logaritmica, curve cicliche, catenaria e spirali sinusoidi). L'originalità e fecondità di siffatta considerazione consigliarono E. WÖLFFING a chiamare Δ la *curva di* MANNHEIM della Γ, proposta assennatissima che venne generalmente accettata.

Non sono questi gli unici frutti che il Nostro abbia raccolti dal considerare il moto di ruzzolamento di una curva sopra una retta. Infatti (v. *Journ. de l'Éc. Pol.* XL Cah. 1863, p. 203), E. CATALAN, appunto per incarico del suo antico discepolo, comunicò alla Società filomatica di Parigi la seguente proposizione: *Quando una curva piana* Γ *ruzzola sopra una retta fissa, un punto qualunque* M *collegato a* Γ *descrive una curva di lunghezza eguale alla podaria di* M *rispetto a* Γ *stessa.* Pubblicata nel giornale « L'Institut » del 25 febbrajo 1858, insieme a svariate conseguenze, at-

Digitized by Google

trasse subito l'attenzione d'un altro eminente cultore della geometria cinematico-infinitesimale, il LAMARLE, il quale si affrettò a dimostrarla e generalizzarla. D'altronde essa venne incontrata, circa nello stesso tempo, da P. SERRET e prima di tutti era stata scoperta da STEINER, nel corso delle sue famose ricerche sui baricentri di curvatura delle linee piane; onde il MANNHEIM, con l'onestà che lo distingueva nella vita scientifica come nella vita privata, propose designarla col nome di *teorema di Steiner*. Quali e quante notevoli generalizzazioni egli ne abbia date noi diremmo se la tirannia dello spazio non lo vietasse; non solo egli suppose che il punto M, che interviene nel relativo enunciato, fosse per proprio conto animato da un movimento qualunque, ma estese le sue considerazioni alla sfera ed allo spazio. Le proposizioni ottenute concernono il paragone e le misure di archi di curve e chi volesse dimostrarle col sussidio dell'analisi dovrebbe riconoscere di trovarsi alle prese con un genere di questioni in cui questa è vinta dalla sua eterna rivale. E va notato che l'edificio veramente grandioso eretto dal MANNHEIM poggia sopra una semplice formola, la quale dà, sotto forma finita, il rapporto dei cammini elementari descritti dagli estremi d'una retta, formola che, mentre abilita a risolvere altre questioni ancor più generali, guida a nuove proprietà di curve speciali.

Del resto non è questo il più antico contributo che egli abbia dato alla trattazione sintetica di elevate questioni di Calcolo integrale; giacchè prima del (*Journ. de math.* II Ser, T. VII, 1862, p. 205) la lettura del *Théorème sur les ares des lignes aplanétiques* (Id. T. XV, 1850, p. 194) di W. ROBERTES avevalo condotto ad osservare come una qualunque delle curve ivi considerate (cioè rappresentabile in coordinate polari r, ω mediante un'equazione del tipo $r^2 - 2r\Omega + a = 0$, ove Ω è una data funzione di ω) è l'anallagmatica inviluppata dagli ∞^1 cerchi ortogonali ad un cerchio fisso ed aventi i loro centri sopra l'antipodaria dell'origine rispetto alla curva $r = \Omega$. Tale circostanza venne da lui sfruttata per trasformare e stabilire geo- metricamente alcune formole di rettificazione scoperte dal ROBERTES e dedurre una notevole proprietà dallo stesso avvertita nelle ovali di DESCARTES. Si noti anche che, nello stesso lavoro, il MANNHEIM ha introdotta la considerazione di una nuova curva connessa ad una data curva Γ; è l'inviluppo I dei cerchi che hanno i loro centri su Γ e per raggi i relativi raggi di curvatura, ed ha dimostrato che ogni arco di Γ è uguale alla differenza dei due corrispondenti archi di I. Egli ha poi estese alla sfera le considerazioni testè compendiate e ne ha dedotta una bella proprietà dell'ellisse sferica.

Considerazioni della stessa natura si ritrovano in altro lavoro dedicato alle curve oggi chiamate *spirali sinusoidi* ed a quelle generate dal

Digitized by Google

polo di una di esse, quando la spirale ruzzola sopra una retta (*Bull. Soc. math. France* T. IV, 1876, p. 158), lavoro che, dovendo ascriversi alla categoria delle opere minori del MANNHEIM, non può ricevere qui più di un cenno fugace.

A tali ricerche di *Calcolo integrale sintetico* ne fanno riscontro altre di *Calcolo differenziale sintetico*, le quali, benchè abbiano portata assai minore delle altre, non meritano di essere condannate all'ostracismo della nostra analisi.

Quelle di più antica data si connettono alle immortali proposizioni di PONCELET sopra i poligoni inscritti e circoscritti alle coniche e concernono gli n-goni semplici i cui lati toccano date curve e di cui $n - 1$ vertici appartengono a linee assegnate; per determinare la tangente in un punto arbitrario del luogo del vertice libero d'un tale poligono, il MANNHEIM esumò una formola di NEWTON che leggesi nell'introduzione al *Tractatus de quadratura curvarum* e ne dedusse due teoremi generali, la cui fecondità fu da lui stesso dimostrata traendone (in una comunicazione fatta alla Società filomatica il 5 maggio 1860) elegantissime nuove proprietà delle curve del 2° e del 3° ordine e risolvendo il seguente problema: *Un poligono si muove nel proprio piano conservandosi simile a sè stesso; si conoscono i centri di curvatura, tanto della curva inviluppata da un solo lato, quanto delle curve descritte dagli estremi dello stesso; determinare i centri di curvatura in un punto qualunque della linea descritta da un altro vertice od inviluppata da un altro lato del poligono.*

Soltanto novità di metodo offre una breve Nota inserita in uno dei ben noti volumi del PONCELET, *Applications d'analyse et de géométrie* (Paris 1862-63) nella quale giungesi, per altra via, ad una costruzione che questi aveva dedotta dal metodo delle tangenti del ROBERVAL. Aggiungiamo che il MANNHEIM ritornò trentaquattro anni più tardi sulla medesima questione per segnalare altre due costruzioni analoghe (*The Mess. of Math.*, T. XXVII, 1908 p. 18) applicabili quando, per la disposizione dei dati, la prima cessa di esserlo; a tale proposito egli osservò che, i lavori geometrografici del LEMOINE, lasciando intatta la questione dell'applicabilità delle soluzioni, torna della massima importanza averne a propria disposizione parecchie, da usare a seconda delle circostanze.

In altro lavoro (che, benchè di aspetto modesto, ottenne il più lusinghiero giudizio da parte di PONCELET che lo inserì in uno dei suoi citati volumi), mediante un'ingegnosa applicazione del teorema di CARNOT, egli giunse alla seguente proposizione nuova ed elegante: *Siano B, C due punti di una curva del terz'ordine, A il punto in cui si tagliano le relative tangenti, b il terzo punto comune alla curva ed alla retta BC, e D il punto in cui questa retta è incontrata dalla congiungente delle terze intersezioni della*

Digitized by Google

data curva con le tangenti AB, AC; allora il rapporto dei raggi di curvatura di tale curva in B, C è dato da

$$\frac{\overline{AB}^3 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{Bb}}{\overline{AC}^3 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{Cb}};$$

quando la cubica si spezza in una retta ed una conica, si ricade in una proprietà delle coniche, di cui già parlammo nel Cap. prec.

Un più recente lavoro (*Nouv. Ann.* II Ser., T. XVII, 1878, p. 321) del Nostro, pur non avendo che il modesto scopo di mostrare sopra un esempio la natura e la fecondità della Geometria cinematica, contiene qualche utile osservazione sulle asteroidi. In altro (Id. III Ser. T. VIII, 1889, p. 325) gli stessi metodi conducono ad una nuova soluzione di una questione già trattata dal LAISANT in una comunicazione fatta alla Società matematica di Francia il 18 luglio 1888. Essi permisero poi un esauriente studio dell'inviluppo della congiungente due punti mobili su di un cerchio con velocità una doppia dell'altra, e diedero eleganti costruzioni per la tangente all'ovale di CASSINI, la normale alla *fibre moyenne* ed i centri di curvatura dell'evoluta dell'ellisse e della concoide di NICOMEDE.

Sopra tutti questi emerge un congenere lavoro pubblicato nel volume commemorativo del I centenario della Società filomatica, nel quale il MANNHEIM, riprendendo da altro punto di vista il tema d'un suo lavoro giovanile, applicò i procedimenti a lui diletti allo studio delle caustiche piane, nell'ipotesi più generale in cui i raggi luminosi, invece di emanare da un punto, inviluppano una curva qualsivoglia. Anzitutto egli espose una notevole costruzione del punto di contatto d'un qualunque raggio rifratto col proprio inviluppo e ne desunse una relazione fra gli angoli d'incidenza e di rifrazione, l'indice di rifrazione, il raggio di curvatura in un punto della curva rifrangente e le lunghezze dei corrispondenti raggi incidente e rifratto; tale relazione porge la costruzione del centro di curvatura della caustica ed una formola che lega i raggi di curvatura in punti corrispondenti delle tre curve considerate (cioè curva rifrangente ed inviluppi dei raggi incidenti e rifratti). Non bastano questi pochi cenni a provare come la teoria delle caustiche sia debitrice all'infaticabile geometra di cui ci occupiamo di un notevole perfezionamento, anzi di un reale progresso?

b) Geometria dello spazio. — In un suo ben noto lavoro, STEINER ricorse ad un movimento infinitesimo per determinare il numero delle normali che possono condursi ad una curva piana algebrica da un punto qualunque del suo piano. Tale artificio logico fu esteso allo spazio da F. AUGUST, ed il MANNHEIM se ne servì per determinare la distribuzione

Digitized by Google

nello spazio delle normali ad una superficie algebrica; ma, avendo (*C. R.* T. LXX, 1870, p. 1025) egli ragionato esclusivamente sopra superficie generali ne' loro ordini e sopra curve intersezioni complete di superficie, le proposizioni di geometria numerativa a cui pervenne hanno portata minore di quella posseduta dalle congeneri a cui giunsero G. DARBOUX e R. STURM. Nell'ipotesi che la superficie considerata sia di second'ordine (*Bull. des Sc. math. et astr.* T. I, 1870, p. 198) la stessa procedura conduce in modo uniforme ad un gruppo di teoremi sulle normali alle quàdriche, alcuni dovuti a DESBOVES e LAGUERRE, ma in parte nuovi. Siaci lecito essere brevi su tali lavori che appajono scoloriti a paragone di altri che attualmente ci attraggono.

È noto che si chiama *asse di curvatura d'una linea sghemba* l'intersezione di due suoi piani normali consecutivi; il MANNHEIM propose (*C. R.* T. LXXIV, 1872 p. 372) di chiamare *asse di curvatura d'una superficie sviluppabile* l'intersezione del piano normale alla stessa condotto per una generatrice con l'analogo relativo alla generatrice consecutiva. Ricordiamo pure che MONGE introdusse la considerazione dell'inviluppo dei piani normali d'una curva sghemba, a cui diede il nome di *superficie polare* della data curva o della corrispondente sviluppabile. Ora MANNHEIM ha osservato che la superficie polare dà luogo ad una nuova superficie analoga, da lui chiamata *seconda superficie polare,* e che, potendosi tale considerazione ripetere indefinitamente, nasce tutta una *serie di superficie polari successive.* Inoltre, egli propose di enunciare come segue il teorema di MEUSNIER: «quando due curve tracciate su una superficie hanno fra loro un contatto di primo ordine nel punto *a*, i loro assi di curvatura uscenti da tale punto passano per uno stesso punto»; la convenienza di questa nuova forma appare evidente considerando che guida alla seguente generalizzazione del citato teorema: *quando due curve tracciate sopra una superficie hanno fra loro nel punto a un contatto dell'ordine n, le loro* $(n-1)^{me}$ *superficie polari hanno ivi per assi di curvatura due rette passanti per uno stesso punto.*

Altri studi compiuti da MANNHEIM sulla teoria della curvatura delle superficie (*C. R.* T. LXXIV, 1872, p. 372) lo indussero alla considerazione del cosiddetto *paraboloide delle otto rette.* Fra le questioni di cui esso porge la soluzione citiamo a mo' d'esempio la seguente: *dati gli assi di curvatura in un punto a di una superficie (S) delle linee di curvatura passanti per a, nonchè i piani delle relative sezioni principali dell'evoluta di (S), determinare i centri di curvatura principali di questa superficie.*

Le surriferite nozioni, combinate ai risultati di un precedente lavoro cinematico, posero in grado il Nostro di schizzare (*C. R.* T. LXXIV,

Digitized by Google

1872, p. 372) una teoria geometrica della curvatura delle superficie. Non pago di ciò, subito dopo, dedicò un importante lavoro (Id. p. 856 e 928) ai contatti delle superficie, teoria che, dopo DUPIN, era rimasta stazionaria. Ora, se si prosegue nell'ordine delle idee in cui si aggirò questo celebre geometra, si è indotti a considerare, invece della solita conica indicatrice, una serie di curve di ordini costantemente crescenti; MANNHEIM propose di considerare invece le già definite rette di curvatura, il cui insieme costituiva ai suoi occhi l'elemento analogo nello spazio al centro di curvatura delle linee piane. Per porre in luce l'utilità di siffatta considerazione notiamo anzitutto che egli, col mezzo di essa, dimostrò che la proposizione seguente, stabilita dal DUPIN per $n = 3$, sussiste eziando per $n = 4$: *Se le sezioni prodotte da n piani arbitrari condotti per un punto a comune a due superficie, hanno ivi un contatto d'ordine* $n - 1$, *lo stesso accadrà per qualunque altro piano condotto per a.* Aggiungiamo altri risultati che essa diede nelle mani del MANNHEIM: *E' una conica il luogo dei centri di curvatura in un punto a di una superficie (S) delle evolute delle sezioni prodotte in questa da piani per una delle tangenti di (S) in a. Due superficie (S), (S'), hanno fra di loro un contatto di terz'ordine in un punto comune a se le falde delle loro evolute sono fra loro osculatrici ne' punti corrispondenti ad a, oppure se le loro linee di curvatura incrociate in a hanno ivi un contatto di terz'ordine.* Ecc.

La teoria della curvatura di una superficie, essendo in ultima analisi lo studio del sistema costituito dalle sue ∞^2 normali, è naturale che il MANNHEIM sia stato condotto, dalle investigazioni di cui indicammo testè alcuni risultati, ad occuparsi dei sistemi di rette doppiamente infiniti, a cui il KUMMER nel 1859 aveva dato forma definitiva con una classica memoria, che una traduzione francese del DEWULF aveva resa conosciutissima in Francia. Ed in alcune comunicazioni fatte alla Società filomatica nelle sedute del 2 e del 23 aprile e del 7 maggio 1864 indicò a grandi linee un metodo per trattarla geometricamente. A base di esso stanno alcuni nuovi concetti che, convenientemente estesi, vennero tosto inseriti ed applicati da J. DE LA GOURNERIE nell'ultimo volume del suo ben noto *Traité de Géométrie descriptive*; essi si apprendono nel § 1 d'una sua elaborata memoria (*Journ. de math.* II Ser., T. XVII, 1872, p. 109). Considerazioni analoghe condussero (Ivi p. 403) il Nostro ad un'importante relazione scoperta da BERTRAND fra le posizioni delle normali condotte ad una superficie dagli estremi di due archi infinitesimi eguali uscenti dal medesimo punto della stessa e gli permisero di trattare con metodo prettamente geometrico la celebre questione (che il SAINT-VENANT aveva proposto ed il BERTRAND ha per primo risoluto) se due

Digitized by Google

curve possano avere a comune il sistema delle normali principali. Così egli, non solo pervenne alla nota relazione caratteristica

$$\frac{a}{\text{tang } a}\frac{1}{r} + \frac{a}{\varrho} = 1$$

fra la flessione $\left(\frac{1}{r}\right)$ e la torsione $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ di una *curva di* BERTRAND, ma stabilì le seguenti nuove relazioni

$$r r_1 = \frac{a^2}{\text{sen}^2 a}, \quad \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)\left(1 + \frac{a}{\varrho_1}\right) = \cos^2 a$$

che passano fra le prime e le seconde curvature in punti corrispondenti di due curve aventi le stesse normali principali; fra gli altri risultati conseguiti dal nostro geometra notiamo la costanza da lui avvertita del birapporto formato dai due punti in cui due curve di BERTRAND sono incontrate da una comune normale principale e dai corrispondenti centri di prima curvatura. Più tardi egli ritornò sopra tali curve per segnalarne nuove proprietà (*C. R.* T. XXXV, 1889, p. 212) e per indicare (*Proc. London math. Soc.* T. XVI, 1885, p. 273) una costruzione elegante che serve a dedurre. l'uno dall'altro, i centri delle sfere osculatrici in due punti corrispondenti di due curve aventi le stesse normali principali. Il valore di tutti questi risultati sembraci tale da esigere che i futuri espositori della geometria differenziale ne tengano maggior conto di quanto abbiano fatto sinora.

Dopo questa digressione, torniamo alla teoria della curvatura delle superficie, per segnalare una notevolissima formola, scoperta dal MANNHEIM (*C. R.* T. LXXIX, 1874, p. 1328), che lega i raggi principali di curvatura r_1, r_2; t_1, t_2 delle due falde (B), (C) dell'evoluta d'una superficie (S) nei punti b, c in cui essa è toccata dalla normale A di (S) in un suo punto qualunque a, ai raggi principali di curvatura R_1, R_2 di (S) in a:

$$4(R_1 - R_2)^2 + (r_1 - r_2)(t_1 - t_2)\,\text{sen } 2\beta.\,\text{sen } 2\gamma = 0,$$

ove β, γ sono gli angoli che la normale A forma con gli assi focali delle indicatrici in b, c rispettivamente (B), (C).

Degne di menzione ci sembrano anche le soluzioni date dal MANNHEIM, (Id. p. 959 e 1328) per alcuni problemi, se non altro perchè lo guidarono alla seguente relazione:

$$r = R_1 \,\text{sen}^2 \omega + R_2 \cos^2 \omega,$$

ω essendo l'angolo che l'asse focale dell'indicatrice di (S) di una superficie nel punto considerato fa col piano su cui questa viene proiettata ortogonalmente.

Si connettono a questi altri lavori (*Bull. de la Soc. math. de France.* T. II, 1874, p. 140 e *C. R.* T. LXXXIII, 1876, p. 1040) ove in due

Digitized by Google

differenti modi è costruita la sfera osculatrice in un punto dell'intersezione di due superficie: una di tali costruzioni ha per fondamento la suesposta generalizzazione del teorema di MEUSNIER, mentre l'altra esige sappiasi costruire il centro di curvatura dell'evoluta della sezione prodotta in una superficie da un piano qualunque. Altrettanto nuove, forse meno importanti, ma per fermo più difficili, sono le congeneri questioni di cui leggonsi delle soluzioni eleganti in altri scritti del MANNHEIM (*C. R.* T. LXXX, 1875, p. 541 e 619) sui quali a malincuore sorvoliamo. Come corollario di una di tali soluzioni egli ha ottenuto (Ivi p. 725) per via geometrica questo bel teorema del RIBAUCOUR: *il raggio di curvatura geodetica in un punto di una linea di curvatura geodetica costante d'una superficie è eguale a* $\frac{2}{3}$ *del raggio di curvatura geodetica della sezione piana ivi tangente ed iperosculata da un cerchio.* E va notato che tale teorema, essendo stato poi dedotto dal LAGUERRE da un'antica formola da lui prima scoperta, al MANNHEIM punse vaghezza di mostrare (Ivi T. LXXXII, 1876, p. 554) come a tale formola guidassero anche i propri metodi d'indagine.

Le rette normali ad una superficie essendo normali a tutto un sistema di superficie fra loro parallele, il MANNHEIM venne spontaneamente trascinato ad occuparsi della corrispondenza per parallelismo di due superficie qualunque; e sopra un tema che poteva annoverarsi fra quelli esauriti scrisse una memoria (*Proc. London math. Society*, T. XII, 1881, p. 177) che riscosse l'unanime plauso del sodalizio, a cui venne presentata. Gli fu dato di cogliere tali nuovi allori, non solo servendosi delle risultanze di precedenti suoi scritti, ma anche introducendo la considerazione di curve che fino allora non si erano trattate da tale punto di vista. Merita di venire anche rilevata un'espressione esposta ivi dal MANNHEIM pel raggio di curvatura dell'evoluta del contorno apparente di una superficie qualunque, della quale più tardi egli diede una dimostrazione, fondata sull'uso delle due rette di curvatura, in una nota (Id. T. XX, 1899, p. 241) contenente complementi preziosi alla memoria sulle superficie parallele.

Proseguendo a meditare sulla Geometria infinitesimale dello spazio rigato egli ne trasse argomento per un *Mémorie d'optique géométrique* che sottopose al giudizio dell'Accademia dei Lincei. Il parere su di esso pronunciato dai Commissari all'uopo delegati, BELTRAMI e CREMONA, è compendiato in una Relazione presentata dal primo a nome di entrambi nella seduta dal 12 Aprile 1885; concludendo essa per l'accoglimento, il lavoro del MANNHEIM fu inserito nel vol. I della IV serie delle *Memorie* di quel sodalizio.

Digitized by Google

Come è opportunamente rilevato dal BELTRAMI i germi dei concetti fondamentali applicati dal MANNHEIM alla teoria delle caustiche nello spazio si trovano in altre più antiche sue memorie relative alle *superficie rigate*: sono quelle in cui, dopo di avere (*C. R.* T. LXXXV, 1877, p. 788, 847, 941) suggerito di rappresentate una superficie rigata mediante l'inviluppo delle sue rette ausiliari delle singole sue generatrici, viene mostrato in qual modo si possano ottenere le superficie rigate di nota rappresentazione; rileviamo anche (Id. T. LXXXVI, 1878, p. 1254) l'osservazione che, per studiare una curva sghemba, giova considerarla come situata sopra la rigata delle normali principali, da rappresentarsi poi col metodo testè ricordato.

Nella contemporaneità di tali studi con altri sulla superficie delle onde, dei quali tratteremo fra breve, è da ricercarsi la prima radice di un nuovo modo di trasformazione delle superficie rigate immaginato dal MANNHEIM (Id. T. LXXXVIII, 1879, p. 1128): per applicarlo si suppongano dati un punto fisso o ed una rigata (G) e si consideri il piano determinato da o e da una generatrice G di tale superficie; facendolo ruotare d'un angolo retto attorno ad o, G assumerà una posizione nuova G_1 e la data rigata si trasformerà in altra (G_1). Il lettore avvertirà tosto l'applicabilità di questo metodo a tutte le rette dello spazio; facendolo agire sopra un pennello di raggi, nasce un nuovo pennello legato al primo da notevoli relazioni (Ivi p. 1175).

La bella collezione di lavori del MANNHEIM sulle superficie rigate contiene ancora altri scritti. Uno di essi (*Bull. Soc. math. de France* T. V, 1877, p. 163), ha per iscopo la ricerca di una relazione fra il parametro di distribuzione k relativo ad una generatrice G di una rigata (G) ed il parametro di distribuzione k_1 relativo ad una generatrice N del paraboloide formato dalle normali di (G) lungo G; ora MANNHEIM, ricorrendo ad una opportuna rappresentazione di (G) in doppia projezione ortogonale, trova $k_1 = \frac{k}{\cos^2\theta}$, θ essendo l'angolo che N forma con la normale alla superficie (G) nel punto centrale della generatrice considerata. Fra i corollari di tale notevole relazione citiamo il seguente: *il raggio di torsione in un punto d'una curva gobba è eguale a ciascuno dei raggi principali di curvatura in quel punto della rigata costituita dalle normali principali della curva.* Da un altro lavoro (*Journ. de math.*, III Ser., T. IV, 1878, p. 37) provocato da un articolo di J. FRANKE (Id. T. III, 1877, p. 415), si apprende un'elegante relazione fra i parametri di distribuzione di due rigate dedotte una dall'altra con uno speciale procedimento. Un terzo (*Bull. Soc. de France*, T. VI, 1878, p. 5), riferentesi ad un passo del grande *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* di O. BONNET, ha per iscopo di stabilire

Digitized by Google

geometricamente che *se una linea tracciata sopra una superficie rigata gode di due delle seguenti prerogative, possederà anche la terza: è una geodetica, è la linea di stringimento, è una trajettoria obliqua delle generatrici.* Finalmente, quello di data più recente (*Nouv. Ann.* III Ser., T. IX, 1890, p. 227) fa acquistare un'insperata generalità ad una proprietà avvertita da C. BIOCHE (*C. R.* T. CX, p. 515) nelle rigate generate da una retta invariabilmente connessa al triedro principale di una linea gobba.

Le rigate non sono le uniche superficie speciali che abbiano attratta l'attenzione del MANNHEIM. Infatti, nell'elenco dei suoi lavori troviamo una Nota (*Bull. de Sc. math.* T. III, 1872, p. 119) sulla superficie luogo dei punti equidistanti di due rette fisse, della quale eransi già occupati J. A. SERRET ed E. CATALAN; riguardo ad essa egli ha insegnate delle costruzioni semplici e notevoli, non foss'altro perchè sussistono anche supponendo quelle distanze non eguali, ma in rapporto costante. Al MANNHEIM spetta poi il merito (*C. R.* T. LXXXIV, 1877, p. 932 e *Bull. de la Soc. math. de France* T. V, 1877 p. 163), di avere per primo investigate geometricamente le superficie i cui raggi principali di curvatura in un punto qualunque sono legati da una relazione e di avere aggiunta qualche nuova proprietà a quelle notate prima dal RIBAUCOUR e dall'HALPHEN. Inoltre: esistono in un ellissoide ∞^2 corde ab di data lunghezza e tali che le normali alla superficie nei loro estremi si tagliano; i loro centri costituiscono una superficie considerata da J. W. L. GLAISHER; ora il MANNHEIM insegnò (*Quart. Journ. of Math.* T. XVII, 1881, p. 147) che per costruire la normale in un suo punto qualunque m basta unire questo all'intersezione delle normali in a, b all'ellissoide, costruzione non soltanto elegantissima, ma degna di nota per la sua identità con quella che dà la normale al luogo dei punti medî delle corde di data lunghezza d'un'ellisse. Finalmente egli ha insegnato (*Ass. fr.* 1878 p. 156) a determinare semplicemente i centri di curvatura principali in un punto qualsivoglia d'un'elicoide rigata, apportando così un rilevante perfezionamento alla teoria di una superficie, per importanza teorica e pratica a ben poche seconda.

V. *Superficie delle onde.* — Ma la superficie a cui egli si dedicò col massimo impegno per circa un trentennio, applicandovi tutti i metodi di cui disponeva, cinematici e geometrici, infinitesimali e projettivi, è la superficie delle onde; quali e quanti risultati egli abbia ottenuti emerge dal seguente compendio dei relativi lavori.

I primi geometri che, a partire dal FRESNEL (1822, 1828, 1831), si occuparono di tale superficie la investigarono in base alla sua rappresentazione analitica; ma, sino dal 1833, il MAC-CULLAGH mostrò come fosse possibile e relativamente agevole lo stabilirne le proprietà col solo

Digitized by Google

sussidio della Geometria. Gli è appunto nella via da lui aperta che si pose il MANNHEIM, il quale, nelle sue prime pubblicazioni sull'argomento (*C. R.* T. LXIV, 1867, p. 170 e 268), prese le mosse dalla seguente definizione della superficie: « Sia m un punto d'un ellissoide (m) di centro o e mn la corrispondente normale alla superficie; si conduca per o nel piano omn il segmento om_1 perpendicolare alla retta om ed eguale a tale segmento; il luogo geometrico del punto m_1 è la superficie delle onde (m_1) »; la normale ad essa in m_1 si ottiene, come notarono MAC-CULLAGH e PLÜCKER, conducendo da tale punto la perpendicolare ad mn. Se m si muove descrivendo sul dato ellissoide una linea qualunque, m_1 descriverà una curva sulla superficie d'onda e il MANNHEIM ha insegnato a dedurre dalla tangente alla prima la tangente alla seconda; di più ha indicate delle costruzioni semplici pei centri di curvatura e per le direzioni delle linee di curvatura in un punto arbitrario di (m_1), desumendone qualche nuova proprietà di questa superficie. Tali costruzioni, benchè non complicate, sono suscettibili di ulteriori semplificazioni, le quali si apprendono dall'elaboratissima memoria inserita nel ben noto volume in onore di D. CHELINI.

In lavori posteriori (*C. R.* T. LXXVIII, 1874, p. 839) il MANNHEIM preferí considerare la superficie d'onda come inviluppo dei suoi piani tangenti, ciascuno dei quali è parallelo ad un piano diametrale dell'ellissoide dato e ne dista di una lunghezza inversamente proporzionale ad un semiasse della corrispondente sezione ellittica; egli giunse così a parecchie nuove proposizioni.

La surricordata costruzione delle normali alla superficie d'onda abilita anche a determinare (*Ass. fr.* 1875, p. 167) le normalie dell'ellissoide a cui corrispondono sulla superficie anzidetta normalie sviluppabili, questione che può anche trattarsi, vuoi (Id. 1878, p. 63) col sussidio della *retta ausiliare*, dal MANNHEIM introdotta per dare un'immagine sensibile della variazione del piano tangente ad una rigata nei punti d'una generatrice, vuoi (*C. R.* T. LXXXVIII, 1879, p. 1248) col mezzo di un artificio, da noi già segnalato, per trasformare le rigate, da lui altrove (Id. p. 1128 e 1179) applicato ai sistemi di ∞^1 o ∞^2 rette. Invece la costruzione per punti delle stesse superficie (v. sopra) suggerisce quest'altra questione: *che cosa corrisponde, sopra la superficie delle onde, ad una linea di curvatura dell'ellissoide?* Il MANNHEIM ha trovato (*Ass.* fr. 1877, p. 167) che le normali alla superficie d'onda in punti d'una delle linee richieste sono perpendicolari a diametri fra loro eguali del corrispondente ellissoide.

Gli elementi della superficie d'onda suscettibili d'immediata interpretazione ottica sono le distanze dal centro dei punti e dei piani tangenti della superficie; giacchè le une corrispondono alle velocità secondo i

Digitized by Google

raggi efficaci, mentre le altre corrispondono alle velocità di propagazione normale delle onde piane. Era quindi della massima importanza il cercare delle relazioni fra tali elementi; gli è quello che fece il Nostro, in un gruppo di lavori (*C. R.* T. LXXXI, 1875, p. 369 e LXXXII, 1876, p. 368; *Ass. fr.* 1875 p. 231 e *Journ. de physique* T. V, 1876, p. 137) ove trovansi applicate e combinate accortamente le surriferite generazioni della superficie come luogo e come inviluppo.

Fondandosi sul fatto ben noto che la superficie d'onda è tagliata secondo una conica ed un cerchio, tanto da ogni piano principale dell'ellissoide, quanto dal piano all'infinito, il MANNHEIM stabilì (*Ass. fr.* 1877 p. 125 e *The Mess. of Math.* T. VII, 1838 p. 100) l'esistenza di dodici piani (tangenti singolari), ognuno dei quali tocca la superficie secondo un cerchio; egli aggiunse che la superficie è tagliata secondo una quartica anallagmatica da ogni piano parallelo ad un piano tangente singolare e che (Id. T. XIV, 1885, p. 20) essa contiene anche altre analoghe curve sghembe, intersezioni delle superficie con certi coni quàdrici ad essa concentrici.

Cercando un teorema analogo a quello secondo cui le normali d'un ellissoide sono segate in parti proporzionali dai piani principali della superficie, il Nostro trovò che *i punti in cui una normale alla superficie d'onda ne incontra i piani principali formano un birapporto costante con la projezione su di essa del centro della superficie.* Egli si è anche occupato degli ombelichi della superficie in questione, e, senza conoscere un analogo lavoro precedente di C. GALOPIN SCHAUB, ne indicò una costruzione (*C. R.* T. LXXXVIII, 1879, p. 902), dalla quale emerge che esistono *otto* tali punti, tutti reali.

Alcune delle ricerche di Geometria cinematica di cui rendemmo già conto lo guidarono poi a concepire un nuovo punto di vista da cui può considerarsi la superficie d'onda (Id. T. XC, 1880, p. 971). Egli osservò che quando un solido non è soggetto che a *cinque* o *quattro* condizioni ogni suo punto descrive una trajettoria lineare o superficiale, ma se invece le condizioni sono soltanto *tre*, ogni punto del solido è, *in generale* suscettibile di ∞^3 posizioni; tuttavia esiste una superficie luogo dei punti ad ognuno dei quali non compete che una superficie trajettoria; altre figure analoghe derivano dal considerare le rette ed i piani dello spazio. *Esempio*: le ∞^3 corde d'un ellissoide che sono viste sotto angolo retto dal centro della superficie, nonchè gli ∞^3 centri di esse, ammettono come superficie limite una superficie d'onda. Da ciò la seguente nuova generazione di questa: *se un angolo retto acb circoscritto ad un ellissoide è tale che il suo piano sia normale a questa superficie nei punti di contatto a, b dei suoi lati, il suo vertice c appartiene ad una superficie d'onda, di cui la normale ivi è*

Digitized by Google

la retta che congiunge c al centro del segmento a b. E' importante osservare che questa proposizione sussiste (Id. p. 1333) supponendo che i lati dell'angolo circoscritto siano tangenti, non allo stesso ellissoide, ma a due ellissoidi omofocali; essa può evidentemente anche enunciarsi come segue: *la superficie delle onde è il luogo dei centri dei coni quadrici circoscritti ad un ellissoide* (E) *e di cui una sezione principale* α *è* $= \frac{\pi}{2}$ Tale nuovo enunciato condusse il MANNHEIM a considerare (*Proc. R. Society of London* T. XII, 1881, p. 177) le superficie analoghe per cui α è ancora costante ma diverso da $\frac{\pi}{2}$ e ad osservare che la superficie d'onda, dedotta come si disse dall'ellissoide (E), è tagliata da un ellissoide omofocale a questa secondo una sua linea di curvatura, mentre un iperboloide omofocale ad (E) la sega, oltrechè in una linea di curvatura, in una curva sferica.

L'ultimo lavoro che il MANNHEIM dedicò alla superficie di cui ci occupiamo (*C. R.* T. CXXII, 1896, p. 768) ha per intento principale la dimostrazione di un teorema del NIVEN e la determinazione degli assi di una superficie d'onda di cui si conoscono i piani principali, un punto ed il relativo piano tangente. Non essendoci concesso di farne più di una fugace menzione chiuderemo questa parte della nostra analisi osservando come dagli studi di cui è parola il MANNHEIM sia stato indotto ad occuparsi (Ivi p. 1396) delle *superficie apsidali* e ad osservare che, per l'influenza di elementi eccezionali, non sempre, come ritenevasi, « se una superficie è apsidale d'un'altra, questa lo è della prima »; a lui risale dunque il merito di avere iniziato lo studio degli elementi singolari della trasformazione apsidale.

VI. *Geometria proiettiva.* Il MANNHEIM, educato in un ambiente tutto impregnato dalle idee di PONCELET e di CHASLES, non poteva escludere dalle proprie elucubrazioni le teorie che rampollano dal *Traité des propriétés projectives des figures* e dal *Traité de géométrie supérieure.* Prima di addentrarci nella disamina dei frutti di questo genere di studi, giova che rileviamo due cose; una è che alla Geometria superiore, moderna o projettiva che dir si voglia, appartengono in maggioranza le numerose questioni da lui proposte come esercizi nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques:* l'altra che sin dal 1865 egli ha (*Bull. Soc. phil.* 1864, p, 33) fatta ed applicata l'osservazione che « non si altera il risultato della risoluzione d'un problema, facendo variare gli elementi che non sono interessati nello sviluppo di tale soluzione », osservazione in cui può forse ravvisarsi una forma embrionale del *principio della conservazione del numero.*

a) *Coniche.* — Una delle più importanti questioni offerte dalla teoria delle curve di second'ordine è la costruzione, in direzione ed in lun-

Digitized by Google

ghezza, degli assi d'un'ellisse determinata da una coppia di diametri conjugati; si può dire che ad essa il MANNHEIM debba se il suo nome cominciò ad essere conosciuto dagli studiosi. Infatti nel tomo IX (1850) delle *Nouvelles Annales da Mathématiques* leggesi (p. 419): « Il Sig. MANNHEIM, allievo della Scuola politecnica, fa questa bella osservazione sopra un teorema noto: Quando due vertici A, B d'un triangolo $A\,B\,C$ di grandezza costante si muovono sopra due rette fisse Ox, Oy, il terzo vertice C descriverà un'ellisse col centro in O. Se si circoscrive un cerchio al triangolo $O\,A\,B$ e se ne unisce il centro ad O, dette E, F le intersezioni della congiungente con la periferia di quel cerchio, le rette OE, OF saranno le direzioni degli assi di quell'ellisse, mentre i segmenti OE, OF saranno le lunghezze dei suoi semiassi ». Si deve ritenere che il Nostro abbia continuato poi ad occuparsi di quella questione, giacchè, riordinando i materiali con cui comporre il suo *opus magnum* (v. più avanti), egli rinvenne fra le sue vecchie carte una costruzione semplicissima per gli assi d'un'ellisse determinata da una coppia di diametri conjugati (*Nouv. Ann.* II Ser. T. XVII, 1878, p. 529), da lui dedotta da una ben nota generazione cinematica dell'ellisse differente da quella surriferita, cioè considerando tale curva come trajettoria di un punto invariabilmente connesso ad un cerchio che muovesi toccando internamente un cerchio fisso di raggio doppio. Di questa nuova costruzione egli mise in luce la relazione con una scoperta da CHASLES e fece vedere, da un lato come essa conduca spontaneamente ai teoremi di APOLLONIO e dall'altro come ad essa si possa pervenire prendendo le mosse dalle più elementari proprietà delle coniche. Altre nuove costruzioni congeneri vennero dal Nostro dedotte (*The Mess. of Math.* T. XI, 1882, p. 175; *Nouv. Ann.* III Ser. T. VIII, 1885, p. 325) da altre genesi delle coniche.

Con ciò non abbiamo esaurito l'elenco dei lavori attestanti l'interesse del Nostro per le curve di second'ordine. Infatti a lui devesi un'elegante dimostrazione geometrica (*The Mess. of Math.* T. XII. 1883, p. 156) d'una proprietà focale segnalata da E. J. NANSON, la trasformazione di essa per polarità ed una dimostrazione analoga (Id. T. XXIV, 1895, p. 190) per un teorema di CAYLEY relativo al punto in cui un cerchio di curvatura dell'ellisse taglia nuovamente la curva.

Maggiore originalità ed importanza possiedono le ricerche da lui fatte sulla curvatura delle coniche; alcune (*Bull. Soc. math. de France* T. XVIII, 1890, p. 155; *The Mess. of Math.* T. XX, 1891, p. 45) guidarono a nuove costruzioni pel centro di curvatura in un punto d'una tale curva, supposta determinata dalla relativa tangente e da tre suoi punti. Costruzioni congeneri differenti da quelle ora citate, si apprendono da una delle ultime pubblicazioni (*Nouv. Ann.* IV Ser., T. VI, 1906, p. 228)

Digitized by Google

del nostro autore ed altre ancora in un'elegante memoria (Id. III Ser. T. XVI 1897, p. 249) consacrata alle applicazioni ed allo svolgimento di un nuovo elemento introdotto da M. D'OCAGNE nella teoria delle coniche. Tutti questi lavori, benchè modesti in apparenza, al pari dei precedenti, contengono osservazioni geniali e costruzioni di grande eleganza.

b) Quàdriche. — Mentre coi lavori testè discorsi il MANNHEIM prese posto nell'innumerevole schiera degli epigoni di APOLLONIO PERGEO, con quelli di cui ora ci proponiamo di dire qualche cosa egli ha conquistata una posizione eminente nel drappello, relativamente esiguo, di coloro che sforzaronsi di far raggiungere alla teoria delle quàdriche un grado di perfezione comparabile a quello da tempo conseguito dalla teoria delle coniche. Tale aspirazione sembraci palese in un lavoro *(Bull. des Sc. math.* T. II, 1871 p. 1251) ove egli, dopo di avere confermata la generabilità di qualunque curva di second'ordine col mezzo di due fasci di raggi fra loro projettivi, considera una quàdrica passante per sei punti A, B, C, P', P'', P'''. Se P ne è un altro punto arbitrario e si chiamano r, r', r'' i birapporti delle quaterne di piani projettanti dalle rette BC, CA, AB i punti P, P', P'', P''', avrà luogo una relazione della forma

$$Brr' + Crr'' + Dr'r'' + Er + Fr' + Gr'' = 0$$

(ove le sei costanti $B, C, \ldots, G$ sono legate da due relazioni), la quale viene dal MANNHEIM considerata per l'equazione di una quàdrica contenente i sei punti dati: imparzialità storica esige si avverta come l'utilità di essa non venne sino ad ora dimostrata nè dal Nostro, nè da altri.

Un decennio più tardi egli, dalle sue ricerche intorno alla superficie delle onde, fu condotto *(Proc. R. Soc. of London*, T. XXXIII, 1881, p. 177) alla ricerca del legame esistente fra i raggi principali di curvatura in un punto comune a tre quàdriche omofocali; servendosi poi di due semplicissime proposizioni di Geometria elementare ritrovò un noto teorema di LAMÈ e giunse a molti nuovi risultati; inoltre poi scoperse (*l. c.*, p. 421) molte notevoli proprietà, le quali sembrano destinate a formar parte di qualunque futura teoria completa delle quàdriche omofocali. Da altro scritto di poco posteriore *(Journ. de math.* III Ser T. VIII, 1882, p. 167) si apprende la soluzione geometrica della questione, già risolta analiticamente dal LAGUERRE, di *determinare in un punto qualunque d'una quàdrica gli assi della relativa indicatrice ed i centri principali di curvatura;* di essa il Nostro diede poi (Id. V Ser., T. II, 1896, p. 51)

Digitized by Google

una seconda soluzione più semplice ed elegante, anzi di semplicità che sembra ulteriormente irriducibile e di eleganza da giudicarsi insuperabile.

Citiamo di sfuggita una breve Nota (*The Mess. of Math.* T. XI, 1882, p. 175) che si direbbe un prodotto secondario degli studi del MANNHEIM sulle quàdriche omofocali e che non andrà trascurata da chi redigerà una completa bibliografia della strofoide; ed osserviamo piuttosto come a lui debbansi argomentazioni abbastanza semplici per determinare le condizioni affinchè le altezze d'un tetraedro giacciano sopra una quàdrica di rivoluzione (*Intermed.* T. II, 1895, p. 111) e per dimostrare geometricamente essere un'iperbola il meridiano della superficie generata dalla rotazione di una retta attorno ad altra che non l'incontra (Id. T. IX, 1902, p. 287).

Ad occuparsi delle superficie di second'ordine egli fu ricondotto da una memoria di P. ADAM, ove sono considerate coppie di ellissoidi le cui linee di curvatura si corrispondono con parallelismo dei loro piani tangenti; ora il MANNHEIM, col mezzo di considerazioni della massima semplicità, ha mostrato (*Bull. Soc. math. de France* T. XXIII, 1895 p. 1) che dette linee si corrispondono anche con parallelismo delle loro rette tangenti e che inoltre i piani delle sezioni circolari delle due superficie sono fra di loro paralleli; se, viceversa, quest'ultima circostanza si verifica, i due ellissoidi si trovano nella posizione considerata dall'ADAM.

Un'ultima osservazione ci resta da riferire. PONCELET ha asserito che, *se un quadrilatero è circoscritto ad una quàdrica, i punti di contatto de' suoi lati stanno in un piano.* Orbene il Nostro ha giustamente notato (Id. T. XXV, 1897, P. 78) che tale enunciato è troppo assoluto, esistendo altri quadrilateri circoscritti non soddisfacenti alla suindicata condizione. Ciò è in pieno accordo con le risultanze di anteriori scritti di G. BRUNO, H. G. ZEUTHEN ed A. VOSS di cui egli non ebbe certamente notizia; perciò l'originalità di tali indagini si limita al metodo usato, il quale consiste nella trasformazione della quàdrica considerata in una sfera e nella successiva applicazione di un'opportuna inversione.

VII. *Geometria descrittiva.* — Nell'ultima faccia dell'attività scientifica del MANNHEIM si rispecchia la sua azione come insegnante (*Nouv. Ann. de math.* III Ser. T. I, 1882, p. 385 e 433). Appunto nel corso delle sue lezioni gli venne fatto di osservare che nelle tavole di Geometria descrittiva sia, non solo possibile e lecito, ma anche utile, di prescindere dalla *posizione* della linea di terra e tener conto soltanto della sua *direzione*: così facendo, i relativi disegni acquistano in generalità senza perdere in esattezza o perspicuità. Per tradurre in atto tale concetto è indispensabile di avere a propria disposizione soluzioni dei problemi relativi a piani, le quali siano indipendenti dalle tracce dei piani stessi; siffatti nuovi procedimenti ven-

Digitized by Google

nero indicati dal Nostro. La bontà della suindicata tesi e la forza degli argomenti usati per stabilirla sono dimostrate da ciò che le idee del MANNHEIM vennero favorevolmente giudicate, non solo in Francia, ma anche nel Belgio, in Russia, in Portogallo; ed il fatto, che in nessuno dei nostri corsi universitari manchi un cenno della determinabilitá di un piano col mezzo di elementi diversi dalle tracce, prova che anche in Italia esse vennero accolte col meritato favore.

Della soppressione della linea di terra il MANNHEIM non ebbe occasione di fare menzione esplicita nel suo *Cours de géométrie descriptive de l'École polyt.* (Paris 1880 e 1886) scritto col duplice scopo di fungere come testo per le sue pubbliche lezioni e di diffondere i suoi metodi d'insegnamento al di fuori della cerchia dei suoi ascoltatori e che stabilì nel modo più saldo la sua fama di maestro capace di essere conciso e riuscire chiaro; non ebbe occasione di servirsene che per incidenza, perchè egli suppose (come aveva, non il diritto, ma il dovere di fare, data l'organizzazione della Scuola politecnica) i suoi scolari già familiari col metodo di MONGE. Mediante tale opera egli ha luminosamente dimostrato che i cultori della Geometria descrittiva possono fare sicuro assegnamento sulla Geometria cinematica come prezioso metodo per scoprire costruzioni convenientissime, come ausiliare agile e vigoroso; d'altronde le numerose citazioni sparse a larga mano in tutto il *Cours* fanno fede della vasta cultura, della solida erudizione del MANNHEIM, cose di cui forse taluno poteva essere tentato di dubitare considerando l'impronta personale e la rigorosa unità di tutta la sua produzione scientifica.

Un Autunno rimuneratore.

Il vasto campo coltivato dal MANNHEIM con geniale perseveranza si era mostrato tanto fecondo che, circa quarant'anni dopo di avere cominciato a dissodarlo, egli giudicò fosse giunto il momento di falciare la messe omai biondeggiante e trasformarla in vitale nutrimento per le generazioni venture.

Il progetto di erigere in un corpo di dottrina la Geometria cinematica aveva già lusingato il BOBILLIER, che avevalo a lungo accarezzato e poi abbandonato solo quando la gelida ala della morte lo aveva colpito. Il MANNHEIM stesso ne aveva misurata l'importanza sino dagli esordi della sua carriera e vi aveva dato un principio di attuazione col suo *Cours de Géométrie descriptive;* ora l'effettuazione di esso è rappresentato da un poderoso volume dal titolo *Principes et développements de Géométrie cinématique,* formata di tre parti ed un'Appendice e destinato a documentare i suoi diritti a venire considerato siccome il primo legislatore di una nuova e bella provincia di cui, in parte per merito suo, erasi arric-

Digitized by Google

chito il regno della Geometria; in esso trovansi coordinati o riassunti, talora anzi semplicemente riprodotti, i principali dei suoi lavori geometrici.

La I^a^ Parte concerne la Geometria del piano, con un cenno finale sulla Geometria sferica, la II^a^ la Geometria dello spazio, mentre nella III^a^ e nell'Appendice sono raccolte svariate applicazioni.

Un certo numero di aggiunte ai *Principes et développements* si leggono in alcuni brevi lavori, di cui va fatta sia pur rapida menzione.

Occupiamoci anzitutto di quelli contenenti ulteriori sviluppi ed applicazioni dei metodi suggeriti per la ricerca delle normali e dei centri di curvatura delle linee piane. In uno (*Journ. de math. spéciales*, 1896, p. 141) è risoluta geometricamente la seguente questione, proposta dal DUPORCQ: *Per un punto arbitrario di una curva C si conduca una retta r formante con una direzione assegnata un angolo eguale a quello fatto con quella direzione dalla corrispondente tangente di C; costruire il punto di contatto di r col proprio inviluppo.* In due altri (*Nouv. Ann.* IV Ser. T. II, 1902, p. 337 e 481) leggesi una trattazione cinematica esauriente delle proprietà delle *curve piane tali che le loro normali staccano da una retta fissa segmenti proporzionali agli archi descritti dai relativi punti d'incidenza.* In un quarto (Id. T. III, 1903, p. 13) ci basti segnalare la costruzione del *centro di curvatura dell'inviluppo di una retta che intercetta sopra una curva data un arco di lunghezza costante.*

Una terna di brevi Note (*C. R.* T. CXIX, 1894, p. 394; *Bull. Soc. math. France* T. XXIII, 1894; *The Mess. of. Math.* T. XXIV, 1895, p. 59) del MANNHEIM si riferisce al problema seguente: *dati sulla normale A in un punto a d'una superficie (S) i centri di curvatura della curva di contorno apparente di (S) relativi a tre direzioni differenti dai raggi visuali, determinare gli elementi principali di curvatura di (S) nel punto a.*

Alla Geometria infinitesimale, non delle superficie, ma delle curve sghembe, appartiene un lavoretto (*Bull. Soc. math. France* T. XXV, 1897, p. 4) la cui importanza non deve commisurarsi dalla mole, nel quale trovansi dimostrate geometricamente le formole di FRENET: se non erriamo, è questo il primo e ben riuscito tentativo per introdurre tali formole in una trattazione sintetica delle curve sghembe.

Per rendere completa l'enumerazione dei contributi del MANNHEIM alle varie branche della Geometria, fa mestieri che accenniamo, finendo, ad alcuni brevi scritti che, verso il tramonto della sua vita, egli dedicò alla Geometria elementare e che pubblicò in periodici francesi, in parte pseudonimi, indubbiamente perchè vi annetteva scarsa importanza: uno contiene una semplice dimostrazione della relazione approssimata

$$\pi + 0{,}0047 = \sqrt{2} + \sqrt{3};$$

Digitized by Google

un altro concerne la curva, composta di archi circolari fra loro raccordati, che gli architetti francesi chiamano *anse de panier*; mentre i rimanenti concernono la Geometria del triangolo e provano come anche il MANNHEIM siasi lasciato trascinare da una notissima corrente di idee.

Pax!

Il numero e l'importanza delle scoperte compiute dal MANNHEIM in tutta la geometria (1) ne diffusero la rinomanza in tutto il mondo scientifico. Sino dal 1872 l'Istituto di Francia conferivagli il premio PONCELET pel complesso delle sue pubblicazioni; più tardi un grande numero di sodalizi scientifici gareggiarono nel rendergli omaggio e sarebbe appunto questo il momento di enumerare tutte le Società ed Accademie che reputaronsi onorate chiamandolo nel proprio seno; ma ce ne asteniamo perchè, ove lo facessimo, ci parrebbe di recare un postumo oltraggio alla fiera modestia di chi, in qualunque occasione, si fregiò *esclusivamente* dei titoli a cui davagli diritto il suo posto nell'esercito francese (2) e la sua posizione nel pubblico insegnamento. Tuttavia, di uno speciale ricordo è meritevole la cerimonia senza precedenti fatta nell'Aula magna della Scuola politecnica il 14 dicembre 1901, quando egli, colpito dall'inesorabile legge sopra i limiti d'età, fu costretto a scendere dalla cattedra dalla quale aveva educato al sano geometrizzare *trentotto* generazioni di studenti, circa *novemila* discepoli, costituenti il fiore della gioventù francese (3).

Fu questa l'ultima gioja che la sorte concesse al valoroso geometra!

Crudelmente colpito dalla morte d'una figlia diletta, egli, al pari del poeta de *Les contemplations* in circostanze luttuosamente analoghe, non chiese più

> À la création immense
> Qu'un peu de silence et de paix.

Strappato a forza dalla sua cattedra, egli non abbandonò la ricerca scientifica, ma nell'ultima fase della propria esistenza si dedicò con mag-

---

(1) Giova qui notare che la sua capacità di maneggiare l'analisi è attestata dalle *Solutions of two Questions* (5492, 5544) da lui date per problemi proposti da HERMITE [Educational Times, Vol. XXIX (1878), pp. 76-79].

(2) Egli raggiunse il grado di colonnello e fu insignito della commenda della legione d'onore.

(3) Particolari su tale cerimonia si leggono nell'articolo: *Hommage rendu par l'École Polytéchnique a Monsieur le Colonel* MANNHEIM [Journal de l'École Polytechnique, II série, VII Cahier (1902), pp. 221-233]. Cfr. altresì: E. DUPORCQ, *Un hommage au Colonel* MANNHEIM [Nouvelles Annales de Mathématiques, IV série, t. II (1902), pp. 25-27].

Digitized by Google

giore impegno a quelle opere di carità,che non erano mai rimaste estranee al programma della sua attività; così, per un'altra ragione, un rimpianto unanime seguì la notizia della sua morte, avvenuta in Parigi l'11 Dicembre 1906: che se tale sentimento non ebbe clamorose manifestazioni pari alla profondità ed universalità di esso, gli è che per volere dell'estinto nessun discorso venne pronunciato sulla sua tomba.

La fiera modestia, di cui questo ultimo desiderio è nuova ed impressionante attestazione, non dev'essere scambiata come scarsa considerazione del MANNHEIM per l'opera propria; giacchè sarebbe agevole raccogliere dai suoi scritti molte frasi dimostranti come egli ne misurasse esattamente l'alta importanza, sia dal punto di vista del metodo (cioè come contributo alla geometria pura), sia come rappresentante un reale progresso nelle nostre cognizioni positive.

Tuttavia riguardo al primo aspetto della propria produzione, egli non avrà tardato a riconoscere, con amarezza e dolore, come, spento CHASLES, non gli riuscisse di galvanizzare il corpo che, concepito da EUCLIDE e ravvivato da PONCELET, sullo scorcio del secolo XIX sembrava affetto da paralisi progressiva. L'analisi, riconquistata una nuova volta l'egemonia, attraeva ed assorbiva le forze migliori, consigliando e sospingendo coloro che sentivansi sedotti dall'eterno fascino della geometria a coltivare la teoria degli enti algebrici, la cui creazione sarà perenne titolo di gloria per quest'ultimo trentennio, A tale mirabile movimento il MANNHEIM si mantenne totalmente estraneo; dei relativi scritti egli s'interessava in quanto servivano di eccitanti al proprio pensiero, soltanto in quanto avessero virtù di suggerirgli nuove questioni, a cui applicare i suoi metodi prediletti; ma essi mai ebbero la forza di allontanargli dalle labbra la coppa a cui (per usare una felice imagine di A. DE MUSSET) egli costantemente abbeveravasi. Ciò gl'impedì di fare sua propria l'opinione sempre più diffusa della necessità del rigore assoluto negli enunciati e nelle dimostrazioni delle proposizioni matematiche, gli fece lasciare nell'ombra le esatte determinazioni di segni nelle figure e di applicabilità dei teoremi e dei metodi, e gli vietò di prevenire le critiche di coloro che asseriscono essere tuttora *sub judice* qualunque proposizione la cui dimostrazione non sia in ogni sua parte inoppugnabile.

Ma se, lasciando in disparte le considerazioni di metodo, per loro natura temporanee, noi abbracciamo nel loro insieme la totalità delle questioni affrontate dal MANNHEIM, riconosceremo che, nel vasto oceano da lui solcato coraggiosamente in tutti i sensi, mai ebbe a patire l'onta d'un naufragio, sicchè l'orma da lui impressa sul cammino che guida alla verità è così vasta e profonda che il tempo non potrà cancellarla. Mentre se ci proponiamo di misurare la forza ed estensione degli strumenti che

Digitized by Google

egli seppe foggiare, perfezionare od usare ci sentiremo infiammati di ammirazione e di fede nel loro avvenire, ricordando che « il sentiero dei giusti è come la luce che spunta, la quale va vieppiù risplendendo finchè sia chiaro giorno ».

Alle pagine da lui scritte dovranno ricorrere, non soltanto il puro geometra, desideroso di apprendere soluzioni semplici ed eleganti e di toccare gli ultimi confini dell'odierno impero geometrico, ma indistintamente tutti coloro che agognano di conoscere completamente le qualità di forma che sono possedute dal nostro spazio. L'uno e gli altri non tarderanno così a riconoscere che egli per primo riuscì a piantare il vessillo vittorioso della scienza su molte vette dianzi contese, ricorrendo a veicoli che, se anche non possono giudicarsi di assoluta stabilità e completa sicurezza, sono del tipo di quelli che i pionieri della scienza sogliono usare con superba disinvoltura, per schiudere ai contemporanei regioni feconde, dianzi inaccessibili.

Madesimo — Issime, Luglio-Settembre 1907.

XXVII.

G. L. LAGRANGE NELLA VITA E NELLE OPERE

Dal primo dei volumi degli *Annali di matematica* dedicato alla memoria di Lagrange, III Ser. T. XXI, 1913.

> « Va d'un air simple à la vérité qu'il aime; la vérité lui sourit et quitte volontiers sa retraite pour se laisser produire au grand jour par un homme aussi modeste ».
>
> POINSOT.

Simpatie od avversioni personali, devozione di discepoli o gelosie di scuole, riconoscenza per benefici ricevuti o rancore per ripulse subíte, tutto congiura per ottenebrare le opinioni sopra grandi o piccoli uomini dei contemporanei o dei posteri immediati. Ma il giudizio pronunziato sopra i personaggi veramente rappresentativi, dopo un secolo dal giorno in cui scesero nella pace del sepolcro, dopo che si spensero quietamente persino gli ultimi echi delle passioni che si agitarono attorno ad essi, dopo che l'umanità nel suo incessante moto progressivo seppe distinguere e separare le scorie dal nobile metallo, si può considerare per definitivo. Tale deve, dunque, ritenersi quello che oggi viene pronunciato sopra il sommo Scienziato di cui ora l'universalità dei matematici, addo-

Digitized by Google

lorati e plaudenti, commemorano il primo centenario della deplorata dipartita.

Al coro di voci, concordemente laudative, che in impressionante armonia si sprigiona da questi volumi dei venerabili *Annali di Matematica*, parve opportuno dovesse aggiungersene una, per quanto modestissima, che compendiasse in rapidissima sintesi i mirabili frutti da lui raccolti negli svariati campi ai quali consacrò le solerti e geniali sue cure. Ma poichè l'esame dell'opera mal si scompagna dalla contemplazione dell'artefice, così si ritenne necessario di segnare anche le date dei pochi momenti in cui la trajettoria generalmente tanto regolare dell'esistenza del nostro grande compatriota presentò improvvisi mutamenti di direzione: il che parve tanto più consigliabile dal momento che le tre epoche, nelle quali la sua vita naturalmente si ripartisce, hanno un perfetto riscontro nella sua attività scientifica: periodo di intensa e fervida preparazione a Torino, periodo di massima produzione originale a Berlino, periodo di grande attività ufficiale e didattica a Parigi.

I. - A Torino.

1. — La famiglia LAGRANGE è oriunda dalla Turenna; ma verso la metà del secolo XVII si trapiantò in Italia, ove non tardò a porre salde radici. Il bisnonno del grande matematico, dopo avere raggiunto il grado di capitano nell'esercito francese, abbandonò il servizio di LUIGI XIV per venire alla corte di Savoja, ove ben presto seppe acquistare la piena fiducia del Duca CARLO EMANUELE II, il quale gli affidò missioni delicate e volle dare una solenne attestazione della stima che per lui professava concedendogli in moglie una parente di MICHELANGELO CONTI, colui che, sotto il nome d'INNOCENZO XIII, doveva occupare la cattedra di S. Pietro dal 1721 al 1724. Il favore di cui godeva il bisavolo continuò al nonno del sommo geometra (la cui moglie fu una contessa BORMIOLO di Vercelli); sta a provarlo il fatto che per lui venne creata la carica di Tesoriere della R. Intendenza delle Fabbriche e Fortificazioni, la quale rimase nella famiglia LAGRANGE sino al momento (1800) in cui venne abolita. Tale ufficio fu occupato anche dal padre del nostro scienziato, il quale ebbe per moglie TERESA GROS, unica figlia di un medico di Cambiano. Da questo matrimonio nacquero ben undici figli, di cui sopravvissero soltanto due: l'ultimo ed il primo, GIUSEPPE LUIGI, il quale vide la luce a Torino nel Quartiere di S. Agnese vicino alla Chiesa della Madonna degli Angioli (1), addì 25 gennajo 1736 (2).

---

(1) E' la casa attualmente contrassegnata col n. 29 in Via Lagrange.

(2) Cfr. una dichiarazione ufficiale fatta da LAGRANGE il 30 marzo 1795 e riprodotta

Digitized by Google

Alcune mal riuscite speculazioni finanziarie avendo distrutta la fortuna della famiglia LAGRANGE, il padre pensò di avviare il suo primogenito alla lucrosa professione di avvocato, progetto al quale questi si dichiarò favorevole in massima; se non che, avendo intrapreso lo studio della fisica e della geometria sotto la guida del P. BECCARIA e di F. REVELLI, ebbe ben presto la chiara visione della propria naturale vocazione e relegò in soffitta codici e pandette. Innamorato da principio della geometria, l'abbandonò ben presto per consacrarsi all'analisi, nella quale ravvisava maggior forza e più vasto campo d'applicabilità (1); e, senz'alcun ajuto, si pose in grado di intendere (a soli diciassette anni!) le opere di NEWTON, di LEIBNIZ, dei BERNOULLI e di EULERO, che con piena ragione erano allora considerate come le basi di qualsiasi istruzione matematica superiore. Siffatta lettura suscitò in lui tal folla di pensieri originali e straordinariamente fecondi che, contemplando nel suo insieme la sua produzione scientifica, vien fatto di ripetere con ALFREDO DE VIGNY: « Qu'est-ce qu'une grande vie? Une pensée de jeunesse réalisée par l'âge mûr ».

2. — La cronologia dei lavori di LAGRANGE è in massima parte mal sicura; chè, come è noto, gli atti accademici in cui essi vennero inseriti non rispecchiano fedelmente lo svolgersi degli avvenimenti; onde, mancando quei lavori, di regola, di una data indicante il giorno in cui venne completata la stesura, quando, come succede in generale, non si conosca la seduta accademica in cui ne fu data lettura, per determinarne il posto

---

a p. 286 del T. XIV delle *Oeuvres complètes de Lagrange publiées par les soins de* J. A. SERRET *et* G. DARBOUX (Paris, 1867-1892). D'altronde nel Registro degli Atti di nascita e battesimo della Parrocchia di S. Eusebio (detta di S. Filippo) a Torino si trova il seguente documento:

ATTO DI NASCITA E BATTESIMO.

« LAGRANGIA GIUSEPPE LODOVICO, figlio del signor Giuseppe Francesco Ludovico et Teresa Grosso, giugali Lagrangia, nato li venticinque gennajo dell'anno millesettecentotrentasei, fu battezzato il 30 gennajo seguente. Padrino fu il sig. Carlo Lagrangia, e Madrina l'Ill.ma Sig. Contessa Anna Caterina Rebuffi di Traves. — Firm. Padre Carlo Boscallis della Congregazione dell'Oratorio e Rettore della Parrocchia di S. Eusebio ».

Notiamo per incidenza che questo atto porge in certo modo una sanzione legale al costume di scrivere LAGRANGIA invece di LAGRANGE. Ma due circostanze vanno tenute presenti; e cioè che il tradurre i cognomi era abitudine corrente nel Sec. XVIII e che il sommo matematico non vi si attenne mai, neppure sottoscrivendo lettere scritte in italiano.

(1) Un fatto congenere è offerto dalla biografia di C. MÉRAY, il quale (come egli ebbe a scrivermi il 13 febbrajo 1899) cessò di occuparsi di geometria, tema de' suoi primi lavori, quando constatò l'impossibilità di determinare, per via puramente geometrica, il numero dei punti comuni a due sezioni coniche.

Digitized by Google

fa mestieri ricorrere ad indizi indiretti od anche a semplici congetture. Gli uni e le altre trovano spesso solida base nel carteggio scientifico che il Nostro tenne con gli scienziati del suo tempo, carteggio che, pur troppo, non ci venne integralmente conservato (1), ma del quale però fortunatamente possediamo elementi estesi ed oltre ogni dire preziosi.

Gli è appunto con tale mezzo, e precisamente servendosi delle lettere che egli scrisse al Conte di FAGNANO e ad EULERO, che si arriva a projettare qualche raggio di luce sopra gli inizi della sua vita scientifica. Si apprende così che in principio dell'estate dell'anno 1754 il diciottenne geometra era intento ad investigare le relazioni fra potenze e differenziali che dovevano dar materia alla sua prima pubblicazione scientifica [VII, 583] (2), condurlo alla sua prima scoperta e procurargli, poco dopo, una delusione amarissima, quando, cioè, egli si accorse di essere stato prevenuto in tale scoperta da LEIBNIZ (3). Ammesso per vero che questa dolorosa constatazione di fatto abbia prodotta in lui un'impressione talmente angosciosa da farlo cadere in deliquio ed indurlo a chiedersi melanconicamente se non fosse meglio abbandonare per sempre un campo di ricerche, ove gli sembrava non rimanesse che spigolare in campi mietuti da sommi predecessori (4), questo stato di scoraggiamento dovette essere di corta durata. Il giovane Anteo, dal suo contatto con la terra, trasse potenti stimoli e nuove forze ad operare; sta a dimostrarlo il fatto che sino dal 30 ottobre 1754 era in grado di partecipare al FAGNANO qualche nuovo risultato conseguito nella Teoria delle curve tautocrone (5), tèma che, come vedremo, egli continuò a coltivare, raccogliendone frutti di tale valore da destare l'ammirazione di alcuni e l'invidia di altri. Poco dopo egli si incamminò per la via che doveva condurlo al Calcolo delle variazioni (quello fra i suoi trovati che egli sopra ogni altro prediligeva) (6); stanno a provarlo due lettere entrambe dirette ad EULERO,

(1) Che la collezione di lettere di cui disponiamo non sia completa emerge, fra l'altro, da ciò che il carteggio con FAGNANO s'inizia con una risposta di questo (*Opere di Fagnano*, T. III, p. 179) e quello con EULERO con una lettera di LAGRANGE che evidentemente non inaugura il relativo epistolario (*Oeuvres de Lagrange*, T. XIV, p. 135).

(2) Simboli di questo tipo servono di richiamo ai volumi delle già citate *Oeuvres*.

(3) V. la lettera al FAGNANO del 14 agosto 1754 (*Opere del Marchese* G. C. DE' TOSCHI DI FAGNANO *pubblicate da* V. VOLTERRA, G. LORIA *e* D. GAMBIOLI, T. III, p. 189).

(4) Tale aneddoto è raccontato dall'ARAGO nella sua biografia di FRESNEL (*Oeuvres de F. Arago*, T. I. Paris, 1854, p. 119).

(5) *Opere di C. G. di Fagnano*, T. III, p. 202.

(6) In una lettera scritta a D'ALEMBERT il 20 novembre 1769 LAGRANGE, a proposito del calcolo delle variazioni, scriveva: « . . . la méthode dont je parle a été le premier fruit de mes études (n'ayant que dix-neuf ans lorsque je l'imaginai) et . . . je la regarde toujours comme ce que j'ai fait de mieux en Géométrie » [XIII, 154].

Digitized by Google

una delle quali (datata 12 agosto 1755) contiene l'applicazione della nuova procedura analitica ad una questione proposta dal grande geometra di Basilea (1), mentre nell'altra [XIV, 146] (del 20 novembre 1755) è esposta una soluzione del problema delle brachistocrone informata ai medesimi principii.

3. — Ora se quella lettera a stampa diretta al Conte di FAGNANO appare oggi ben piccola cosa in paragone alle opere che assicurarono poi a LAGRANGE una fama imperitura, al biografo essa si presenta come un avvenimento di notevole importanza per l'influenza che essa esercitò sullo svolgimento della carriera del nostro matematico: chè indubbiamente essa non fu estranea al conseguimento dell'unico pubblico ufficio che egli ricoprì in patria. Conferitogli con R. Decreto del 26 settembre 1755 (2), con lo stipendio annuo di scudi 250, venne annunciato da LAGRANGE a FAGNANO il 24 dicembre dello stesso anno con le seguenti parole: « Del resto non debbo tacerle l'impiego di fresco da S. M. conferitomi di Maestro nelle R. Scuole Matematiche d'Artiglieria, il che certamente, per essere io giovane di non ancora 20 anni, è stato da tutti ritenuto per una cosa meravigliosa » (3). L'istituto ove fu chiamato il nostro geometra è quello che, dopo parecchie radicali trasformazioni, divenne l'attuale R. Accademia Militare di Torino; che ivi, assai più facilmente che nella Università, Egli potesse esplicare le straordinarie sue doti di analista, emerge tenendo presenti le condizioni in cui questa allora versava (4);

---

(1) [XIV 138]; cfr. la risposta di EULERO in data 6 settembre 1755, ivi p. 144. Secondo un biografo del sommo matematico (VASSALLI-EANDI, *Notice abrégée de la vie et des écrits de Louis Lagrange*, nel T. XII delle *Miscellanee di Storia Italiana*), la scoperta sarebbe stata fatta da lui nella Chiesa di S. Francesco di Paola, ascoltando un concerto musicale.

(2) Questo atto di governo venne pubblicato da G. VACCA nell'articolo *Sui primi anni di Giuseppe Lagrange* (Bollettino di bibl. e storia delle sc. matem., T. IV, 1901 p. 2).

(3) *Opere di C. G. di Fagnano*, T. III, p. 207. In senso somigliante LAGRANGE si esprimeva scrivendo ad EULERO il 20 novembre 1755 [XIV, 147].

(4) L'Università di Torino non fu sede di fiorenti studi fisico-matematici prima del secolo XIX. Nota il VALLAURI (*Storia delle Università degli studi del Piemonte*, II ed., Torino, 1875, p. 413), parlando delle solerti cure date da re CARLO EMANUELE III a quell'istituto, che « sugli studi fisici e matematici sembra che non scendesse egual favore », forse perchè (stando almeno a quanto risulta dagli scarsi documenti sino ad ora pubblicati) non avevano alcun ben definito scopo pratico o sociale, come possedevano le discipline mediche, giuridiche e letterarie facenti parte del programma degli studi universitari. In principio del secolo XVIII si era fatto venire da Bologna, ove le matematiche erano in fiore, il CORAZZI; ma egli si dimostrò professore mediocre; alla sua morte (1726) una delle due cattedre di matematica rimase per parecchio tempo vacante, talchè quella disciplina restò tutta affidata ad un certo CARLO

Digitized by Google

che l'aspettazione del governo sardo non sia andata delusa è provato dal riassunto di un corso sopra i *Principii di Analisi sublime* tenuto dal giovane professore, di cui una copia esiste a Torino nella Biblioteca del DUCA DI GENOVA; su di esso ci sentiamo esonerati dall'estenderci essendone di pubblica ragione almeno il piano generale (1).

Tuttavia sembra che il posto ottenuto da LAGRANGE non lo appagasse che mediocremente, giacchè, pochi mesi dopo di averlo occupato, egli invocava (19 Maggio 1756) l'aiuto di EULERO per conseguirne uno migliore in Germania [XIV, 155]; ed il grande analista svizzero, nell'attesa di poter giovare al suo giovane amico, lo faceva nominare (2 settembre 1756) socio corrispondente dell'Accademia di Berlino (2), secondo taluni (3) in ricompensa di una memoria sopra il tanto controverso *principio della minima azione*, da lui presentata a quel sodalizio in appoggio alle vedute manifestate dal presidente MAUPERTUIS, mentre ferveva vivissima la famosa sua disputa con S. KÖNIG (4).

Altro avvenimento di capitale importanza nella vita del Nostro fu la fondazione in Torino nel 1757 di una Società scientifica privata, dovuta all'iniziativa del Conte GIUSEPPE ANGELO SALUZZO DI MENUSIGLIO, assiduo cultore degli studi chimici, validamente coadiuvato da LAGRANGE e dal medico GIOVANNI CIGNA, Società che doveva più tardi trasformarsi nell'attuale R. Accademia delle Scienze di Torino; essa, riunendo in un

---

TOMMASO BOCCA, individuo totalmente oscuro. Finalmente nel gennajo 1730 fu nominato professore di matematica il P. GIULIO ACCETTA, che, come dice il VALLAURI (op. cit., p. 413), fu « il primo che cominciasse a rialzare alquanto gli studi matematici in Piemonte »; la determinazione della posizione astronomica di Torino da lui compiuta gli fece ottenere una certa notorietà ed il grado di corrispondente dell'Accademia di Parigi, mentre il volume intitolato *Gli Elementi di Euclide a migliore e più chiara maniera ridotti* (Torino, 1753), pubblicati dopo la sua morte dal suo discepolo e successore FILIPPO REVELLI, gli assicurarono un posto, sia pur modesto, nella storia della matematica. Nell'anno 1755 le due cattedre di matematiche (che, in base agli statuti del 1737, erano stabilite nell'Università di Torino, con gli stipendi annui di L. 1200 l'una, di L. 2400 l'altra) erano occupate, quella di geometria dal REVELLI e quella di matematica da F. D. MICHELETTI, persona di cui si serbò memoria solo perchè fu membro dell'Accademia delle Scienze di Torino.

(1) V. l'articolo del VACCA precedentemente citato.

(2) [XIV, 159]. Cfr. anche una lettera scritta da LAGRANGE a FAGNANO il 4 ottobre 1756 (*Opere di C. G. di Fagnano*, T. III, p. 208).

(3) A. HARNACK, *Geschichte der k. Preuss. Akad. der Wissenschaften*, T. I (Berlin, 1900), p. 338.

(4) « Der jugendliche Lagrange gestaltete 1760, noch in Turin, das Princip so, dass es nach Jacobi's Ausspruch in seiner Händen die Mutter unser ganzen analytischen Mechanik ward ». E. DU BOIS REYMOND, *Maupertuis* (*Reden* II. Aufl., II. Bd., Leipzig, 1912, p. 462).

Digitized by Google

fascio tutti coloro che in Piemonte dedicavansi alle scienze positive, esercitò un'influenza oltre ogni dire benefica e che tuttora continua (1).

A far conoscere favorevolmente nel mondo matematico il novello corpo scientifico valsero in particolar modo le memorie che LAGRANGE inserì nei cinque volumi designati ordinariamente col nome di *Miscellanea Taurinensia;* memorie delle quali ci corre l'obbligo di indicare, sia pur succintamente, gli argomenti, le conclusioni, il valore (2), perchè complessivamente rappresentano, con sufficiente approssimazione, la produzione del primo periodo di vita scientifica del personaggio che ci occupa.

4. — Un gruppo di lavori giovanili di LAGRANGE concerne la teoria dei massimi e minimi. Il MACLAURIN nel suo celebre *Treatise on fluctions* (§§ 238 e 857) aveva esposte le condizioni di massimo o di minimo per le funzioni ad *una* variabile; all'estensione di tali criteri a funzioni con *parecchie* variabili il Nostro dedicò il suo primo contributo ai *Miscellanea Taurinensia* [I, 1], il quale (come egli stesso dichiara) è un preludio allo scritto [1,335] mediante cui egli, per soddisfare ad un voto formulato da EULERO (3), gettò le basi del Calcolo delle variazioni. In tale nuovo lavoro egli, per dimostrare la fecondità dei nuovi principii, oltre a confermare risultati anteriormente ottenuti sopra il problema delle brachistocrone, oltre al dimostrare per via analitica il teorema di CRAMER sul massimo dell'area dei poligoni piani rettilinei aventi lati assegnati, stabilì per primo l'equazione differenziale delle superficie d'area minima:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0, \text{ ove } p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Volgendosi poi alla dinamica diede un'ampia estensione ad un principio dovuto ad EULERO e ne fece applicazione a quei problemi concernenti il moto dei solidi e dei fluidi che allora destavano il più vivo e generale interesse.

I nuovi procedimenti analitici escogitati da LAGRANGE riscossero subito la più entusiastica approvazione da parte di EULERO, che ne fece

(1) Per più minuti particolari al riguardo si ricorra a T. VALLAURI, *Delle società letterarie del Piemonte* (Torino, 1844, p. 156-215) ed al documentatissimo volume commemorativo *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche 1783-1883* (Torino, 1883).

(2) Escluderemo soltanto un lavoro sopra l'Analisi indeterminata di secondo grado, perchè è assodato che appartiene al periodo « berlinese » della vita di LAGRANGE; per converso faremo qui cenno anche delle posteriori continuazioni che ebbero le ricerche iniziate durante l'epoca « torinese ».

(3) « Desideratur . . . methodus a resolutione geometrica et lineari libera ». Così sta scritto nell'art. 39 del Cap. II della fondamentale memoria *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Lausannae et Genevae, 1744).

Digitized by Google

ulteriori applicazioni e propose di costituire con essi una nuova branca dell'analisi sublime, da designarsi appunto col nome di « Calcolo delle variazioni » (1); per converso vennero aspramente, ma altrettanto infelicemente, combattuti dal FONTAINE (2) e furono, con palese mala fede, attribuiti a torto ad EULERO dai PP. LE SEUR e JAQUIER nei loro ben noti *Éléments du Calcul intégral* (Parma, 1768). Ciò costrinse LAGRANGE a scrivere un secondo lavoro [II, 37] per rivendicare a sè stesso la paternità del nuovo algoritmo, per invitare i competenti a paragonare questo ai procedimenti usati dal FONTAINE e per rispondere ad alcune obbiezioni mossegli dal BORDA (3); aggiungendo poi nuovi sviluppi dottrinali, egli assicurò importanza permanente ad un lavoro che, altrimenti, sarebbe stato annoverato, piuttosto che fra le memorie scientifiche, fra i documenti umani.

5. — Il calcolo delle variazioni rappresenta il più celebre e forse il più importante contributo, ma non l'unico, dato dal giovane LAGRANGE al calcolo integrale. Infatti nel Volume I dei *Miscellanea* si trova anzitutto una memoria [I, 23] destinata ad estendere alle equazioni lineari a differenze finite i metodi in uso per le analoghe equazioni differenziali; cosa importante in sè e per le applicazioni dall'autore fatte a svariate questioni della teoria delle probabilità. Notiamo che tale argomento egli abbandonò subito avendolo LAPLACE scelto come soggetto di importanti ricerche (v. i Volumi VI e VII dei *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie de Paris*), ma vi ritornò poi verso il 1775 con una memoria [IV, 151] che POISSON non esitò a proclamare « un des plus beaux ouvrages de Lagrange » (4) e nella quale la teoria delle serie ricorrenti e quella delle equazioni a differenze finite vengono ulteriormente perfezionate sì da renderle atte alla risoluzione di nuovi importanti problemi della teoria delle probabilità (5). In un punto, però, tali ricerche esigevano un complemento, come ebbe a rilevare G. F. MALFATTI (6), ed era di contemplare il caso in cui avesse radici eguali l'equazione $A_0 + A_1 a + \ldots + A_n a_n = 0$, dalla quale LAGRANGE fa dipendere lo studio della serie ricorrente determinata dalla relazione $A_0 y_x + A_1 y_{x+1} + \ldots + A_n$

---

(1) *Elementa calculi variationum* (Novi Comment. Acad. Sc. Petrop., T. X, 1764).

(2) V. la memoria intitolata *Addition à la méthode pour la solution des problèmes de maximis et minimis* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1767).

(3) *Sur la méthode de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou de minimum* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1767).

(4) *Comptes-rendus*, T. II, p. 396.

(5) Questa memoria si trova riassunta da TODHUNTER. *A history of the theory of probabilities* (Cambridge and Dublin, 1865), p. 313-320.

(6) Memorie della Società Italiana delle Scienze, T. III, 1786, p. 313-320.

Digitized by Google

$y_{x+n} = 0$; ora anche ciò venne fatto dal Nostro, anzi in parecchi modi, tutti soddisfacentissimi [V, 627].

6. — Nello stesso volume I dei *Miscellanea* si legge ancora una memoria [I, 471] contenente metodi nuovi per integrare alcune classi di equazioni differenziali suggerite dall'investigazione del movimento dei fluidi e sagaci osservazioni intorno alla famosa controversia sulla generalità della soluzione del problema delle corde vibranti espressa dalla nota formola

$$y = a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \beta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} + \cdots$$

Maggiore notorietà (e con pieno diritto) conseguì una terza memoria dedicata all'equazione differenziale ellittica [II, 5] nella quale LAGRANGE, partendo dall'analoga equazione relativa a funzioni circolari, arriva per una via piana e luminosa al notissimo risultato ottenuto da EULERO «potius divinando». Le considerazioni svolte dal nostro matematico non tardarono a divenir classiche e furono riprodotte nelle migliori trattazioni delle funzioni ellittiche, onde non è il caso di arrestarsi su di esse; meno note sono quelle in cui il grande geometra applicò lo stesso metodo ad altre classi di equazioni differenziali e che meriterebbero ulteriore studio, per trarne tutte le conseguenze di cui sembrano tuttora gravide.

7. — Di questioni analitiche collegate a ricerche fisico-matematiche trattano tre memorie di acustica teorica [I, 39] (1); esse contengono contributi importanti alla teoria delle corde vibranti, giacchè ivi «in mezzo ad una dovizia infinita di nuovi artifizi analitici sono gettate le basi di quei metodi che, ampliati poi e fecondati dal genio di Fourier, divennero uno dei più efficaci stromenti della moderna fisica matematica» (2).

Apprezzatissimo dai competenti in materia fu pure un lavoro sopra il moto di un punto attratto da due centri fissi [II, 67], ove LAGRANGE volle e seppe emanciparsi dall'ipotesi restrittiva, fatta dai predecessori, che il moto accadesse sempre in un piano passante per la retta congiungente i punti dati. Benchè egli abbia dovuto constatare poi con disappunto che EULERO aveva avuta prima la medesima idea, pure seppe trattare la questione con tanta generalità ed eleganza, che un secolo dopo

---

(1) Il lettore desideroso di più minuti particolari sopra quanto è ivi esposto ricorra ai §§ 10-12 della II Parte del grande Rapporto di H. BVRKHARDT sopra le *Entwickelungen nach oscillirenden Funktionen* inserito nel T. X del Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung.

(2) Parole di E. BELTRAMI: v. *Opere*, T. II, Milano. 1904, p. 464.

Digitized by Google

un altro scienziato di primo ordine giudicò non indegno di lui l'esporne la soluzione a vantaggio dei propri conterranei (1).

Sorvolando sopra una memoria [II, 125] intesa a dare qualche fondamento dottrinale al procedimento empirico della « rastremazione delle colonne », perchè alcuni errori materiali di calcolo infirmano i risultati stabiliti, nel chiudere questa rapida rassegna dei contributi dati dal Nostro alla prima serie delle Memorie accademiche torinesi (2) faremo cenno delle sue ricerche sull'uso della media aritmetica fra i risultati di parecchie osservazioni [II, 173], che conservano il loro valore, benchè recenti indagini storiche accuratissime abbiano posto in luce che sopra tale strada egli ebbe quale precursore T. SIMPSON (3); infatti tale scritto è giudicato come semplice, chiaro, decisivo in una questione oscura, spinosa, delicata (4), onde occupa una posizione cospicua nella preistoria della teoria dei minimi quadrati.

8. — L'invio a D'ALEMBERT del primo volume degli Atti della Società scientifica torinese servì a LAGRANGE a stabilire una nuova relazione che, trasformandosi rapidamente in salda amicizia, fu feconda di risultati della più vasta portata. Esaminati gli scritti contenuti in quel volume, il celebre enciclopedista francese, in data 27 settembre 1759, gli scriveva: « vous êtes destiné, si je ne me trompe, à jouer un grand rôle dans les Sciences et j'applaudis d'avance à vos succès » (5) e quattro anni dopo (1. ottobre 1763) confermava tale suo giudizio col parere di EULERO, scrivendo: « J'ai eu occasion de voir dans un voyage à Berlin M. Euler, qui fait de vous tout le cas que vous méritez, et qui vous regarde avec raison comme destiné à reculer loin les limites de la haute Géométrie » (6). Queste lusinghiere espressioni fecero sorgere in LAGRANGE il desiderio di conoscere di persona il suo illustre corrispondente, nonchè gli altri matematici di Parigi; l'occasione di soddisfarlo gli fu offerta dal trasferimento da Torino a Londra del marchese DOMENICO CARACCIOLI, ambasciatore del Re di Napoli. In sua compagnia egli lasciò nel novembre 1763 la capitale del Regno di Sardegna, per recarsi a Pa-

---

(1) A. CAYLEY, *On Lagrange solution of the problem of the two fixed centres* (Quart. Journ. of mathem., T. 2, 1858, oppure Collected Papers, T. III, p. 114 e segg.).

(2) Per brevità non ci arrestiamo sopra la *Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque* (Oeuvres, T. VII, p. 591-594) e la *Note sur la métaphysique du calcul infinitesimal* (Ivi, p. 597-599), non essendo che brevi commenti a lavori altrui.

(3) Si veggano i *Miscellaneous tracts* pubblicati nel 1757.

(4) Cfr. TODHUNTER, op. cit. p. 428.

(5) [XIII, p. 4].

(6) Ivi, p. 9.

Digitized by Google

rigi, ed ivi rimase sino al mese di maggio del seguente anno. Benchè tale soggiorno sia stato funestato da una non lieve malattia (1), esso lasciò nel Nostro i più lieti ricordi, per le festose accoglienze e le manifestazioni di stima di cui gli furono larghi, oltre che d'ALEMBERT, CLAIRAUT, CONDORCET, FONTAINE, NOLLET, MARIE ed altri scienziati.

Appunto in quest'epoca gli venne conferita dall'Accademia delle Scienze di Parigi la prima delle numerose distinzioni che doveva ottenere nel corso della Sua vita; alludiamo al premio concesso allo scritto sulla librazione della luna [VI, 5] presentato per rispondere alla seguente questione: « Si l'on peut expliquer par quelque raison physique pourquoi la Lune nous présente toujours à peu près la même face; et comment on peut déterminer par les observations et par la théorie si l'axe de cette Planète est sujet a quelque mouvement propre, semblable à celui qu'on connait dans l'axe de la Terre et qui produit la précession des equinoxes et la nutation ». Il lavoro, con cui egli tentò rispondere e che fu ritenuto meritevole di premio, non risolve, a dir vero, completamente la questione, ma rappresenta un primo passo in una direzione, muovendosi nella quale il grande matematico doveva, sedici anni più tardi (v. p. 320), giungere alla completa spiegazione del curioso fenomeno; esso poi possiede grande importanza storica, come quello che contiene la prima applicazione del Principio delle velocità virtuali.

Il successo conseguito da LAGRANGE in un arringo a cui la più celebre Accademia d'Europa aveva invitati tutti i dotti del mondo, produsse una grande, generale e ben giustificata impressione. Non soltanto LUIGI DUTENS nel preparare la sua ben nota edizione delle *Opere di Leibniz* volle accaparrarsi la collaborazione di LAGRANGE per quanto concerneva gli scritti matematici di quel grande (2), ma CARLO EMANUELE cominciò ad accorgersi che la sua corona conteneva una gemma preziosissima che egli dianzi non sospettava esistesse; onde egli ed i suoi ministri non risparmiarono lodi, incoraggiamenti, promesse al giovane geometra, senza però riuscire a concretare nulla che valesse a migliorarne le condizioni economiche e sociali (3).

9. — Una totale metamorfosi nell'esistenza del nostro eroe doveva accadere poco appresso per effetto di un avvenimento congenere succedu-

(1) V. una lettera di D'ALEMBERT pubblicata da CH. HENRY nel T. XIX (1886) del *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matem. et fis.*, pag. 131.

(2) V. la Prefazione generale posta in testa al T. I di J. G. H. LEIBNIZ, *Opera Omnia* (Genevae, 1768); cfr. la lettera di LAGRANGE a D'ALEMBERT del 26 gennajo 1765 [XIII, 31].

(3) Si veggano le lettere di LAGRANGE a D'ALEMBERT del 30 maggio e del 6 settembre 1765 [XIII, 31 e 43].

Digitized by Google

to ad EULERO. Questi era sino dal 1741 Direttore della Classe di matematica dell'Accademia (1) che, fondata a Berlino l'11 luglio 1700 dall'Elettore di Brandeburgo, per ispirazione e sotto la direzione di LEIBNIZ, dopo quarant'anni di torpido languore era stata richiamata a vita novella nel 1740, dopo l'avvento al trono del sovrano illuminato, che va nella storia sotto il nome di FEDERICO il GRANDE Questi, dopo avere riconosciuto che l'Accademia prussiana non poteva disimpegnare l'alto ufficio affidatole di promotrice del progresso nel campo scientifico e letterario, ove si giovasse esclusivamente delle forze intellettuali offerte dal nuovo Regno, decise di farle assumere un carattere internazionale, chiamando nel suo seno tutti i pensatori che fossero disposti a portarvi il contributo del proprio sapere e della propria esperienza. L'invito da lui rivolto fu tosto accettato dall'ALGAROTTI e dal MAUPERTUIS. Questi finchè visse fu presidente dell'Accademia; dopo la sua morte (27 luglio 1759) tale carica rimase apparentemente vacante, ma di fatto chi dirigeva i lavori accademici e suggeriva la scelta del personale era il D'ALEMBERT, la recondita ninfa Egeria del Grande sovrano. Ed è appunto per avere con amarezza riconosciuto che occupava nell'Accademia di Berlino una posizione subalterna, rispetto a quella di cui godeva un matematico a lui indiscutibilmente inferiore (2), che EULERO cedette alle reiterate sollecitazioni che gli venivano di continuo dalla Corte di Russia e decise di ritornare a Pietroburgo ad infondere nuova vita a quell'Accademia, divenuta anemica e clorotica dopo che egli l'aveva abbandonata.

Non appena D'ALEMBERT ebbe sentore di siffatta decisione chiese a LAGRANGE se fosse disposto a succedere al grande analista svizzero (3); ed avutane risposta affermativa (4), si affrettò a presentare la relativa proposta a FEDERICO II.

Nel frattempo l'Accademia di Parigi conferiva a LAGRANGE il premio per l'anno 1766, in seguito alla presentazione di una memoria sopra i movimenti dei satelliti di Giove [VI, 67] (5). Tale fatto produceva una nuova profonda impressione ed un'agitazione vivissima nella Corte di Sardegna; nuove promesse generiche vennero fatte da parte dei ministri del tempo (6); ma poichè esse non traducevansi in alcun progetto

(1) Per tutto quanto concerne questo istituto si vegga l'opera dell'HARNACK citata nella nota (3) a p. 298.

(2) V. la lettera di EULERO a LAGRANGE del 2 ottobre 1759 [XIV, 162].

(3) Lettera del 4 febbrajo 1766 [XIII, 53].

(4) Lettera del (?) marzo 1766 (ivi, p. 55). Cfr. la lettera di LAGRANGE ad EULERO del 19 aprile 1766 [XIV, 208]. Un suggerimento congenere fu dato da EULERO: v. la lettera di questo a LAGRANGE del 3 maggio 1766 [XIV, 208].

(5) Cfr. la lettera di D'ALEMBERT a LAGRANGE del 25 marzo 1766 [XIII, 57].

(6) Lettera di LAGRANGE a D'ALEMBERT del 5 aprile 1766 [id. p. 58].

Digitized by Google

concreto (1), LAGRANGE decise di accogliere l'invito di essere trasferito a Berlino, non appena D'ALEMBERT glielo rivolse in nome del Re di Prussia (2) (la posizione che gli veniva offerta era quella di Membro ordinario di quell'Accademia e di Direttore della classe di matematica, con lo stipendio annuo di scudi 1500) (3). In conformità di tale suo intendimento il nostro matematico presentò al proprio Re una domanda di congedo. Ogni sorta di mezzi fu posta in azione per fargliela ritirare (4), ma indarno; e quando il Re italiano ricevette dal Sovrano tedesco una pressante sollecitazione a non ostacolare più oltre l'esaudimento di quella domanda, LAGRANGE potè finalmente (5 luglio 1766) annunziare al suo protettore ed amico che ormai nulla si opponeva alla propria partenza da Torino (5). Ed infatti il 21 agosto seguente egli abbandonò la sua città natale, ove non doveva più ritornare; dopo un soggiorno di due settimane a Parigi, lo troviamo (20 settembre) a Londra, ospite del marchese CARACCIOLI; di là s'imbarcò per Amburgo diretto a Berlino, ove arrivò il 27 ottobre 1766 (6).

II. - A Berlino.

10. — Giunto alla sua destinazione LAGRANGE entrò subito in carica, tanto che addì 6 novembre 1766 pronunciò alcune parole inaugurali, che vennero religiosamente conservate [XIV, 316]. Cordialmente accolto dal

---

(1) Per giudicare conformemente a giustizia il contegno del governo sardo di fronte a LAGRANGE, bisogna tener presente che il periodo di giovinezza di questo coincide con quello che tenne dietro alla guerra per la successione d'Austria (1735-1749), nella quale il Piemonte ebbe una parte attiva e gloriosa; è un periodo di riordinamento e di riforme pacifiche, nel quale il Governo, per impellenti ragioni finanziarie, credette di restringere la propria azione a conservare piuttosto che a promuovere la cultura; tuttavia la fondazione delle Università di Cagliari e di Sassari (1764-1765) sta a provare che, nei limiti del possibile, esso agiva in conformità alle esigenze dei tempi.

(2) Lettera di D'ALEMBERT a LAGRANGE del 26 aprile 1766 [XIII, 61].

(3) HARNACK, *Geschichte*, T. I, p. 601. Si riferiscono al trasloco di LAGRANGE le lettere di FEDERICO II datate 29 marzo, 26 luglio e 12 agosto 1766 pubblicate nel T. XXIV (p. 312, 407 e 409) delle *Oeuvres de Frédéric*. Va eziandio rilevato a titolo di onore di LAGRANGE che egli avrebbe potuto occupare anche il posto di Presidente dell'Accademia, che D'ALEMBERT gli offerse due volte (v. le lettere del 23 maggio e del 16 giugno 1769 stampate in *Oeuvres de Lagrange* XIII, p. 71 e 135); ma lo rifiutò sempre per modestia (lettere a D'ALEMBERT del 4 giugno e del 15 luglio 1769, pubblicate ivi p. 72 e 142).

(4) Lettera di LAGRANGE a D'ALEMBERT del 10 maggio 1766 [XIII, p. 62].

(5) Ivi, p. 73.

(6) A Berlino LAGRANGE abitò sempre Unter den Linden in casa del Presidente GORNE (HARNACK, l. c., T. I, p. 481).

Digitized by Google

suo nuovo sovrano che ne ammirava l'instancabile fecondità (1), e felicitato da EULERO, che soltanto dolevasi di non averlo seco a Pietroburgo (2), egli non incontrò qualche difficoltà che nei suoi rapporti con CASTILLON, il quale vantava diritti di precedenza sul posto al quale era stata chiamato LAGRANGE (3). Ma ciò non valse a turbarne la serenità nè ad impedirgli di palesarsi, per assiduità e fertilità, degno successore di EULERO; giacchè nel ventennio che passò a Berlino potè, oltre che adempiere a tutte le gravi incombenze annesse agli uffici che occupava, leggere una memoria ogni mese, il che è tanto più degno di ammirazione quando si tenga conto della loro importanza e del fatto che lo stile di perfetta eleganza in cui sono scritte è il risultato di un lavoro di lima, nel quale egli era instancabile (4). Poco dopo il suo arrivo a Berlino, cioè nel 1767, si unì in matrimonio con una sua cugina, VITTORIA CONTI, da lui all'uopo chiamata a Berlino (5); tale unione, da cui non nacque alcun figlio, durò

(1) « Il calcule, calcule des courbes tant que vous en voudrez »; così scriveva FEDERICO II a D'ALEMBERT il 13 (23) gennaio 1782 (*Oeuvres de Frédéric*, T. XXIV, p. 212).

(2) Cfr. una lettera di EULERO a LAGRANGE del 9 gennajo 1767 [XIV, 212]. Più tardi (23 maggio 1775) egli scrivevagli: « Il est bien glorieux pour moi d'avoir pour successeur à Berlin le plus sublime géomètre de ce siècle, et il est certain que je n'aurais pu rendre à l'Académie un plus grand service qu'en prenant mon congé, et, à cet égard, je puis me vanter d'une grande supériorité sur vous, vu que vous ne lui saurez jamais rendre un tel service » [Ivi, p. 241].

(3) V. una lettera di D'ALEMBERT a LAGRANGE del 14 giugno 1771 e la risposta in data 12 luglio [XIII, p. 202 e 205]; inoltre due lettere del CASTILLON a D'ALEMBERT del 27 aprile 1768 e del 18 ottobre 1771 pubblicate da CH. HENRY (*Bull. di bibl. e storia delle sc. mat. e fis.*, T. XVIII, p. 549 e 552).

(4) Infatti in data 6 giugno egli scriveva a D'ALEMBERT: « . . . j'ai une mauvaise habitude, dont il m'est impossible de me défaire: c'est que je refais souvent mes Mémoires, même plusieurs fois, jusqu'à ce que j'en sois passablement content » [XIII, 132]. Altre notizie interessantissime relative al metodo di studio tenuto da LAGRANGE si trovano in un articolo (con la firma L. B. M. D. G.) di F. G. MAURICE (che ebbe col grande geometra lunga dimestichezza) dal titolo *Directions pour l'étude approfondie des mathématiques recueillies des entretiens de Lagrange* », inserito nel *Moniteur* del 26 febbrajo 1814. Tale articolo venne sostanzialmente riprodotto da C. A. BJERKNESS a pag. 174 del suo noto volume sopra *N. H. Abel* (Paris, 1885), come tolto dal *Giornale* di LINDENAU e BOHNENBERG, mentre nel T. I della *Zeitschrift für Astronomie und verwandten Wissenschaften* non si trova che un Elenco delle pubblicazioni del grande geometra; tale rettifica mi è possibile grazie al cortese aiuto datomi da G. ENESTRÖM (Stockholm) e V. MORTET (Parigi).

(5) Ricerche accuratissime fatte, dietro mia preghiera, dal dott. G. VALENTIN a Berlino per rintracciare l'atto di matrimonio di LAGRANGE non condussero ad alcun risultato. Altrettanto dicasi per quelle praticate allo stesso scopo negli archivi della R. Ambasciata d'Italia presso la Corte tedesca e nel R. Archivio di Stato di Torino; il che non deve stupire, perchè già il BIANCHI ha rilevato (nella sua pubblicazione sopra *Le materie politiche relative all'Estero negli Archivi di Stato del Piemonte*) che ivi mancano gli atti dell'ambasciata presso il re di Prussia dal 1731 al 1775.

Digitized by Google

sedici anni, essendo la moglie morta nel 1783 (1), dopo lunga e penosa malattia, durante la quale il sommo geometra si palesò medico intelligente ed infermiere infaticabile ed affettuosissimo.

11. — Forse a cagione dell'intenso ed indefesso lavoro LAGRANGE fu sempre di salute delicata, tanto che più volte gli fu tolto di partecipare ad importanti concorsi, da cui sentivasi attratto (2). Tuttavia in parecchie occasioni gli fu dato di scendere in lizza ed ottenere la vittoria. Così nel 1772 divideva con EULERO il premio (doppio) posto a concorso dall'Accademia di Parigi sopra la Teoria del movimento della Luna [VI, 229], mentre nel 1774 un altro ne otteneva sopra l'equazione secolare dello stesso pianeta (3): nell'intervallo di tempo interposto fra questi due trionfi l'Accademia delle Scienze di Parigi lo eleggeva (20 maggio 1773) « associé étranger » con 16 voti sopra 17 votanti [XIII, 238 e XIV, 268].

Più tardi fu eletto uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze [XIV, 267] e membro dell'Accademia Lucchese [Id. 305], fatti questi sufficienti a provare come l'Italia non abbia mai dimenticato il suo grande Figlio lontano; fatti a cui si possono, per analogia, avvicinare il progetto di aggregare LAGRANGE all'Accademia di Napoli (4) e quello per trasferirlo in Toscana [Id. 284]. Egli, dal canto suo, non lasciò sfuggire occasione alcuna per affermare la propria nazionalità e giovare ai propri connazionali. Così, avuta notizia che il nipote di GIAN DOMENICO CASSINI stava conquistando una posizione onorevole fra gli astronomi del proprio tempo, scriveva a D'ALEMBERT in data 15 ottobre 1772: « Je suis bien charmé de voir que M. Cassini soutienne déjà si dignement le beau nom qu'il porte; je prend d'autant plus de part à ses succès, que je le regarde en quelque façon comme mon compatriote, sa famille étant originaire des États du roi de Sardaigne, et je vous prie de lui faire, à ce titre, mes plus tendres compliments » [XIII, 250]. Così, quando il celebre violinista piemontese VIOTTI si recò da Berlino a Parigi, non mancò di rac-

(1) L'ultima delle lettere scritte da D'ALEMBERT a LAGRANGE, pochi giorni prima di morire (27 settembre 1783), è appunto per condolersi con l'amico per la perdita che egli aveva fatta [XIII, 377].

(2) Ciò è attestato da parecchi passi del carteggio con D'ALEMBERT [XIII, p. 131, 173, 300].

(3) Cfr. una lettera di D'ALEMBERT a MELANDERHJELM del 25 aprile 1774 pubblicata dall'HENRY (*Bull. di bibl. e storia, ecc.*, T. XVIII, 1885, p. 615); la memoria premiata leggesi in [VI, 335]; ivi si trova la più antica menzione del concetto di « potenziale ».

(4) Autore di tale progetto fu il marchese CARACCIOLI, divenuto da ambasciatore vicerè di Sicilia; le ragioni per le quali LAGRANGE non fu favorevole a questo disegno si desumono da una sua lettera al CARACCIOLI in data 13 ottobre 1781 [XIV, 281] comunicata da F. SCLOPIS alla R. Acc. di Torino il 28 gennajo 1872.

Digitized by Google

comandare a D'ALEMBERT questo « compatriote et très-habile musicien » [Id. 371]; e salutò con viva soddisfazione l'arrivo a Berlino dell'abate DENINA suo « compatriote et ami » [Id. 375]. Ed il carteggio, improntato a tanta cortesia, che egli tenne dal 1756 al 1782 con due matematici taliani a lui di molto inferiori (1) non si può spiegare che con i legami d'affetto che lo avvincevan sempre alla patria lontana.

La vita uniforme e tranquilla che menò LAGRANGE a Berlino non è contrassegnata da altri avvenimenti importanti che non siano le sue numerose scoperte; e noi ora ci volgiamo a riassumere, con la massima concisione conciliabile con la chiarezza, i più cospicui risultati da lui ottenuti, attenendoci all'ordine per materie, meglio che all'ordine cronologico, il quale è sempre poco significante e, nel caso attuale (v. p. 295), per di più, mal sicuro.

12. — *Teoria dei numeri.* In data 15 agosto 1768 il nostro matematico scriveva [XIII, 118] a D'ALEMBERT: « Je me suis occupé, ces jours passés, pour diversifier un peu mes études, de quelques problèmes d'Arithmétique, et je vous assure que j'y ai trouvé beaucoup plus de difficultés que je ne craignais. En voici un, par exemple, dont je ne suis venu à bout qu'avec beaucoup de peine: *Un nombre quelconque entier, positif et non carré étant donné, trouver un entier et carré* x^2 *tel que* $nx^2 + 1$, *soit un carré.* Ce problème est d'une grande importance dans la théorie des quantités quarrées qui font le principal objet de l'analyse de Diophante ». Le ricerche a cui si fa qui allusione si trovano esposte in un'estesa memoria datata da Berlino 20 settembre 1768 ed inserita nel T. IV dei *Miscellanea Taurinensia* [I, 671], scopo precipuo della quale è lo studio dell'equazione (impropriamente chiamata « equazione di Pell ») $ax^2 + 1 = y^2$. LAGRANGE dimostra che essa ammette infinite soluzioni ed insegna un procedimento per dedurre da una infinite altre; in particolare si occupa della soluzione minima $y = T$, $y = U$ e fa la fondamentale osservazione che la frazione T/U si trova fra le ridotte della frazione continua in cui si sviluppa $\sqrt{a}$, osservazione che servì a lui di punto di partenza per molte ricerche aventi per nocciolo le frazioni continue. Più tardi LAGRANGE notò che il metodo di risoluzione da lui suggerito per l'equazione di Pell è suscettibile

(1) Vedi *Dieci lettere inedite di G. L. Lagrange scritte al matematico veronese A. M. Lorgna* (Bullettino di bibliografia e storia, ecc., T. VI, 1873, p. 131-141); *Sette lettere inedite di G. L. Lagrange al P. Paolo Frisi tratte dagli autografi nella Biblioteca Ambrosiana di Milano e pubblicate per cura di* A. FAVARO (Atti della R. Acc. di Torino, T. XXXI, 1895).

Digitized by Google

di notevoli migliorie e ritornò, con maggiore ampiezza, sopra lo stesso argomento in altra voluminosa memoria [II, 378], letta all'Accademia di Berlino il 24 novembre 1768, nella quale egli affrontò il problema generale dell'analisi indeterminata di 2^0 grado, mettendo in luce il legame di essa con l'equazione di Pell e l'intervento delle frazioni continue nella ricerca delle sue soluzioni: fra i risultati speciali ivi conseguiti va rilevata la dimostrazione (che il WALLIS aveva cercata indarno) della risolubilità dell'equazione $a x^2 + 1 = y^2$, nel caso in cui l'intero a non sia un quadrato. Questo lavoro è tuttodì ritenuto uno dei più importanti di LAGRANGE, sicchè ancor oggi si deve ratificare il giudizio da lui stesso pronunciato scrivendo a d'ALEMBERT il 23 dicembre 1768 che riteneva di «n'avoir laissé presque rien à désirer sur le sujet des équations du second degré à deux inconnues» [XIII, 127]. Ciò non ostante, indotto a ripensare nuovamente sopra lo stesso tema in occasione di un preteso teorema ottenuto per induzione da EULERO, non solo [II, 655] ampliò il campo di applicabilità delle frazioni continue all'Analisi indeterminata di secondo grado, ma stabilì anche una proposizione concernente un limite per il numero delle radici di una congruenza numerica, la quale viene sempre considerata come fondamentale nella teoria delle congruenze di un grado superiore al secondo.

L'impronta di ammirabile generalità che possiedono questi scritti si ritrova in altre posteriori ricerche aritmetiche del Nostro [III, 695]; nelle quali egli parte dall'osservazione che, mentre l'equazione $A = Bt + Cu$ è sempre risolubile in numeri interi, purchè B e C siano primi relativi, altrettanto non può ripetersi riguardo all'analoga equazione $A = Bt^2 + Ctu + Du^2$; da tale diversità di comportamento egli dedusse una spiegazione plausibile di certi teoremi sopra la rappresentabilità di un numero col mezzo di una forma quadratica scoperti da FERMAT ed EULERO e fu indotto ad aggiungerne molti altri congeneri. Tali considerazioni costituiscono il primo capitolo della Teoria dell'equivalenza delle forme quadratiche, giacchè esse guidano a criteri di equivalenza ed a metodi di riduzione, onde LAGRANGE merita a buon diritto il grado di fondatore dell'odierna Teoria (aritmetica) delle forme binarie quadratiche. I metodi da lui inventati, esposti sotto forma più completa e metodica in alcune *Additions* alla versione francese (Lyon, 1774) dell'*Algebra* di EULERO (1) e più tardi dal LEGENDRE nella sua *Théorie des nombres,* si diffusero rapidamente in tutto il mondo e così raggiunsero

(1) E' questa la prima pubblicazione di carattere didattico che abbia fatta LAGRANGE.

Digitized by Google

una notorietà ed esercitarono un'influenza, alle quali l'Aritmetica superiore è debitrice di molti decisivi progressi.

A LAGRANGE la Teoria dei numeri deve ancora le prime dimostrazioni di due importantissime proposizioni. Una è quella, che FERMAT enunciò e che EULERO tentò indarno di stabilire, secondo cui « qualunque numero intero non quadrato può decomporsi in due, tre o quattro quadrati » [III, 189]. L'altra [III, 425] è di data più recente, essendo stata resa di pubblica ragione nel 1770; è il teorema di WILSON, secondo il quale « se n è un numero primo, $(n-1)! + 1$ è divisibile per n »; ivi sono anche posti in luce i legami fra detto teorema e il « piccolo » teorema di FERMAT. Chiunque conosce la parte importante che rappresentano queste due proposizioni nella teoria dei numeri e tiene presente quanto sia facile in tale disciplina il lasciarsi trascinare ad affermare l'incondizionata validità di proposizioni che sussistono invece soltanto in alcuni casi, riconoscerà senza stento che l'avere suggerite dimostrazioni conclusive per quei due teoremi costituisce per LAGRANGE una benemerenza per l' aritmetica non inferiore a quelle che già gli attribuimmo in altre occasioni.

Questo riassunto delle investigazioni numeriche del grande matematico torinese sarebbe incompleto ove non racchiudesse anche un cenno degli studi [IV, 367] da lui intrapresi sopra alcune equazioni indeterminate di un grado superiore al secondo (per esempio sull'equazione $x^4 + y^4 = z^2$), i quali toccano una regione matematica che ancor oggi si deve ritenere essere in massima parte una « terra incognita »; onde anche sul valore dei risultati raggiunti e sopra la potenza dei metodi usati da LAGRANGE il giudizio non può essere sino ad ora definitivo, epperò deve essere improntato a grande circospezione (1).

13. — *Algebra.* Non meno importanti dei lavori aritmetici di LAGRANGE sono quelli di cui ci apprestiamo a render conto, rilevando anticipatamente che le risultanze di essi raggiunsero rapidamente e tuttora fruiscono d'una immensa e ben meritata notorietà.

Nel più antico di tali lavori [II, 359] il Nostro ha offerto il primo

(1) A proposito delle ricerche aritmetiche del matematico di cui ci occupiamo, è interessante la seguente notizia data da E. LUCAS e cortesemente segnalatami da H. BROCARD: « Lagrange avait l'intention de publier une nouvelle édition de l'arithmétique du géomètre d'Alexandrie (Diophante) dans laquelle il se proposait surtout d'éclaircir les courtes remarques de Fermat et de restituer la plus grande partie des beaux théorèmes qui y sont répandus; mais cet ouvrage n'a point été terminé et l'analyse manuscrite des quatre premiers livres seulement est conservée à la bibliothèque de l'Institut » (*Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante*). L'esattezza di questa notizia venne da me controllata (1935).

Digitized by Google

esempio di sforzi intesi ad emanciparsi da considerazioni geometriche nello stabilire proposizioni puramente algebriche; il teorema (di ROLLE) da lui dimostrato, appunto senza ricorrere (come si era sempre fatto prima) al sussidio di curve, è quello che dice: «se due numeri, sostituiti nel primo membro d'un'equazione, dànno risultati di segni opposti, essi comprendono una radice dell'equazione proposta». Mentre questo contributo alla Teoria delle equazioni possiede unicamente un valore metodologico, l'applicazione alla separazione delle radici d'un'equazione algebrica dell'«equazione ai quadrati delle differenze» (già incidentalmente incontrata poco prima da E. WARING) e l'uso delle frazioni continue (ordinarie) nell'approssimazione delle radici stesse rappresentano due progressi veramente decisivi che il Nostro fece compiere alla risoluzione numerica delle equazioni (1); tanto più che ciò lo indusse a tracciare con mano sicura le prime linee della Teoria delle frazioni continue, prezioso strumento analitico di cui egli per primo pose in evidenza tutta la forza e la grande malleabilità. Continuando poi [II, 581] in tal genere di investigazioni, egli tentò di applicare l'equazione ai quadrati delle differenze alla ricerca delle condizioni di realtà delle radici delle equazioni di 3° e 4° grado e stabilì la periodicità delle frazioni continue in cui si sviluppano le radici di tutte le equazioni quadratiche. Da ciò egli fu portato a stabilire criterî per riconoscere se un'equazione algebrica a coefficienti razionali abbia o no fattori lineari o quadratici a coefficienti razionali ed anche ad estendere il concetto di frazione continua sì da abbracciare anche gli enti aritmetici del tipo $p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cdots}}$, dei quali egli mostrò l'utilità facendone qualche applicazione. A LAGRANGE si deve altresì [III, 141] il notissimo metodo per eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche basato sull'uso delle funzioni simmetriche delle radici; è un metodo repulsivo per l'enorme complicazione dei calcoli a cui conduce (inconveniente che l'inventore ha ben visto ed al quale ha tentato di rimediare), ma che, sopra i precedenti procedimenti congeneri suggeriti da EULERO, CRAMER e BÉZOUT, offre il vantaggio di porgere il risultante esente da fattori estranei.

Mentre tutte queste ricerche trovano applicazione esclusivamente ad equazioni algebriche, ad equazioni di specie qualunque mirano gli sforzi fatti da LAGRANGE per risolvere, mediante serie, tutte le equazioni nume-

(1) Per più minuti particolari rimandiamo a *A History of the Arithmetical Methods of Approximation to the Roots of Numerical Equations of one Unknown Quantity* di F. CAJORI (Colorado College Publications, Science Series, Vol. XII, 1910).

Digitized by Google

riche [III, 3]. L'idea madre di tali indagini non è del tutto nuova, perchè si ritrova in un lavoro anteriore del LAMBERT (*Acta Helvetica,* Vol. III, 1758), di cui il LAGRANGE non ebbe conoscenza (chè, altrimenti, non avrebbe mancato di ricordarlo, con la scrupolosa cura che egli ha sempre usata nell'assegnare a tutti il loro). Non va taciuto che gli sviluppi da lui stabiliti sono esclusivamente formali, mancando qualsiasi considerazione relativa alla convergenza delle serie ottenute; malgrado ciò egli ha saputo conseguire, movendosi in una regione cosparsa di pericoli ed insidie, un risultato di suprema eleganza e di indiscutibile valore: alludiamo alla serie, che reca appunto il nome di LAGRANGE, la quale serve a svolgere in serie una funzione qualsivoglia di una radice di un'equazione scritta sotto la forma $\alpha - x + \varphi(x) = 0$.

Non è il caso di esporre gli sviluppi poco conclusivi che ricamarono attorno alla serie di LAGRANGE i «combinatori» tedeschi, nè i dubbi che vennero sollevati intorno al significato ed al valore di essa, nè finalmente gli studi, intrapresi da F. CHIÒ e portati a buon termine da E. ROUCHÉ, per conferirvi la precisione che si esige in qualunque proposizione matematica. Ciò che va invece rilevato è che LAGRANGE si è affrettato [III, 113] ad illustrare l'algoritmo da lui inventato facendone applicazione ad un'importante equazione incontrata da KEPLERO nel corso di ricerche sul moto dei pianeti (cioè alla nota equazione $t = x - u \operatorname{sen} x$); in tal modo egli dimostrò come la serie da lui scoperta, purchè usata con le debite cautele, costituisca un prezioso e possente strumento analitico.

Influenza ancor più decisiva sull'evoluzione della matematica esercitò LAGRANGE con le famosissime *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [III, 205]. È noto che in questo lavoro egli fece uno studio comparativo profondo dei vari metodi sino allora proposti per risolvere le equazioni dei primi quattro gradi, nell'intento di scoprire le ragioni del loro successo e dell'insuccesso che li colpisce quando si tenti di applicarli ad equazioni di un grado più elevato; tali ragioni, com'è risaputo, risiedono nella possibilità di ridurre la risoluzione di un'equazione di 3^0 o 4^0 (ma non di una di 5^0) alla risoluzione di altra di grado inferiore (è l'equazione che LAGRANGE chiama *ridotta* e che oggi si chiama *risolvente*). A tali conseguenze il sommo geometra arrivò con uno studio delle funzioni algebriche razionali intere che si possono comporre col mezzo delle radici di una data equazione; così facendo egli schiuse ai posteri un campo sconfinato ed ubertosissimo ove ABEL e GALOIS raccolsero una straordinaria messe di bellissimi risultati (1). LAGRANGE ha preparati tutti i mate-

(1) Cfr. J. PIERPONT, *Early History of Galois' Theory of Equations* (Bull. of the Amer. matem. Society, T. IV, 1898, p. 332-340). Dalle considerazioni esposte nella

Digitized by Google

riali che furono poco dopo elaborati dal RUFFINI, il vero fondatore della Teoria delle sostituzioni; fra l'altro egli ha reso possibile di concepire e dimostrare il teorema dell'irresolubilità algebrica delle equazioni di un grado superiore al quarto. E tutto egli fece con tale semplicità di mezzi e lucidità di argomentazioni che le sue *Réflexions* a ragione vengono annoverate tra le produzioni classiche, costituenti la gloria dello spirito umano.

14. — *Applicazioni dell'algebra alla geometria ed alla meccanica.* Il quadro della produzione algebrica di LAGRANGE riuscirebbe incompleto ove non abbracciasse anche un gruppo di lavori nei quali il calcolo letterale viene applicato a svariate questioni, uscendone così di gran lunga raffinato: giova quindi farne qui cenno.

Fra tali scritti merita il posto d'onore quello [III, 661] in cui, sopra un esempio semplicissimo (quello offerto dal tetraedro e dalle figure collegate ad esso), egli insegna quale indirizzo fosse da darsi all'applicazione dell'analisi alla geometria: mentre prima di lui tutta la trattazione era indissolubilmente connessa all'incessante considerazione della figura, partiva dal presupposto di una scelta particolare degli assi di riferimento ed esigeva penose considerazioni di triangoli simili e di triangoli rettangoli (è in sostanza il metodo usato da APOLLONIO PERGEO rivestito di forma algebrica), LAGRANGE fece vedere come maggiore uniformità e sicurezza nel procedere si raggiungesse stabilendo formole generali da applicarsi in ogni caso, senza alcun bisogno di previamente fissare la posizione degli assi coordinati rispetto alla figura da studiare. È facile vedere che da tale geniale concetto trae origine tutta l'odierna Geometria analitica. Per raggiungere lo scopo che si era prefisso il Nostro ha premesso un buon numero di lemmi algebrici, i quali colpiscono anche oggi il lettore per la loro eleganza, ma la cui importanza si percepisce pienamente quando si osservi che esprimono, per determinanti del terz'ordine, alcune proposizioni fondamentali nella teoria di queste notevoli espressioni algebriche (1).

Un concetto analogo informa un'altra breve nota [IV, 335] contenente un metodo semplice ed elegante per risolvere il problema di «inscrivere in una circonferenza un triangolo i cui lati, prolungati se necessario, passino per tre punti dati», sul quale il CASTILLON aveva intrattenuta l'Accademia di Berlino (2) e che LAGRANGE ridusse alla risoluzione di

---

memoria in discorso LAGRANGE tentò più tardi [III, 479] di dedurre una dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche; ma lasciò a GAUSS la gloria di dire l'ultima parola sopra questa essenziale questione di principio.

(1) Cfr. TH. MUIR, *The Theory of Determinants in its historical order of developement*, T. I, 2 ed., (London 1906), p. 37-40.

(2) Cfr. anche una posteriore memoria di LAGRANGE [IV, 343].

Digitized by Google

un'equazione di 2° grado. Lo scopo che, in fondo, il nostro matematico volle raggiungere con questo modesto scritto è quello di mostrare che, anche in una questione di assoluta pertinenza della geometria, l'analisi era in grado di competere con la sua eterna rivale. E' il medesimo intento che egli si è proposto ne' suoi lavori sull'Attrazione degli ellissoidi [III, 619 e 651]; è questo un tèma di cui il MACLAURIN aveva data una trattazione (1) prettamente sintetica, che, come ebbe a dichiarare LAGRANGE, « peut se comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux »; tuttavia egli volle e seppe dimostrare che lo stesso problema « peut être résolu par ce moyen (l'Analyse) d'une manière, si non plus simple, du moins plus directe et plus générale que par la voie de la Synthèse; ce qui servira à détruire un des principaux arguments que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser et pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens ». Superfluo constatare che il fine propostosi è pienamente raggiunto, chè tutte le proposizioni di MACLAURIN vengono dedotte da LAGRANGE, con sorprendente spontaneità, da formole generali di perfetta simmetria; ma non è fuor di luogo rilevare come nel lavoro in questione si incontri un risultato analitico di importanza generale, cioè la formola che serve al cambiamento delle variabili negli integrali tripli. Più tardi [V, 645] egli ritornò sullo stesso soggetto, attenendosi alle medesime idee direttive, sospinto da nuove ricerche compiute da LAPLACE e LEGENDRE.

Nello stesso stile dei precedenti è scritta una memoria [IV, 559] ove il Nostro insegna parecchi metodi per stabilire il noto « teorema di LAMBERT » relativo alle sezioni coniche (2): non a torto il BERTRAND ebbe ad osservare argutamente che tali metodi sono elegantissimi e naturalissimi, *purchè* sia già nota la proposizione da dimostrare!

Pure ispirata da sentimenti che oggi direbbersi di « imperialismo analitico » è una memoria ov'è esposta una nuova soluzione del problema (già risoluto da EULERO e d'ALEMBERT) del moto di rotazione di un solido qualsiasi [III, 579]. Il nuovo procedimento riposa sopra alcune interessantissime trasformazioni algebriche, nelle quali si ravvisano, sia pure sotto forma embrionale, alcuni teoremi essenziali della Teoria dei determinanti (3); nel corso delle considerazioni esposte da LAGRANGE lo storico dell'algebra rileva poi la prima dimostrazione della realtà delle radici

(1) V. la memoria *De causa physica fluxus et refluxus maris*, premiata nel 1740 dall'Accademia di Parigi.

(2) V. la memoria *Sur une nouvelles propriété des sections coniques* (Mém. de l'Acad. de Berlin, 1776).

(3) MUIR l. c. p. 33-37.

Digitized by Google

dell'equazione secolare. Ben a ragione, dunque, il Nostro osserva nell'esordio della memoria in questione « que c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les mêmes questions et parvenir aux mêmes résultats par des voies différentes ».

Sempre il medesimo concetto, di conferire generalità e snellezza alle applicazioni del calcolo, ha ispirato a LAGRANGE un altro lavoro di squisita fattura [IV, 586], ove è trattata da un punto di vista elevato la determinazione delle evolute delle curve piane e delle trocoidi (« roulettes »); inoltre è per la prima volta insegnata quella trattazione generale dei contatti fra curve piane che, dopo esser stata introdotta in opere didattiche del Nostro, non tardò a divenire classica; finalmente alcune geniali considerazioni di pertinenza della geometria differenziale dello spazio schiudono una nuova regione in cui MONGE doveva poco dopo raccogliere tanti e così meritati allori.

15. — *Analisi infinitesimale.* Il prezioso intervento delle frazioni continue in questioni di Teoria dei numeri e di Algebra, che rilevammo in parecchi lavori di LAGRANGE, fece sorgere in questo grande geometra l'idea che esse potessero prestare utili servigi anche in questioni di Analisi e così aggiungersi ai più comuni processi infiniti (serie e prodotti). Che tale previsione sia conforme alla verità emerge da un lavoro (IV, 301) nel quale egli ha, in generale, fatto vedere come si potesse esprimere in frazione continua algebrica l'integrale di qualunque equazione differenziale ordinaria di 1.° ordine; in particolare, ha insegnati elegantissimi sviluppi del detto tipo per parecchie funzioni particolari notevoli, quali $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, e^x, tang x, ecc. I matematici posteriori non hanno giudicato opportuno di introdurre nei trattati di Analisi tali risultati, onde questi raggiunsero notorietà assai limitata e non ebbero seguito: con quanta ragione altri giudichi.

Altrettanto *non* può ripetersi riguardo ad una memoria (II, 253) che costituisce tuttora un eccellente preliminare alla Teoria degli integrali ellittici, dal momento che insegna in primo luogo la riduzione a forma normale di qualunque integrale del tipo $\int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4})\,dx$ (f essendo simbolo di funzione razionale) ed in secondo luogo un procedimento per svolgere in serie un tale integrale. Ivi inoltre fa il proprio ingresso la « media aritmetico-geometrica », s'incontrano notevoli sviluppi in serie per l'arco d'una conica a centro, e da ultimo viene mostrata l'utilità del seguente nuovo teorema di Calcolo integrale: « Se V e X) sono funzioni della variabile x mentre $A, A', A'', \ldots$, sono costanti e si

Digitized by Google

pone

$$V = \int \frac{X.dx}{1 - a\xi}$$

sarà :

$$\int (A + A'\xi + A''\xi^2 + \cdots)\, dx = A(V)_{a=0} + A'\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{a=0} + \frac{A''}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right)_{a=0} + \ldots$$

In altro scritto (III, 441) LAGRANGE ritornò, con spirito più maturo, sopra l'analogia fra le potenze e le derivate (o gli integrali), da lui avvertita esordendo nella sua carriera scientifica, cioè sul concetto centrale della lettera a stampa da lui diretta al CONTE DI FAGNANO. Ma è curioso il fatto che egli, mentre cita i lavori congeneri anteriori di LEIBNIZ e di GIOVANNI BERNOULLI, non fa menzione alcuna di quel suo saggio giovanile, quasi volesse sconfessarlo. Tale scritto è importante specialmente perchè contiene un lucidissimo cenno dell'idea di fondare tutta l'Analisi infinitesimale sopra la serie di TAYLOR, da usarsi per definire le funzioni e le loro derivate successive, ed anche perchè vi si trova per la prima volta l'estensione di quella serie a funzioni con quante si vogliano variabili. Benchè l'odierno lettore si sentirà mediocremente soddisfatto da sviluppi che, nell'assenza di qualunque considerazione intorno alla loro validità, debbono ritenersi puramente « formali », pure prima di condannarli, dichiarandoli privi di valore, gioverà tener presente che ivi LAPLACE trovò il fondamento e lo stimolo per le sue famose ricerche sopra le « funzioni generatrici », che tanto contribuirono alla sua fama e tanto giovarono al progresso della nostra scienza. Si aggiunga che l'analogia fra potenze e derivate venne più tardi sfruttata da LAGRANGE [V, 633] (1) per assicurare un solido fondamento ad un metodo d'interpolazione imaginato nel 1670 dall'astronomo G. MOUTON, il quale si arricchì in conseguenza di tali doti che oggi ancora è usato con profitto (2).

Influenza di gran lunga maggiore sull'evoluzione dell'Analisi esercitarono le profonde ricerche del Nostro sopra le equazioni a derivate parziali [III, 549; IV, 586; V, 543], chè dai risultati che esse diedero presero le mosse MONGE e JACOBI e, malgrado i perfezionamenti di sostanza e di forma che ricevettero nel corso del secolo passato, conservano tuttora un posto cospicuo in qualunque esposizione della materia. Riman-

(1) Notiamo che in un anteriore scritto [V, 517] il Nostro aveva esposta una notevole generalizzazione dell'algoritmo usato dal BRIGGS nella sua *Arithmetica logarithmica*; si veggano anche le osservazioni *Sur les interpolations* [VII, 534] di cui LAGRANGE intendeva fare applicazione a questioni astronomiche.

(2) Cfr. A. VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte des Trigonometrie*, T. II (Leipzig, 1905), p. 28 e *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, I, D. 3, n. 9.

Digitized by Google

dando a tali trattazioni metodiche il lettore desideroso di conoscere la dimostrazione di tale asserto, aggiungeremo che anche la teoria degli integrali singolari delle equazioni differenziali ordinarie di 1° ordine è debitrice a LAGRANGE del proprio assetto sino ad oggi riguardato come definitivo [IV, 5]; inoltre egli ha scoperto l'interpretazione geometrica come inviluppo dell'integrale singolare, ha introdotta la considerazione della derivata dell'integrale generale rispetto alla costante d'integrazione ed ha mosso il primo passo verso l'estensione di siffatte indagini ad equazioni di ordine superiore al 1.° o contenenti parecchie variabili.

Facendo semplice menzione di uno scritto destinato a risolvere una questione relativa alle Annualità [V, 613] — perchè questa era stata trattata prima, circa nello stesso modo, da A. DE MOIVRE (1) all'insaputa di LAGRANGE — chiuderemo questa sezione della nostra rassegna segnalando due scritti ove questioni di Astronomia e Geografia matematica vengono risolute col sussidio della pura Analisi.

Per costruire le tavole planetarie servendosi delle osservazioni, LAGRANGE [VI, 506] considera una serie il cui termine m-esimo è un polinomio della forma $A \operatorname{sen}(a + m\,a) + B \operatorname{sen}(b + m\,\beta) + \ldots$ e dimostra che è una serie ricorrente la cui «scala di relazione» non dipende che dagli angoli $a, \beta, \ldots$; da ciò è indotto a risolvere parecchi problemi di grande importanza per chi voglia applicare le serie ricorrenti allo studio di successioni di numeri, i quali siano legati fra loro da una legge ignota, ed a usare come ausiliari frazioni continue i cui termini sono funzioni di una variabile.

Indirizzo non meno elevato hanno le ricerche di LAGRANGE sopra la costruzione delle carte geografiche [IV, 637]. E' noto che la qualità, che possiede la projezione stereografica di una sfera, di far corrispondere circoli a circoli era nota sin dai tempi di CLAUDIO TOLOMEO, mentre la scoperta della prerogativa che essa possiede di conservare gli angoli è di data ben più recente (2); LAMBERT ED EULERO dimostrarono poi che la proprietà di essere isogonale è condivisa da tutte le rappresentazioni usate dai geografi. Ora LAGRANGE si è proposto il bel problema di determinare tutte le rappresentazioni conformi della superficie terrestre, tanto nel caso in cui la s'immagini sferica, quanto ove la si supponga un'ellissoide di rotazione. La soluzione che egli ne diede nulla lascia a

(1) V. la 3. ediz. (1750) del *Treatise of annuities of lives*.

(2) Però è ignoto chi per primo l'ha avvertita; il DELAMBRE (*Histoire de l'Astronomie au XVIII Siècle*, Paris, 1827, p. 88) ne trovò cenno, con una dimostrazione non perfetta, in *A complete system of astronomy* (London, 1728) di LEADBETTER.

Digitized by Google

desiderare per semplicità, generalità ed eleganza; è notevole per l'intervento in essa di funzioni di una variabile complessa e per avere schiusa a GAUSS la via che lo condusse alla rappresentazione conforme di una superficie qualunque. Nè va taciuto ivi il primo presentarsi della funzione $\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$, che tanta parte rappresentò in posteriori lavori specialmente di H. A. SCHWARZ, e l'enunciato di un grazioso problema di geometria elementare, che porse il destro a G. BELLAVITIS di fare una brillante applicazione del Calcolo delle equipollenze da lui inventato (1).

16. — *Meccanica e Fisica matematica.* La prima comunicazione che LAGRANGE fece all'Accademia di Berlino (4 marzo 1767) [II, 318] contiene un'ampia ed importante generalizzazione del Problema delle tautocrone, che HUYGENS aveva risoluto nell'ipotesi che il movimento accadesse nel vuoto, mentre GIOVANNI BERNOULLI ed EULERO avevano contemplato il caso più difficile in cui il moto succedesse in un mezzo che presentasse una resistenza proporzionale al quadrato della velocità. Il Nostro invece si propose e riuscì a determinare in generale quale è la forza necessaria a produrre il tautocronismo, solo supponendo che sia una funzione dello spazio e della velocità. Il FONTAINE, che erasi già prima occupato della stessa questione con discutibile successo, attaccò ingiustamente le ricerche di LAGRANGE; ciò costrinse il grande matematico ad una replica [III, 157], sul cui tono pacato e cortese dovrebbero modellarsi tutti gli scritti di polemica scientifica; ma ciò porse a lui anche l'occasione per esporre nuovi sviluppi dottrinali di grande importanza, perchè toccano questioni interessanti in egual grado l'Analisi e la Meccanica (2).

Mentre questi scritti fecero compiere un *sostanziale* progresso ad un bel capitolo della Teoria dei moti e delle forze, ve n'è un altro posteriore [IV, 401] (letto a Berlino il 2 ottobre 1777) il cui merito è piuttosto *formale*: esso concerne il « problema degli n corpi » ed ha come precipuo scopo di mostrare come le relative equazioni differenziali assumano, mediante la metodica introduzione della funzione

$$\Omega = \Sigma \frac{M M'}{\sqrt{x - x'^2 + y - y'^2 + z - z'^2}}$$

(ove M è la massa del punto di coordinate x, y, z, ecc.), una forma estremamente comoda, che permette di giungere con meravigliosa speditezza, non soltanto ai tre noti principii che governano sempre il moto del

(1) *Sposizione del metodo delle equipollenze*, n. 84 (Mem. della Soc. ital. delle Scienze, T. XX, II Parte, 1855).

(2) Per informazioni meno incomplete sulla storia di tale questione si ricorra alla monografia di C. OHRTMANN *Das Problem der Tautochronen* (Berlin 1872).

Digitized by Google

sistema, ma anche ad altre proposizioni più speciali, segnalate da D'ALEMBERT, valide soltanto in ipotesi più ristrette

In altro lavoro [V, 533] LAGRANGE si è occupato pure di un sistema di punti di date masse e date coordinate coll'intento di stabilire mediante semplici considerazioni le proprietà del suo centro di gravità. « Cette manière de déterminer le centre de gravité par les seules distances des corps entre eux » (osserva con pieno fondamento il sommo geometra) « est, je crois, nouvelle, et peut être utile dans quelque occasion »; ed infatti se ne trova oggi menzione in tutti i migliori trattati della materia.

All'Idrodinamica il Nostro dedicò due lavori: uno [II, 237] inteso a confermare, contro il sentimento di D'ALEMBERT, un risultato teorico conseguito da D. BERNOULLI e che sembrava smentito da certe esperienze del KRAFT; l'altro (letto a Berlino il 22 novembre 1781) [IV, 695] di molto maggior lena, avente lo scopo di far conoscere un metodo nuovo per gettare le basi dell'Idrodinamica teorica, con applicazioni al movimento dei fluidi omogenei pesanti, in vasi o canali di forma qualunque; è superfluo far conoscere per esteso l'essenza di questo metodo, chè esso conseguì grande notorietà dopochè entrò a far parte della *Mécanique analytique*.

Altre due memorie toccano l'Ottica: una [IV, 535] si riferisce alle lenti, teoria di cui si erano già occupati ottimamente CÔTES ed EULERO e sulla quale il Nostro sa fare nuove acute osservazioni; nell'altra [V, 701] è esposta una legge generale giudicata dall'autore (ignoriamo con quanta ragione) utile in Ottica quanto è in Meccanica il principio delle velocità virtuali.

All'elasticità si riferisce una memoria [III, 77] nella quale LAGRANGE investiga le condizioni di equilibrio di una verga elastica omogenea di cui un estremo è fisso; mentre all'Acustica ed alla propagazione delle onde in generale appartengono alcune rettifiche da lui suggerite per i *Principia* di NEWTON [V, 591].

Da ultimo, dalla teoria degli orologi gli fu ispirato un elegante lavoro [IV, 421] il quale prova quanto profondi siano stati gli studi da lui fatti anche sopra questa specialissima materia e come a lui fosse dato di far scaturire delle scintille percuotendo qualunque pietra.

17. — *Astronomia.* Di alcuni lavori astronomici di LAGRANGE già si tenne parola in via incidentale; nel mentre ci accingiamo a dare concisa notizia degli altri, giova premettere che essi abbracciano si può dire tutte le questioni teoriche e pratiche che s'incontrano nello studio del moto degli astri e che tali questioni sono sempre da lui trattate con grande elevatezza e generalità, sicchè l'esame accurato di tali lavori va calda-

Digitized by Google

mente raccomandato anche agli analisti puri, i quali vi incontreranno ad ogni pagina vedute originali, teoremi nuovi, algoritmi di suprema eleganza. Alcuni risultati ivi esposti godono di valore permanente, mentre altri appaiono oggi come tappe intermedie che l'Astronomia doveva incontrare per arrivare ai metodi di calcolo più sicuri e perfetti, che vennero elaborati nel corso del secolo scorso, a cominciare da LAPLACE e GAUSS fino a giungere a GYLDEN e POINCARÉ.

Scendendo a qualche più minuto particolare osserviamo che LAGRANGE ha dimostrato [IV, 255] che la non-sfericità dei corpi celesti non può produrre sensibili alterazioni nei loro movimenti; in altri termini egli diede della stabilità del sistema del mondo una dimostrazione più soddisfacente di quella immaginata da LAPLACE (1773) e che permise poi (1809) a POISSON di congegnarne altra al coperto da ogni obbiezione.

Al fondamentale problema della determinazione dell'orbita di una cometa col mezzo di opportune osservazioni egli ha consacrato non meno di quattro memorie [IV, 439 e 496, VII, 471 e 563], dalle quali emerge che in generale essa non si può far dipendere da un'equazione algebrica di un grado inferiore a sette; mentre lo studio delle perturbazioni che possono subire quei capricciosi corpi celesti per l'influenza di altri pianeti, fu da lui compiuta in un lavoro che l'Accademia di Parigi premiò nel 1778 [VI, 403]. Sopra la teoria della Librazione della luna — tèma di uno dei suoi primi lavori — egli è ritornato con notevole ampiezza [V, 122], applicandovi un metodo generale ed analitico da lui proposto per risolvere tutti i problemi di dinamica, cioè il principio di D'ALEMBERT espresso in formole col mezzo della legge delle velocità virtuali.

Altre assidue e non sterili ricerche il Nostro consacrò alle variazioni secolari [V, 125, 211 e 382 e VI, 431] e periodiche [V, 347 e 417] dei movimenti dei pianeti — in particolare all'equazione secolare della luna [V, 687] — ed altre ancora [IV, 111; VI, 635; VII, 517] alla determinazione del movimento dei nodi delle orbite planetarie, questione di grande utilità per chi voglia investigare la struttura presente e futura del mondo.

Meno vasto è il soggetto di uno scritto ove egli mostra come, mediante successive approssimazioni, si possano ottenere integrali sempre più esatti delle equazioni dei movimenti planetari [V, 493]. Notevole è anche un complemento [V, 563] da lui indicato per un passo dei *Principia*, notevole, non fosse altro, perchè dimostra come egli, benchè infaticabile campione dei metodi puramente analitici, era in grado di maneggiare con grande disinvoltura le considerazioni geometriche preferite da NEWTON.

In previsione del passaggio di Venere, annunziato per il 6 giugno

Digitized by Google

1769, egli lesse il 12 novembre 1767 all'Accademia di Berlino un'elaboratissima memoria [II, 335] per mostrare come tale fenomeno si potesse utilizzare onde determinare la parallasse del Sole, per insegnare come si dovesse condurre il calcolo relativo, finalmente per determinare quale fosse la località della Prussia dove il fenomeno potevasi osservare nelle condizioni più favorevoli.

Altri soggetti da lui studiati sono le rifrazioni astronomiche [III 515], l'applicazione del metodo delle proiezioni al calcolo delle eclissi [VII, 324], la determinazione di queste [VII, 416 e 513], la trasformazione di certe tavole astronomiche a doppia entrata in altre a semplice entrata [VII, 487], e le variazioni annue degli elementi orbitali dei pianeti [VII, 557]. Dovremmo segnalare eziandio un metodo da lui ideato per risolvere mediante serie alcuni problemi di Astronomia sferica [IV,275]; ma è forza riconoscere che questo lavoro, malgrado il titolo datogli da LAGRANGE, è di pretta trigonometria, dal momento che insegna a valutare certi elementi di un triangolo sferico rettangolo quando altri ne siano noti, osservazione che noi facciamo, non per togliere pregio allo scritto in questione, ma per assegnargli il posto che gli compete nella letteratura matematica.

Giunti al termine di questa vertiginosa rassegna dei lavori astronomici del Nostro, affrettiamoci a riconoscerne noi pei primi le manchevolezze, dovute in parte alla loro mole imponente ed in parte alla deficienza in chi scrive di una competenza speciale sull'argomento. A nostra parziale giustificazione milita il fatto, che neppure gli astronomi che si accinsero a narrare la storia della loro scienza osarono di pronunciare uno schietto giudizio sul valore del contributo dato da LAGRANGE alle nostre cognizioni sopra l'« essere » ed il « divenire » del creato; persino il DELAMBRE non dedicò a lui uno speciale capitolo della sua *Histoire de l'Astronomie au XIX siècle*, ma si limitò a qualche cenno (e non sempre favorevole) su alcune ricerche da lui compiute. Onde la determinazione del posto che spetta a LAGRANGE nella storia dell'Astronomia è, per quanto ci consta, un problema tuttora irresoluto, che auguriamo tenti qualche specialista in materia.

18. — La somma di lavoro compiuto e l'entità dei risultati conseguiti da LAGRANGE a Berlino è sorprendente (1); onde altrettanto sorprendente

(1) Ai dilettanti di statistica potrà forse interessare l'osservazione seguente: Le memorie di LAGRANGE occupano in totale 4678 pagine in 4°, della edizione delle sue *Oeuvres complètes*. Una classificazione (necessariamente grossolana) di queste pagine dà il seguente risultato: Analisi 714; Fisica matematica 553; Aritmetica 734; Meccanica 200; Probabilità 174; Astronomia 1650; Algebra 472; Geometria 93; Trigo-

Digitized by Google

è che egli, mentre alla sua mente si affollavano tanti grandi pensieri originali, potesse scrivere (in data 21 settembre 1781) queste scoraggiate parole: « D'ailleurs, je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne réponds pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'au moins qu'on ne découvre de nouveaux filons il faudra tôt ou tard l'abandonner. La Physique et la Chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile; aussi le goût du siècle parait-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n'est pas impossible que les places de Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités » (1).

In tali linee si trova la prima manifestazione a noi nota di uno stato d'animo, che in LAGRANGE andò col tempo sempre più accentuandosi (2) e finì per fargli prendere in uggia la piccola e grigia Berlino e desiderare una scena più vasta e movimentata, ove rappresentare una parte importante. La perdita della compagna della sua vita e la morte (17 agosto 1786) del sovrano che lo aveva chiamato al proprio fianco allentarono a poco a poco i legami che sino allora lo avevano avvinto al Regno di Prussia; tanto che MIRABEAU (allora ambasciatore a Berlino), sino dal 26 novembre 1786, spronava il Governo francese a tentare d'ottenerne il trasloco a Parigi, al quale attribuiva tale importanza da equipararlo ad una rivincita della sua patria sulle umiliazioni subìte in pa-

---

nometria 52. Non deve stupire se all'Astronomia spetti la parte del leone quando si tenga presente che il Direttore della Classe di Matematica dell'Accademia di Berlino doveva dirigere la compilazione delle *Effemeridi astronomiche* da essa pubblicate; d'altronde di questioni di Meccanica celeste il Nostro (come vedemmo) cominciò ad occuparsi sino da giovane e (come vedremo) s'interessò sino al termine della sua vita. Si noti anche che fra gli obblighi del Direttore della Classe matematica dell'Accademia di Berlino vi era pur quello di esaminare e dar parere intorno agli scritti presentati da estranei; ora nelle *Oeuvres complètes de Lagrange* si trovano (V, p. 713-718) due relazioni, una delle quali concerne la sterile fatica di un quadratore del cerchio, la quale deve considerarsi come un vero modello del genere.

(1) [XIII, 368]. D'ALEMBERT rispose con ragione e cortesia il 14 dicembre 1781: « Je ne sais pas si le nombre des géomètres diminuera bientôt, comme vous le croyez, mai il suffira pour l'avancement des sciences, qu'il y en ait un seul qui vous ressemble » [Ivi, 371].

(2) Infatti il 3 luglio 1784 scriveva all'ab. CALUSO: « Je deviens de jour en jour plus difficile sur les miens (travaux), et au lieu d'augmenter le nombre de mes mémoires imprimés, je desirerois fort de pouvoir en supprimer une partie, ou du moins la réduire en peu de pages» (G. PITTARELLI, *Due lettere inedite di Lagrange all'abate Caluso esistenti nell'Archivio storico municipale di Asti*; Atti del IV Congresso intern. dei Matematici, 1908, T. III, p. 556).

Digitized by Google

recchi campi di battaglia (1). A tale passo il grande oratore si decise probabilmente previo consenso del principale interessato, propenso a stabilirsi in una città ove stava per iniziarsi la stampa della *Mécanique analytique*, opera di cui l'Accademia di Parigi aveva accettato il patronato (2). Malgrado gli sforzi del Re di Prussia (3), le pratiche relative non tardarono a condurre al risultato voluto (4), giacchè sino dal 20 febbrajo 1787 LAGRANGE veniva nuovamente iscritto fra i soci corrispondenti dell'Accademia di Berlino e declinava un'offerta vantaggiosa ed onorevole fattagli da suo padre in nome del Governo sardo, giustificando tale attitudine con gl'impegni precedentemente assunti con LUIGI XVI (5). Mentre questi gli conferiva il titolo di « pensionnaire vétéran » dell'Accademia delle Scienze con l'annua pensione di 6000 franchi e lo alloggiava al Louvre (6), il re di Prussia, per assicurare la continuità della sua collaborazione alle *Memorie dell'Accademia di Berlino*, s'impegnava di sborsargli annualmenta 300 talleri: sicchè egli riuscì a risolvere anche l'arduo problema di mantenere ad un tempo ottimi rapporti con due corti tradizionalmente nemiche (7).

III. - A Parigi.

19. — Accoglienze oneste e liete vennero fatte a LAGRANGE quando giunse a Parigi, non soltanto da parte di LUIGI XVI e di MARIA ANTONIETTA, ma anche da tutti gli scienziati colà residenti.

Primo avvenimento degno di nota che lo concerne, succeduto nella capitale della Francia, è la pubblicazione (1788) della prima edizione della *Mécanique analytique* (8), una delle opere più eminenti della letteratura matematica, la più eccelsa, a giudizio di taluno, fra quelle che recano la firma del grande geometra. I concetti a cui egli s'inspirò nello scri-

---

(1) HARNACK, *Geschichte* citata T. I, p. 505.

(2) La cura della stampa era stata assunta dal LEGENDRE e dal MARIE, che si erano anche fatti mallevadori presso l'editore riguardo alle spese relative.

(3) Cfr. un brano di lettera scritta dal LANDRIANI e riferita a p. 130 del T. VI (1873) del *Bullettino di bibl. e storia ecc.*

(4) Tutti i documenti relativi al passaggio di LAGRANGE da Berlino a Parigi furono pubblicati dall'HARNACK, *Geschichte* citata, T. II, p. 314-321.

(5) Cfr. A. GENOCCHI a pag. 93 del già citato volume *Il primo secolo della R. Accademia delle scienze di Torino*.

(6) A partire dal 1788 la sua abitazione fu in Rue Fromentan n. 4, Section du Museum [XIV, 286].

(7) Il fatto che nell'Accademia di Berlino non venne mai pronunciato alcun elogio di LAGRANGE, farebbe credere che non gli sia mai stato perdonato di avere varcato il Reno.

(8) Copie di essa furono spedite all'abate CALUSO il 28 aprile 1788.

Digitized by Google

verla sono gli stessi che segnalammo in gran numero di suoi lavori anteriori: tali concetti egli espose con la consueta chiarezza nella Prefazione, di cui giova qui riferire i passi più salienti:

« On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations necessaires pour la solution de chaque problème... Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité: il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrant la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue... On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques, ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme ».

Emerge da queste frasi che l'opera di LAGRANGE è essenzialmente e rigorosamente metodica; essa ha per cardini il Principio delle velocità virtuali (1) ed il Principio di D'ALEMBERT ed insegna come, applicandoli quasi automaticamente, si possano risolvere tutti i problemi concernenti l'equilibrio ed il moto di punti, di solidi e di fluidi. Essa possiede, a somiglianza degli scritti di ARCHIMEDE, il carattere proprio e distintivo della filosofia naturale di PLATONE, che è quello di astrarre, per quanto sia possibile, dalle proprietà fisiche dei corpi, per trattenersi a contemplarne i caratteri matematici. E' la fisonomia che la Meccanica ha conservato durante tutto il corso del secolo XIX e di cui soltanto ora accenna a spogliarsi. Ma almeno sino a che non sia instaurato il regno della Meccanica fisica, l'opera di LAGRANGE, come fece cadere nell'oblio tutte quelle anteriori, servirà sempre di guida agli studiosi di Meccanica, presa questa parola nel suo significato più ampio e comprensivo.

Quando, un ventennio più tardi, si manifestò la necessità di una nuova edizione della sua grande opera, il grande Geometra, pur mantenendo intatti il piano ed i concetti direttivi, moltiplicò le applicazioni della procedura di cui è l'inventore; sicchè, ove gli fosse stato concesso di darvi l'ultima mano, avrebbe offerto ai matematici un compendio ben coordinato di tutti i suoi lavori di Meccanica (non esclusi quelli relativi alla Meccanica celeste).

---

(1) Però la prima dimostrazione completa di questo principio si trova nella *Théorie des fonctions analytiques*; cfr. anche la nota (che risale al 1798) *Sur le principe des vitesses virtuelles* [VII, 371].

Digitized by Google

Ma poichè il vol. II uscì dopo la sua morte (1) (il vol. I porta la data 1811), l'opera presenta imperfezioni e lacune, che G. BERTRAND e G. DARBOUX riuscirono a togliere, riducendolo così ad essere un libro che si può porre nelle mani di qualunque principiante, senza tema che questo sia traviato. La *Mécanique analytique* porta il n. 1 nel Catalogo delle opere costituenti oggi la biblioteca di qualunque investigatore dell'indicata materia; e, grazie alle esaurienti considerazioni storiche e dottrinali che contiene sopra i lavori congeneri di più antica data, può fungere da ottima guida anche per coloro che intendono seguire l'evoluzione storica delle idee di moto e forza o che almeno s'interessano a conoscerne le varie fasi di sviluppo.

Aggiungiamo che gli è nel rielaborare il materiale dell'opera testé discorsa che l'immortale scienziato fu condotto all'ultima grande scoperta a cui è legato il suo nome, cioè alla Teoria della variazione delle costanti arbitrarie (2) ed alla sua applicazione alla meccanica celeste [VI, 713, 771 e 804].

20. — Fu forse l'esaurimento prodotto dall'immane sforzo che costò il comporre la *Mécanique analytique,* oppure il brusco passaggio dall'imperturbabile tranquillità berlinese alla baraonda parigina (3) che produssero in LAGRANGE quel lungo periodo di inerzia, durante il quale egli provava un'invincibile avversione per formole e calcoli? Altri risponda; a noi basti notare che tale condizione fu talmente acuta che, a quanto si narra, egli lasciò per molti mesi il suo immortale volume chiuso ed intonso sopra il proprio tavolo, ed invece si interessò alle esperienze con cui LAVOISIER stava allora creando una nuova scienza naturale, la Chimica.

Nè va taciuto che la violenta instaurazione del nuovo regime politico in Francia destava in lui non a torto assai gravi apprensioni ecomiche, che mantennero desta e viva ne' suoi amici prussiani la speranza

---

(1) Per cura di PRONY, GARNIER e BINET.

(2) « Lagrange's theory of the variation of the arbitrary costants, a theory perfectly complete in itself». A. CAYLEY, *The collected Papers*, T. III, p. 200.

(3) In data 19 maggio 1789 il MÉRIAN scriveva al ministro HERTZENBERGER che LAGRANGE, non soltanto non aveva potuto occuparsi di nulla dacchè era a Parigi, ma che aveva corso rischio di perdere la vita in un tumulto, ove erasi casualmente trovato (A. HARNACK, l. c., T. II, 319; v. anche p. 321 una lettera di LAGRANGE in data 14 aprile 1791). Inoltre in una lettera scritta da LAGRANGE all'abate CALUSO il 28 aprile 1788 e pubblicata dal PITTARELLI (v. lo scritto citato a p. 322) si legge ciò che segue; « J'ai presque pris congé de la Géométrie en quittant Berlin et le cercle des distractions au milieu duquel je vis ici est peu propre à ranimer mon ancienne passion pour cette science ».

Digitized by Google

di riaverlo a Berlino. Ma la Francia repubblicana, ben comprendendo tutto il disdoro che sarebbe ad essa ridondato dal comportarsi diversamente dal regime precedente, gli confermò la pensione assegnatagli dal « ci-devant roi » [XIV, 284]; inoltre [Id., 314], dietro proposta di LAVOISIER, fece a suo favore un'eccezione al decreto del 16 ottobre 1793, con cui venivano espulsi dalla Francia tutti gli stranieri ivi residenti (1), incaricandolo di eseguire calcoli ed esperienze sopra il moto dei projettili (2).

Soppressa l'Accademia delle Scienze, fu creato per lui il posto di Amministratore della « Monnaie » (zecca) (3). Egli poi fu nominato membro del Magistrato incaricato di proporre le ricompense per le invenzioni di pubblica utilità. In qualità di membro o di presidente partecipò attivamente ai lavori di tutte le commissioni che, nel decennio 1790-1799, lavorarono a preparare il nuovo sistema di pesi e misure (4), atteggiandosi in ogni occasione a strenuo fautore del numero 10. Il Bureau des Longitudes lo volle nel proprio seno ed egli si mostrò degno di tale nuova distinzione intervenendo alle sue adunanze e contribuendo alla *Connaissance des temps* con due lavori, uno dei quali ha il modesto scopo di esporre i fondamenti teorici di uno strumento utile agli astronomi [VII, 377], mentre l'altro insegna un'ipotesi cosmologica atta a completare quella che porta il nome di LAPLACE [VII, 381] (5).

Tutto questo sta a provare come anche a Parigi egli abbia finito per procurarsi le condizioni di vita necessarie ad un pensatore; ciò è confermato dalle seguenti frasi che si leggono in una lettera da lui scritta il 24 ottobre 1791:

---

(1) A tale deliberazione fu probabilmente non estraneo il fatto che un nuovo vincolo avvinceva LAGRANGE alla Francia, avendo egli sposata (31 maggio 1792) una delle figlie dell'astronomo LEMONNIER. Ricerche fatte per mio incarico negli Archivi della Prefettura della Senna hanno portato alla conclusione che l'Atto di tale matrimonio non esiste più; la data surriferita venne desunta dal prezioso opuscolo di VIREY et POTEL, *Précis historique sur la vie et la morte de Joseph-Louis Lagrange* (Paris, 1813) che mi fu dato di esaminare grazie ai buoni uffici dell'illustre Decano della Sorbona, P. APPELL, al quale è per me un grato dovere l'esprimere qui la mia riconoscenza.

(2) Frutto di tali studi è la postuma nota: *Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de Lagrange* par M. POISSON [VII, 603].

(3) Da questa funzione puramente amministrativa il Nostro ebbe lo stimolo a scrivere quell'*Essai d'arithmétique politique sur les premiers besoins de la République* [VII, 571] che gli accorda un posto anche nella storia dell'Economia politica.

(4) Cfr. G. BIGOURDAN, *Le système métrique de poids et mesures* (Paris, 1901).

(5) Chi desidera conoscere come sia stata giudicata l'ipotesi di LAGRANGE ricorra alla dotta memoria di O. ZANOTTI-BIANCO, *Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sull'origine delle comete* (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino Serie II, T. LXIII, 1912).

Digitized by Google

« Pour n'avoir été que simple spectateur des événements qui sont arrivés, je n'en ai été moins affecté. Maintenant que la tranquillité et l'ordre sont rétablis, je ne regrette pas d'avoir assisté à un spectacle, le plus intéressant pour les philosophes mêmes, celui d'une grande nation qui se crée un nouveau gouvernement, non par la force des armes, mais par celle de la parole et de l'opinion publique » [XIV, 283].

21. — Istituita (Decreto 11 marzo e Legge 28 settembre 1794) l'« École centrale des travaux publiques » (destinata a mutarsi poco dopo nella celebre « École polytechnique ») LAGRANGE, vi ebbe (insieme a PRONY) la cattedra di Analisi e Meccanica ed il Consiglio dei professori nella sua prima adunanza (4 dicembre 1794) lo elesse a proprio presidente. I corsi ordinari vennero inaugurati il 24 maggio 1795 con una seduta solenne, in cui egli tenne la sua prima lezione in presenza degli altri professori e della scolaresca; poco dopo però egli, per ragioni di età, cedeva la cattedra al LACROIX (1). Fondato l'Istituto di Francia, fu subito eletto a farne parte come membro dell'Accademia delle Scienze, della quale fu anzi il primo presidente ed ai cui lavori prese parte attivissima (2).

E quando la Convenzione Nazionale, con Decreto del 9 brumajo, anno III (30 ottobre 1794), fondò a Parigi la Scuola Normale, egli, insieme a LAPLACE, fu chiamato a professarvi matematica. Diremo fra un momento l'influenza che tale carica esercitò sopra l'ultima fase della vita scientifica di LAGRANGE; ma prima reputiamo non privo d'interesse il riferire un giudizio (a dir vero un po' superficiale) pronunciato su di lui come insegnante da uno (FOURIER) di coloro che ne seguirono le lezioni:

« Lagrange, le premier des savants d'Europe, paraît avoir de cinquante à soixante ans; il est cependant plus jeune (3); il a dans les traits de la dignité, et de la finesse dans la physionomie; il paraît un peu grêle ou pâle; sa voix est très-faible, à moins qu'il ne s'échauffe; il a l'accent italien très-marqué; il pronocne les S comme des Z; il est très-modestement vêtu en noir ou en brun; il parle très-familièrement et avec quelque peine; il a dans la parole l'embarras et la simplicité de l'enfant. Tout le monde sait bien que c'est un homme extraordinaire, mais il faut l'avoir vu pour reconnaître un grand homme. Il ne parle

---

(1) *École polytechnique. Le livre du Centenaire*, T. I (Paris, 1895), p. 5, 19, 20, 25.

(2) Cfr. *Institut de France. Académie de Sciences. Procès-verbaux des Séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois de Août 1835. Publiés conformément à une décision de l'Académie par MM. les secrétaires perpétuels.* T. I, Ans IV-VII (1795-1799), 1910.

(3) Affermazione inesatta; nel 1796 LAGRANGE compì sessant'anni.

Digitized by Google

que dans les conférences, et il y a telles de ses phrases qui exciteraient la risée. Il disait l'autre jour: « *Il y a encore sur cette matière beaucoup de choses importantes à dire, mais je ne les dirai pas* ». Les élèves, dont la plus part sont incapables de l'apprécier, lui font assez peu d'accueil, mais les professeurs le dédommagent » (1).

22. — Quali fossero gli argomenti scelti da LAGRANGE agli inizi del proprio insegnamento e con quali intendimenti li svolgesse emerge dalle *Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École Normale en 1795* [VII, 183], che la riproduzione stenografica fattane dagli allievi e le molte edizioni e traduzioni resero popolari in tutto il mondo; esse, a parer nostro, dovrebbero servire di modello a tutti coloro che si accingono a salire sopra una cattedra di scuola media, chè provano non esservi soggetto per quanto umile e vieto che non si presti ad essere ringiovanito e rallegrato con sviluppi originali e brillanti. Sono ivi trattate le questioni fondamentali dell'Aritmetica e dell'Algebra (teoria delle equazioni) e fra l'altro, è segnalata ai matematici puri la così detta « formola d'interpolazione di LAGRANGE » che fino allora giaceva sepolta in una memoria destinata agli astronomi. Va notato che la parte aritmetica di queste *Leçons* ricevette un importante complemento da un breve scritto posteriore [VII, 291], destinato allo studio del problema di trasformare una frazione in altre più semplici, del quale è messo in luce il sommo interesse teorico e pratico.

Probabilmente fu per porre a disposizione dei propri discepoli le memorie da lui scritte sopra la Teoria delle equazioni che LAGRANGE decise (1798) di raccoglierle in un volume, con l'aggiunta di una magistrale introduzione storica e di buon numero di Note. Così ebbe origine il celebre *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, che (è forza riconoscerlo) di trattato non ha che il nome, essendo una semplice successione di materiali preziosi, ma staccati (2). Tuttavia fu coronato da tale successo che dieci anni appresso si manifestò la necessità di una nuova edizione e nel 1826 di una terza. Ciò non deve stupire perchè, — lo ebbe a notare il POINSOT (3) — « comme il n'y a dans toute l'Analyse aucun point remarquable où ce géomètre (LAGRANGE) n'ait porté son esprit et qu'il n'ait, pour ainsi dire, regardé de très-près, on est sûr de trouver dans ses ouvrages, en même temps que ses pro-

(1) *Le centenaire de l'École Normale 1795-1895* (Paris, 1895), p. 140.

(2) Ciò è reso manifesto considerando che l'opera in questione consta di **sei** Capitoli (97 pagine) e **tredici** Note (215 pagine).

(3) V. una limpidissima analisi della 2ª ediz. inserita nel *Magasin encyclopédique del 1808* e riprodotta in testa alla 3ª ediz.

Digitized by Google

pres découvertes, tout ce qui a été pensé de plus profond et de plus ingénieux par ses prédécesseurs; et, ce qui est bien digne de remarque, tout y parait suivre uniformement des mêmes principes, comme si l'auteur en développait des simples corollaires ».

23. — Mentre questo volume, al pari della *Mécanique analytique*, riscosse lodi generali ed incondizionate, gravi e non ingiustificate obbiezioni vennero mosse contro la *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies,* pubblicata la prima volta nel 1797 e nuovamente l'anno stesso della morte dell'autore (1813). Ivi il grande geometra si è proposto di dimostrare completamente (come aveva enunciato in una memoria che risale al 1772 e poi in un corso tenuto alla Scuola Politecnica (1)), che gli sviluppi in serie di potenze abilitano a fondare solidamente il Calcolo differenziale senza fare appello al tanto controverso concetto d'infinito (2); è notorio che tale geniale concetto, assai più tardi, nelle mani di WEIERSTRASS e MÉRAY, si è mostrato capace di disimpegnare l'ufficio di colonna vertebrale di tutta l'Analisi; ma sotto la forma embrionale sotto cui è presentata dal Nostro, presta il fianco a critiche gravi, le quali vennero coraggiosamente esposte da H. WRONSCKI (3) e che ebbero per conseguenza l'abbandono, poco dopo la morte del sommo analista, delle idee da lui caldeggiate. Ma se vita effimera ebbe la parte che diremmo filosofica della *Théorie des fonctions analytiques,* la parte algoritmica di essa (completata nelle ottime *Leçons sur le Calcul des fonctions)* ha un valore grande e permanente, tanto che certi capitoli di essa (ad es. quanto concerne i contatti di curve e superficie) passarono integralmente nelle opere didattiche posteriori, tutti avendo riconosciuto che la generalità e l'eleganza ivi raggiunte ben difficilmente possono venire superate.

Sono queste le doti che riscontrammo in tutti gli scritti di LAGRANGE che sin qui analizzammo e che non mancano nemmeno in quello notevolissimo di cui resta ancora da parlare. È una memoria [VII, 331] (4) con cui egli si propose di porre in sodo la possibilità di dedurre tutte le formole della trigonometria sferica da un solo teorema, tratto dall'in-

(1) Cfr. R. PRONY, *Notice sur un Cours élémentaire d'Analyse fait par Lagrange* (Journ. de l'École polyt., II Cah., p. 206-207).

(2) Cfr. anche il *Discours sur l'objet de la Théorie des fonctions analytiques*, tenuto da LAGRANGE nel 1798 [VII, 325].

(3) *Réfutation de la théorie des fonctions analytique de Lagrange* (Paris, 1812).

(4) Giova rilevare che dalla memoria di LAGRANGE emerge che egli percepì chiaramente l'importanza della funzione denominata più tardi « seno di un angolo triedro ».

Digitized by Google

vestigazione diretta della figura. E' una tesi già intravveduta (1783) dal DE GUA, ma che questi aveva tentato stabilire mediante calcoli talmente farraginosi, che si sarebbero detti congegnati con lo scopo di mettere in luce, non i vantaggi, ma gli inconvenienti dello svolgere quell'idea. LAGRANGE, invece, dimostra direttamente il « teorema del coseno »

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A,$$

ne deduce sen A e dalla simmetria della risultante espressione di $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$ trae il « teorema dei seni ». Ottiene poi le formole

$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos a,$$

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cot A \operatorname{sen} C + \cos b \cos C\ ,$$

e fa vedere che dalle relazioni stabilite scaturiscono, come casi speciali, tutte quelle che sussistono per triangoli sferici rettangoli; nè manca di dimostrare, in modo estremamente semplice, il « teorema di LEGENDRE » che insegna una relazione metrica approssimata fra un triangolo sferico qualunque ed un triangolo piano opportunamente scelto, teorema del quale è nota la straordinaria importanza pratica. Risulta da ciò come ben a ragione un giudice competentissimo dichiarasse: « Es besteht kein Zweifel, dass dieses von Lagrange aufgestellte System der sphärischen Trigonometrie an Uebersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz alle die bis dahin erschienen übertrifft und so in würdiger Weise die Bestrebungen des 18. Jahrhunderts auf dem Gebiete unserer Wissenschaft abschliesst » (1).

Gli è presumibilmente nel corso di tali studi che LAGRANGE ebbe a notare che le formole della Trigonometria sferica sono indipendenti dal postulato di EUCLIDE, e fu indotto a pensare che, facendo tendere ad infinito il raggio della sfera su cui si opera, si sarebbe giunti a sormontare quelle difficoltà della Geometria del piano che i non sterili conati di LEGENDRE avevano posto all'ordine del giorno al tramonto del secolo XVIII. Tale convinzione egli ebbe a manifestare conversando col BIOT (2) e forse costituiva il nocciolo di una memoria di cui — a quanto narra A. DE MORGAN (3) — egli avrebbe cominciata la lettura all'Accademia delle Scienze a Parigi, lettura che interruppe improvvisamente esclamando « Il faut que j'y songe encore! ».

---

(1) A. VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen* citate p. 167.

(2) Cfr. J. HOÜEL, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géometrie élémentaire* (Paris, 1867), p. 76.

(3) *A budget of Paradoxes*, II ed. (Chicago aud London 1913), T. p. 288. Cfr. F. ENGEL UND P. STACKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895), p. 212. La memoria di LAGRANGE esiste in manoscritto alla Biblioteca dell'Istituto di Francia.

Digitized by Google

24. — Tutto quanto esponemmo nel presente Capitolo basta a provare che, durante il soggiorno a Parigi, il genio di LAGRANGE si mostrò di forza, se non di originalità, comparabile a quella dimostrata nelle precedenti fasi di sviluppo. Nè a lui mancarono le più espressive manifestazioni di alta considerazione da parte di discepoli, di privati, del Governo: infatti ebbe la dignità di Grand'Ufficiale della Legion d'Onore, a lui venne assegnato il primo de' premi decennali istituiti da NAPOLEONE I (1), a lui fu dato un posto nel Senato, a lui infine fu conferito l'ambito titolo di Conte dell'Impero. Circondato da un culto universale egli continuava a lavorare senza dar segno di alcun deperimento intellettuale; ma le frequenti sincopi — che tanto allarmavano parenti ed amici — erano sintomi indubbi di un morboso indebolimento fisico. Però gli è soltanto verso il cadere di marzo del 1813 che a tale diminuzione di forze, lenta ma incessante, si accompagnarono fenomeni allarmanti. Tuttavia il giorno 8 del seguente aprile egli potè ricevere i colleghi MONGE, LACÉPÈDE e CHAPTAL — incaricati di recargli, in nome dell'Imperatore, il gran cordone dell'Ordine imperiale della Riunione —, intrattenendosi familiarmente con essi. Ma fu l'ultimo raggio di luce proveniente da una fiamma che andava spegnendosi: chè due giorni dopo (10 aprile 1813) alle 9 $^3/_4$ egli esalava la sua grande anima (2).

---

(1) G. DARBOUX, *Éloges académiques et Discours* (Paris 1912), p. 274.

(2) Per particolari minuti intorno a quanto concerne la vita fisica di LAGRANGE ed alla sua morte si ricorra al citato *Précis* di VIREY et POTEL. L'Atto originale di morte del Nostro fu distrutto nel 1871 durante gli incendi della Comune. Grazie ai buoni uffici del sig. CH. HENRY fu possibile rintracciarne la copia, ricostituita in omaggio alle disposizioni generali contenute nella Legge 12 febbraio 1872. Eccone il tenore:

« Du onze avril mil huit cent treize à dix heures du matin.

« Acte de décès de Monsieur Joseph Louis Lagrange, sénateur, grand officier de la Légion d'honneur, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, décédé hier à dix heures du matin, rue du Faubourg Saint-Honoré n. 128, en son hôtel, quartier du Roule, époux de Mad.me Rénée Françoise Adélaïde Lemonnier, mondit sieur Lagrange, né à Turin, agé de près de soixante-dix sept ans, originaire d'une famille française. Constaté par nous Antoine Charles Roze, adjoint au maire du premier arrondissement de Paris, faisant les fonctions d'officier de l'État-Civil sur la déclaration à nous faite par les sieurs Charles François Jacques de Parfouru, propriétaire, âgé de quarant cinq ans, demeurant à Evy, département du Calvados, de présent à Paris, à domicile susdit, beau-frère du defunt, et Jean Baptiste Etienne François Maire, lieutenant-colonel, attaché au Ministère de la Guerre, âgé de trentequatre ans, même rue n. 100, et sont signés avec nous après déclaration faite ».

LAGRANGE ebbe tomba a Parigi nel Pantheon; per ordine di NAPOLEONE lo stato ne acquistò la biblioteca ed i manoscritti che furono consegnati all'Istituto di Francia; pure per ordine dell'imperatore solenni commemorazioni furono fatte nelle Università dell'allora Regno d'Italia, Pavia, Padova e Bologna; vennero date alle stampe le orazioni funebri pronunciate in tale occasione da COSSALI e MAGISTRINI in queste due ultime.

Digitized by Google

25. — L'Istituto di Francia, ed il Senato conservatore assistettero in pompa magna alle sue esequie (1); e, dopo che il presidente del più eccelso corpo politico della Francia ebbe dato all'illustre estinto il supremo addio, LAPLACE, con parola commossa, delineava rapidamente le immense benemerenze scientifiche del sommo matematico, osservando, fra l'altro, che «parmi les inventeurs qui ont le plus reculé les bornes de nos connaissances NEWTON et lui ... paraissent avoir possédé au plus haut point ce tact heureux qui, faisant discerner dans les objets les principes généraux qu'ils récèlent, constitue le véritable génie des sciences dont le but est la découverte de ces principes. Ce tact, joint à une rare élégance dans l'exposition des théories les plus abstraites, caractérise M. DE LAGRANGE».

Riuscirebbe impossibile delineare con maggiore chiarezza e sobrietà di parole l'opera scientifica del Grande da un secolo scomparso, chè sostanza e forma erano di pari perfezione in tutte le sue scritture. L'eleganza dei calcoli e la lucidità dello stile fanno ancor oggi dei suoi scritti altrettanti insuperabili modelli; d'altra parte l'originalità e profondità delle sue vedute sono tali che a lui fu dato, in tutti i vari campi che ha coltivati, di inaugurare un'èra novella o di chiudere un'altra.

Così, nella Teoria dei Numeri pose termine all'epoca cominciata con FERMAT e preparò quella a cui compete il nome di GAUSS, mentre nella Teoria delle Equazioni schiuse il grande periodo nel quale — per precipuo merito di RUFFINI, CAUCHY, ABEL, GALOIS — questa disciplina ha trovata una nuova anima nel concetto di sostituzione. Similmente, mentre corona degnamente l'opera trigonometrica del secolo XVIII, scrive le prime pagine della Geometria analitica, nel senso che a tale vocabolo venne dato da tutti coloro che se ne occuparono durante il secolo passato. Nell'Analisi in generale egli appare come ultimo rappresentante di quello

(1) Più tardi la Francia tributò a LAGRANGE la più significante onoranza postuma prendendo l'iniziativa ed assumendo il patronato della prima edizione completa delle sue Opere. In base ad un Rapporto fatto da LEGENDRE, PRONY, POISSON e LACROIX, il 3 novembre 1817 [XIV, IX XII] venne escluso quanto di ancora inedito si trova nei manoscritti conservati nella Biblioteca dell'Istituto di Francia; ora le proposizioni che G. PEANO ricavò da un rapido esame di quei manoscritti (v. *Formulaire mathématique, Ed. de l'an 1902-03*, p. 321-324) fanno ritenere che da essi non siasi ancora spremuto tutto ciò che d'importante sarebbero in grado di porgere (gli è quanto mi confermò un rapido esame dei mss. da me fatto), onde sarebbe desiderabile che l'Accademia delle Scienze di Parigi incoraggiasse e dirigesse nuove ricerche intorno ad essi. Inoltre da varie pubblicazioni posteriori all'anno 1892 (e che vennero da noi ricordate) sarebbe agevole trarre gli elementi per un nuovo volume di *Corrispondenza*. [Un complemento alla presente memoria trovasi nella nota dell'autore *Lagrange e la storia delle matematiche*, Biblioth. mathem., III Ser., T. XIII, 1912-13 (1935)].

Digitized by Google

che può dirsi indirizzo algoritmico, il quale, per opera di CAUCHY e ABEL, doveva, all'alba del secolo XIX, cedere il posto al regno del rigore: ma per certe speciali teorie (ad esempio le Equazioni differenziali ed il Calcolo delle variazioni) egli è tuttora venerato come pioniere e fondatore. E se le sue assidue ricerche sul Calcolo delle probabilità e la Meccanica celeste ebbero la sfortuna di precedere di poco quelle più decisive di LAPLACE e GAUSS, l'apparizione della *Mécanique analytique* può ben compararsi al sorger del sole, chè lo splendore da essa emanante fece cadere in dimenticanza tutti gli scritti congeneri anteriori. Calcolatore geniale, si mostrò insuperabile nell'immaginare nuove procedure aritmetiche ed analitiche, onde tutti coloro che serban fede nell'avvenire del simbolismo algebrico considerano le *Opere di Lagrange* come inesauribile fonte di preziosi ammaestramenti.

Dopo un secolo intero dacchè la stanca mano di LAGRANGE cadde sulle eterne pagine da lui vergate, dopo un secolo che per attività e fecondità matematica supera di gran lunga tutti i precedenti, noi troviamo il suo nome ancora collegato a tutte le varie branche della scienza matematica: onde per tutti coloro che le coltivano è dovere e vanto di proclamarsi discepoli dell'immortale Scienziato a cui l'Italia diede i natali, a cui la Germania assicurò la pace e la tranquillità indispensabili ad un fecondo lavoro scientifico, a cui la Francia largì, con insuperabile generosità, i supremi onori a cui può aspirare un pensatore.

Genova, 31 dicembre 1912.

XVIII.

COMMEMORAZIONE DI PLACIDO TARDY

Letta alla R. Accademia dei Lincei nella Seduta dal 7 marzo 1915.

1. — Fra le lettere che si scambiarono LEIBNIZ e GIOVANNI BERNOULLI durante l'anno 1695, meritano la più alta ammirazione quelle nelle quali è segnalata e svolta l'analogia formale che esiste fra le due operazioni *differenziazione* ed *elevamento a potenza*. Tale analogia, avvertita più tardi, per conto suo, anche da LAGRANGE quando era ai primordi della sua carriera scientifica, fu la prima radice dalla teoria generale delle operazioni, che con tanto fervore e tanto successo venne coltivata, specialmente in Inghilterra, in sul principio del secolo scorso. La sorprendente disinvoltura, con la quale quei due sommi ragionavano e calcolava-

Digitized by Google

no, col mezzo di potenze ad indici qualunque, dei simboli di differenziazione di integrazione, produce oggi meraviglia non minore del vedere come, circa nella stessa epoca, fosse familiare (1) un modo così generale di concepire le coordinate, da formare uno stridente contrasto con le nostre abitudini mentali, che ci tengono sempre strettamente avvinti al semplice concetto di coordinate cartesiane.

Ma, lo ha osservato giustamente il BAILLY, «il semble que les idées aient comme nous, une enfance et un premier état de faiblesse; elles ne produisent point à leur naissance, et elles ne tiennent que de l'âge et du temps leur vertu féconde» (2). In conformità a tale legge che governa lo sviluppo del pensiero scientifico, la geniale idea di sottoporre i simboli di differenziazione ed integrazione all'operazione di elevamento a potenza con esponente qualunque, rimase per parecchi lustri inosservata, dimenticata o trascurata: spettava ad EULERO il riesumarla e fecondarla; spettava a LIOUVILLE, svolgerla ulteriormente in base a nuove vedute. Se non che i risultati ottenuti dall'eminente geometra francese parvero ad alcuni contenere qualche elemento arbitrario non accettabile, onde non riscossero la generale approvazione dei dotti. In conseguenza, quando nel settembre 1845 gli scienziati italiani si riunirono per la sesta volta a congresso in Milano, un giovane matematico siciliano scelse i differenziali ad indice fratto come soggetto di una comunicazione **[3]** (3) intesa ad indurre i geometri ad occuparsi di proposito di tale importante argomento. Avendo egli chiesto il giudizio dei colleghi sopra le proprie ricerche, GABRIO PIOLA e GIOVANNI PLANA, che godevano allora di un'autorità altissima, per incarico avutone, lessero una Relazione (4) in cui riconoscevano indiscutibile l'importanza del tema trattato e, facendo qualche riserva intorno ad alcune idee dell'autore, auguravano gli fosse riserbata la palma destinata a colui che riuscisse a fare piena luce sopra un argomento la cui metafisica giudicavano tuttora controversa.

Probabilmente a cagione dei dubbi manifestati in tale Rapporto, il lavoro in questione rimase per ben quattordici anni inedito; soltanto nel 1858, dopo di avere subìto radicali migliorìe, venne inserito nel volume inaugurale della nuova serie degli *Annali di matematica*. Nè, dopo, l'au-

---

(1) La verità di tale asserzione è dimostrata, se non m'inganno, indiscutibilmente dall'*Analyse des infiniment petits, pour l'intélligence des lignes courbes*, pubblicata nel 1696 dal marchese de l'HÔPITAL.

(2) *Histoire de l'astronomie moderne* tom. II, Paris MDCCLXXIX, pag. 60.

(3) I numeri in parentesi quadrata servono di richiamo ai lavori indicati nell'*Elenco* che chiude la presente *Commemorazione*.

(4) *Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani*, pagg. 90-91.

Digitized by Google

tore abbandonò del tutto l'interessante soggetto; chè, dieci anni dopo, vi dedicò una nuova pubblicazione di indole specialmente storica [15], la quale, meglio ancora della precedente, ebbe la virtù di richiamare l'attenzione dei matematici (1) sopra un soggetto importante in sè stesso ed interessante, non foss'altro, per essere uno dei pochissimi in cui le opinioni dei competenti si manifestarono discordi.

Ma nel periodo che corre fra il 1844 ed il 1868, il giovane compatriota di MAUROLICO, che aspettava trepidante il giudizio di coloro che egli venerava come maestri, aveva fatto la propria strada nel mondo; non soltanto veniva trattato come loro pari da scienziati del valore di un BETTI, di un BELLAVITIS, di un GENOCCHI, ma si trovava alla testa di un Istituto d'istruzione superiore; cioè dell'Ateneo del quale mi reco ad onore di esprimere l'ammirazione per l'altezza della mente dell'antico suo duce, la gratitudine per la sua munificenza esemplare (2), il cordoglio per la sua scomparsa, nel mentre mi accingo ad esporne brevemente la vita ed a farne risaltare le benemerenze scientifiche.

2. — PLACIDO TARDY nacque a Messina il 23 ottobre 1816, da una famiglia originaria della Francia (3). Esauriti gli studi che potevano compiersi nella sua città natale, si recò a Lucca per frequentarvi quel Collegio: dell'interesse che egli allora provava per gli studi matematici fa fede un breve articolo [1] con cui egli volle richiamare l'attenzione dei conterranei sopra un lavoro di un giovane siciliano, oggi del tutto dimenticato. Nell'autunno del 1837 passò a Milano, con l'intenzione di perfezionarsi ulteriormente sotto la direzione del matematico GABRIO PIOLA e dell'astronomo PAOLO FRISIANI; del suo profitto fanno fede due lusinghieri attestati, dai quali risulta che quei due valentuomini concepirono le più liete speranze sull'avvenire del loro alunno; nè va taciuto che l'influenza del primo di essi è visibile nella miglior parte delle pubblicazioni scientifiche del TARDY. Da Milano nel 1838, passò a Parigi ed ivi ascoltò le lezioni di LIOUVILLE e POISSON; raccomandato dal MOSSOTTI a GUGLIELMO LIBRI, che in quell'epoca era all'apogeo della gloria e della potenza, stabilì con lui relazioni di amicizia che continuarono anche dopo

(1) Ved. l'articolo di G. BORCHARDT, *Sur quelques passages des lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indices quelconques* (Bullettino di Boncompagni, tom. II, an. 1869, pagg. 277-278; oppure *C. W. Borchardt's Gesammelte Werke*, Berlin 1888, pagg. 486-487).

(2) Alla Facoltà matematica dell'Università di Genova egli ha legato la sua ricchissima biblioteca matematica.

(3) Il padre, ANTONIO, fu distinto ingegnere; mi si assicura che una chiesa eretta sotto la sua direzione è uno dei rari edifizi che si salvarono dall'immane disastro che distrusse Messina nel 1908.

Digitized by Google

la fuga a Londra ed il ritorno in Toscana del famigerato storico delle scienze matematiche in Italia.

Restituitosi in patria, da FERDINANDO II re di Napoli, con decreto del 22 novembre 1841, veniva «nominato professore di matematica sublime nella regia Università degli studi di Messina» (1); ivi diede alla luce il suo primo lavoro originale [2]; ivi accolse il LEJEUNE-DIRICHLET durante lo storico viaggio compiuto dal sommo matematico tedesco in compagnia di JACOBI e di STEINER. Ma, dopo i tumulti verificatisi a Reggio-Calabria e Messina nel 1847, quasi a preludio delle rivoluzioni che divamparono in Europa nell'anno successivo, ritornata la Sicilia dolorante sotto l'aborrito giogo borbonico, il TARDY, che a quei moti non era rimasto estraneo, abbandonò una cattedra ed un soggiorno che non erano di sua soddisfazione (2) e riparò a Firenze. Devesi però ritenere che la sua partecipazione a quella rivolta sia stata modesta, dal momento che il sospettoso Governo napoletano non lo molestò in alcun modo durante le visite che egli fece regolarmente al proprio padre durante i mesi di autunno degli anni seguenti e giunse perfino a far pratiche (1854) perchè egli riprendesse il suo ufficio nel pubblico insegnamento.

A Firenze il TARDY, mentre si dedicava a ricerche scientifiche, si adoperò per ottenere una cattedra; riusciti vani gli sforzi da lui fatti per conseguire un posto allora scoperto nell'Università di Bologna, e quelli del PLANA per farlo eleggere professore nell'Accademia militare di Torino, il TARDY, in sul principio dell'anno scolastico 1850-51, si trasferì a Genova in qualità di professore di matematica in quel ginnasio. Un anno dopo, CAMILLO CAVOUR, allora ministro della marina agricoltura e commercio, lo nominò (lettera del 13 dicembre 1851) professore di geometria analitica e di calcolo infinitesimale in quella regia Scuola di marina; di tale Istituto egli fu anche direttore degli studi a partire dal 1854 e nel 1868 v'insegnò pure la meccanica razionale (3).

---

(1) Un manoscritto, tuttora esistente, portante la data del 2 marzo 1846, mostra che la Meccanica analitica fu uno dei soggetti delle lezioni del giovane professore.

(2) Ragione precipua del suo malcontento era lo stato miserrimo della pubblica biblioteca di Messina, del quale egli fa cenno in un passo di uno dei suoi primi lavori [2].

(3) Fra gli innumerevoli discepoli che ebbe il TARDY, mi piace ricordare un noto scrittore di cose marinare, A. V. VECCHI (Jack la Bolina), il quale, del maestro che ebbe nel 1858-59, parla in un articolo su *Le prigioni della regia scuola di marina in Genova* (Fanfulla della domenica, an. 1881), per ricordare, senza rancore, che, non avendo saputo rispondere ad una domanda relativa al paraboloide di rivoluzione, fu dal TARDY condannato a tre giorni di «prigionetta», che gli tolsero di assistere, insieme coi suoi condiscepoli, allo sbarco a Genova di NAPOLEONE III, che veniva allora in Italia quale nostro alleato contro l'Austria.

Digitized by Google

Il carteggio, tenuto in questo periodo di tempo dal TARDY con i più eminenti matematici italiani del tempo, sta a provare la grande stima che essi nutrivano per il suo ingegno, per il suo carattere, per la sua cultura; da esso fra l'altro risulta che la sua casa, sempre ospitale, venne scelta nella primavera del 1858 come sede di un piccolo convegno, al quale parteciparono BETTI, BRIOSCHI e GENOCCHI, col precipuo scopo d'imprimere nuova vita al periodico di matematica fondato otto anni prima e costantemente diretto dal TORTOLINI. In tale minuscolo congresso vennero gettate le basi degli *Annali di matematica pura ed applicata* che da mezzo secolo, sotto l'oculata direzione prima del TORTOLINI, poi del BRIOSCHI ed ora del DINI, esercitano la più salutare influenza sopra lo sviluppo delle scienze esatte nella nostra patria. La parte presa dal TARDY in questo memorabile avvenimento non è generalmente nota, ma venne riconosciuta nel modo più esplicito in un'occasione solenne: adunatosi, sullo scorcio di settembre del 1887, il primo Congresso universitario, i matematici che vi parteciparono, riunitisi a fraterno banchetto per onorare il BRIOSCHI, prima di separarsi, spedirono per telegramma al TARDY un « saluto riconoscente ai fondatori degli Annali, primo segno del risorgimento degli studi matematici in Italia ».

Resasi vacante la cattedra di analisi infinitesimale nell'Università di Genova, il TARDY fu chiamato ad occuparla con Regio Decreto del 19 ottobre 1859, in seguito a parere favorevole pronunziato da una Commissione di cui facevano parte GENOCCHI, MENABREA, RICHELMY e SELLA; nè volle più abbandonarla, non ostante gli inviti, ripetutamente rivoltigli da BETTI quando, scomparsi prima il MOSSOTTI e poi il NOVI, divenne libera una cattedra di matematica a Pisa, rivoltigli dal GENOCCHI alla morte del PLANA. Dell'Università di Genova fu anche rettore durante due trienni (1865-1868, 1878-1881), conquistandosi da parte dei suoi commilitoni una stima altissima, non inferiore a quella concordemente tributatagli dai discepoli, in tutte le scuole in cui ebbe ad insegnare, dai matematici del suo tempo, che lo elessero a far parte dei principali sodalizi scientifici italiani (1), e dal Governo, che gli affidò ripetutamente importanti e delicati incarichi (2).

Morta nel 1880 la diletta compagna della sua vita (3), al TARDY il

(1) Oltre che Socio nazionale della nostra Accademia, era uno dei XL della Società italiana delle scienze, corrispondente dell'Accademia delle scienze di Torino e dell'Istituto lombardo; apparteneva anche all'Accademia dei georgofili di Firenze; non escludo potesse appartenere ad altre congeneri corporazioni.

(2) Basti ricordare che a lui venne affidata l'istruzione matematica del principe ODDONE DI SAVOIA.

(3) LAURA CINI, scrittrice apprezzatissima ai suoi tempi, che pubblicò molti bozzetti letterari nella *Rivista europea*, assumendo il nome di SARA.

Digitized by Google

soggiorno di Genova ed il gravame dell'insegnamento riuscirono insopportabili; onde, benchè sempre robusto di corpo ed alacre di mente, con generale rimpianto della scolaresca, dei colleghi e della cittadinanza, chiese il proprio collocamento a riposo; tale desiderio essendo stato esaudito con Decreto del 4 dicembre 1881, egli si trasferì nuovamente a Firenze, ove visse altri trentatrè anni, circondato dall'affetto vivissimo dei congiunti e degli amici, senza dar segno di alcun deperimento intellettuale e fisico, a prescindere dall'indebolimento della vista. Una violenta polmonite lo abbattè il 1° novembre dello scorso anno, qual fulmine su vetusta quercia, mentre tutti coloro che lo conoscevano nutrivano fiducia di poterlo salutare centenario.

3. La produzione matematica del TARDY non è molto voluminosa e comprende scritti ispirati dalle opere che egli, lettore instancabile, andava studiando; chè il loro scopo è, o di risolvere questioni lasciate in sospeso (alcuni, anzi, non fanno che sciogliere quesiti proposti nelle *Nouvelles Annales de mathématiques*), o di chiarire, criticare od applicare concetti e metodi escogitati dai più eminenti matematici del suo tempo. Tale carattere si riscontra nel suo primo lavoro originale [2] (1), il quale si riferisce ad un ordine di questioni poste all'ordine del giorno da FOURIER ed a cui avevano dato importanti contributi due matematici con cui il TARDY aveva grande dimestichezza, cioè il LIBRI ed il PIOLA; parlo della costruzione di espressioni analitiche atte a rappresentare, in intervalli diversi della variabile indipendente, funzioni differenti. Sono specialmente i concetti del LIBRI che il Nostro ha applicato a svariate questioni, non soltanto di algebra, ma anche di aritmetica od offerte dal giuoco degli scacchi (studio del cammino del cavallo). In tal modo egli ha ottenuto formole che si distinguono per semplicità ed eleganza, ma che non conseguirono un posto stabile nella scienza, avendo doti esclusivamente formali, a somiglianza dell'espressione che assegna il numero dei numeri primi non superiori ad un certo limite che, come è noto, il LEGENDRE dedusse (2) traducendo in simboli la celebre procedura conosciuta sotto il nome di « staccio d'Eratostene ».

Quest'ordine d'indagini, forse perchè ravvisate di non grande importanza, fu ben tosto abbandonato dal nostro matematico, il quale passò a studiare uno fra i più ardui soggetti della meccanica, cioè il moto dei liquidi. Una sua memoria [4], « di squisita fattura » (sono pa-

---

(1) Questa rarissima Memoria mi è nota soltanto per un manoscritto rinvenuto fra la carte relitte dal TARDY; ignoro, quindi, se tale ms. sia identico al lavoro stampato.

(2) *Théorie des nombres*, II ed. (Paris, 1808), pag. 414.

Digitized by Google

role di VALENTINO CERRUTI), mostra che egli conosceva a fondo tutti gli scritti anteriori sull'argomento ed era in grado di misurarne l'importanza assoluta e relativa. Notevole specialmente il paragone da lui istituito fra i lavori di D'ALEMBERT e LAGRANGE sul moto a due coordinate, con quanto scrisse il VENTURÒLI, che allora passava per un'autorità indiscutibile; tale acuta analisi portò il TARDY a concludere che questi nulla aggiunse di sostanziale ai risultati conseguiti dai suoi predecessori. Passando poi a trattare del moto a tre coordinate, ebbe occasione di fare varie eleganti applicazioni di alcune sue formole (allora ancora inedite) pertinenti alla teoria dei differenziali ad indice fratto, le quali meriterebbero di venir tolte dalla dimenticanza in cui sono cadute (1). Aggiungiamo che in un punto dello stesso lavoro il matematico messinese segnalò alcuni errori commessi dal geometra inglese CHALLIS e che lo avevano indotto a « conseguenze falsissime »; le stesse critiche essendo state mosse per conto suo da G. BERTRAND, il CHALLIS tentò un'autodifesa nel fascicolo di giugno 1849 del *Philosophical Magazine*: ciò indusse il Nostro ad esporre con maggiore diffusione i propri modi di vedere, in un pregevole lavoro [**6**] che quella Rivista si affrettò a diffondere al di là dalla Manica (2).

Mentre il TARDY meditava sulle applicazioni della matematica alla spiegazione d'importanti fatti naturali, non trascurava le investigazioni di pura analisi. Infatti un bel teorema sulle equazioni differenziali lineari, enunciato dal MALMSTEN, venne da lui dedotto [**6**], nel modo più naturale, da una proposizione del LIBRI; questa e quello furono poi da lui estesi [**7**] alle analoghe equazioni alle differenze finite.

Circa nello stesso tempo [**8**] egli applicò alla divisione delle funzioni ellittiche i risultati stabiliti da ABEL nella sua fondamentale Memoria *Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*. Poco dopo scriveva due brevi Note di carattere elementare [**9**,**10**] per rispondere a questioni proposte nelle *Nouvelles Annales de mathématiques*; notevoli entrambe per la perfetta eleganza di calcolo, lo sono inoltre la prima perchè addita una ricchissima sorgente di identità algebriche, l'altra (dimostrazione di un teorema di PROUHET) per un inatteso intervento della serie ipergeometrica in una questione di planimetria elementare.

Nella produzione matematica del TARDY si avverte a questo punto

(1) Interessanti considerazioni sopra questo lavoro del TARDY si leggono nella seconda parte della Memoria di A. GENOCCHI, *Di una Nota del barone Plana: casi particolari del moto dei liquidi* (Annali di matematica, tom. I, 1858, pp. 383-396).

(2) Ivi è anche incidentalmente criticata una formola di V. AMICI; da ciò due lettere, d'intonazioni differenti, pubblicate da questo scienziato nel tom. II (pp. 302 e 368) degli *Annali* di TORTOLINI.

Digitized by Google

un'interruzione durata all'incirca un sessennio e dovuta indubbiamente alle cure dell'insegnamento, per lui allora gravosissime. Dal suo volontario silenzio egli uscì in occasione della fondazione degli *Annali di matematica*, nel primo volume dei quali egli fece finalmente conoscere [11] i frutti delle sue investigazioni intorno ai differenziali ad esponente fratto, alle quali egli diede l'ultima mano, dopo di avere preso notizia dei più recenti lavori sull'argomento. I suoi risultati non coincidono, nè nel punto di partenza, nè tampoco nelle conclusioni, con quelli del LIOUVILLE (1); giacchè, mentre questi applicò l'espressione euleriana di un differenziale di indice qualunque dell'espressione e^{mx} ad una funzione arbitraria, previamente trasformata in una somma di esponenziali, il Nostro mostrò che tale incomoda previa metamorfosi si può evitare partendo dalla formola.

$$\int^{(\mu)} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \varphi^{(r)}(x),$$

la quale, se μ è intero positivo, si ottiene con successive integrazioni per parti; nel caso generale essa può adoperarsi per definire il primo membro, dal momento che il secondo membro ha anche allora un significato ben determinato. Non è il caso che io mi arresti ad esporre i corollari che il TARDY ne trasse supponendo che la funzione $\varphi(x)$ si identificasse con le più semplici funzioni che s'incontrano nell'analisi (x^m, $\log x$, e^{mx},...). Va invece rilevato che egli applicò le esposte considerazioni ad ottenere sotto forma nuova e di notevole concisione le funzioni soddisfacenti alle prime equazioni integrali del tipo VOLTERRA che siano state incontrate (2), quelle cioè che vennero notoriamente risolute da ABEL e da LIOUVILLE; ora, il fatto che i differenziali ad esponente fratto siano stati vantaggiosamente usati nel trattare specialissime equazioni integrali, porta a congetturare che fra quella teoria ed il più moderno (ed anche più italiano!) ramo dell'analisi matematica esistano legami profondi, meritevoli di esser posti in completa luce (3).

---

(1) Sarebbe interessante di conoscere il parere del LIOUVILLE sopra questo nuovo indirizzo impresso alla teoria a cui egli si era dedicato con tanto impegno; ma sin dal 1858 egli aveva abbandonate tali ricerche, per dedicarsi totalmente alle indagini aritmetiche che soltanto la morte potè interrompere.

(2) V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (Paris, 1912, pp. 34 e segg.)

(3) A chi intendesse riprendere gli studi sui differenziali ad indice qualunque va raccomandato un frammento postumo di RIEMANN (*Werke*, Leipzig 1876, pag. 331) che, non sappiamo per qual ragione, venne escluso dalla traduzione francese delle *Opere* di quel grande analista.

Digitized by Google

Dieci anni dopo, il TARDY, per invito del principe BONCOMPAGNI, dava un complemento importante [**15**] a questo suo lavoro, mostrando come la nota formola di LEIBNIZ

$$D^{\mu}(uv) = \sum_{r} \binom{\mu}{r} D^{\mu-r}u . D^{r}v ,$$

che dà la derivata μ-esima del prodotto di due funzioni u, v d'una stessa variabile, sussista anche per valori non interi e positivi dell'esponente μ.

Nel frattempo, altri argomenti di calcolo infinitesimale avevano attratto la sua attenzione. Così, da una formola stabilita dall'HOPPE per calcolare la derivata d'ordine qualunque di una funzione del tipo $f[u(x)]$, egli fu indotto [**12**] a risolvere l'analoga questione per le funzioni della forma $f[u_1(x), u_2(x)]$, e così spianò la via a chi intendesse trattarla per tutte le funzioni della forma $f[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)]$.

Altro tema a cui dedicò assidui studi è il calcolo approssimato degli integrali definiti, sul quale scrisse un dottissimo lavoro [**14**], che quasi nessuno conosce, nel quale, con procedimento uniforme, sono stabilite, discusse e paragonate fra loro tutte le migliori formole note per la quadratura approssimata (quelle, cioè, che portano i nomi di MAC-LAURIN, POISSON, LEGENDRE, MENABREA, PONCELET, SIMPSON, PARMENTIER, WEDDLE, GAUSS, TURAZZA), e per ciascuna espresse il resto sotto forma d'integrale definito: è questa forse la memoria del TARDY in cui più chiaramente rifulgono le invidiabili sue doti di vasta dottrina, di acume critico e di abilità nel calcolo. Verso il termine di essa, egli incontrò due relazioni nuove ed importanti che passano fra una certa serie di coefficienti binomiali, e credette poi opportuno stabilirle direttamente [**14**] con semplici considerazioni di stretta pertinenza dell'analisi combinatoria. Nè del calcolo infinitesimale si disinteressò dopo essersi ritirato dall'insegnamento: infatti è datato dal 1884 un suo lavoro [**17**] relativo alle equazioni differenziali lineari, secondo l'indirizzo dato a tale teoria dal FUCHS; esso ha per iscopo di stabilire alcune formule enunciate dal THOMÉ, col mezzo di calcoli la cui raffinata eleganza maschera la considerevole complicazione.

Circa contemporaneo e di soggetto analogo è un articolo [**18**] avente per iscopo di insegnare un metodo più semplice di quello che era stato sino allora proposto per integrare il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + P_1 z = v_1 \quad , \quad \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2 ,$$

nel caso in cui tra le funzioni P_1, Q_1, P_2, Q_2 della variabile x sussista la relazione:

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_2}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx};$$

il TARDY riduce la questione ad integrare l'equazione differenziale di secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (X + X_1)\frac{dy}{dx} + (XX_1 + X'_1)y = V,$$

ed aggiunge l'osservazione che tutte le equazioni differenziali lineari di detto ordine, che sapevansi allora integrare, sono casi speciali di quella ora scritta.

Il carteggio del TARDY sta a provare che egli dedicò lunghe ore di assiduo studio alla *Theorie der Abel'schen Functionen* di CLEBSCH e GORDAN, contro cui anzi fece qualche obbiezione, che, essendo stata comunicata dal CREMONA al primo dei citati autori, venne riscontrata e dichiarata indiscutibilmente giusta.

Anche alla teoria de' numeri egli volse la propria attenzione, della qual cosa esistono pubbliche attestazioni nei due lavori di cui ci resta ancora da parlare.

Uno di essi **[16]** ha per iscopo di dimostrare cinque importanti teoremi sulle equazioni binomie enunciati nel 1844 dall'EISENSTEIN. Dopo di averlo consegnato alla direzione degli *Annali di matematica*, l'autore si accorse di essere stato preceduto dallo STERN sino dal 1861; ma quella Direzione, col pubblicare egualmente quello scritto, manifestò apertamente l'opinione che le antiche dimostrazioni non toglievano valore alle nuove.

Di natura aritmetica è eziandio l'ultima delle pubblicazioni del TARDY; essendo apparsa quand'egli toccava gli ottantotto anni, è per avventura il lavoro più senile che annoveri la letteratura matematica. Però una sua lettera, diretta al principe BONCOMPAGNI addì 27 novembre 1887, sta a provare che le ricerche, di cui ivi sono esposti i risultati, vennero iniziate assai prima, cioè nel 1875; ed in pari tempo rivela che il movente ad intraprenderle fu un articolo di quel benemerito bibliografo (1), concernente un celebre teorema scoperto per la prima volta da NICOMACO GERASENO e ritrovato poi molte altre volte da matematici di valore, aventi imperfetta cognizione della matematica greca: parliamo del teorema espresso dalla formola

$$n^3 = \sum_{k=1}^{k=n} \{n(n-1) + (2k-1)\}.$$

Ora, il nostro matematico ha notato che una somigliante proposizione

(1) *Intorno ad una proprietà dei numeri dispari* (Bullettino del BONCOMPAGNI, tom. VIII, 1875, pp. 51-62).

Digitized by Google

sussiste in tutte le progressioni aritmetiche aventi per primo termine l'unità e per differenza costante un numero pari $2d$; decomponendola, infatti, in gruppi che comprendano rispettivamente $1, 1+d, 1+2d, \ldots$. termini, si ottiene sempre come somma degli elementi di ciascun gruppo un cubo. Estendendo ulteriormente tale considerazione, egli ha notato che, se n è pari, nella stessa progressione si può trovare un gruppo di $1+nd$ termini la cui somma sia eguale a $(1+nd)^m$, ove m è un intero $\geqq 3$. Proprietà analoghe posseggono le progressioni aritmetiche del tipo a, $3a$, $5a, \ldots$ Queste proposizioni sono senza dubbio eleganti ed hanno *una certa* importanza, perchè collocano nella debita luce il surriferito teorema di NICOMACO: *una certa*, ma non una grande importanza; è quanto lo stesso TARDY bonariamente riconosceva quando le chiamava semplici giuochi a cui lo stato della sua vista lo costringeva a limitare le proprie occupazioni matematiche. Va notato che, benchè comunicate al mondo scientifico per il tramite di una delle più cospicue Accademie d'Europa, esse raggiunsero limitata notorietà: lo prova il fatto che la prima di esse venne, proprio ai dì nostri ed in Italia, riottenuta *ex-novo* (1) come estensione del teorema di NICOMACO, riscoperto una nuova volta nell'anno di grazia 1914 (2).

Giunti al termine di questa sommaria analisi degli scritti matematici del TARDY, osserviamo come da essa emerga che tali lavori si distinguono meno per novità di concetti e di metodi che per la profonda dottrina che attestano nel loro autore, per la squisita accuratezza di stile e di calcolo e per la non comune abilità algoritmica che rivelano in chi li scrisse. Appunto tale preferenza da lui manifestata per il calcolo sul ragionamento, la quale è sintomo d'un'orientazione di pensiero in aperta antitesi con quella oggi dominante, spiega perchè le memorie del dotto matematico messinese abbiano in questi ultimi tempi trovati poco numerosi lettori, ond'egli fu dimenticato dopo la scomparsa dei matematici della sua generazione ed è quasi totalmente ignoto alla schiera di giovani analisti, in cui l'Italia ripone oggi le sue più fondate speranze. Ma la legge dei ricorsi storici, alla quale non sfugge l'evoluzione del pensiero scientifico, induce a credere che l'avvenire riserbi a lui tempi migliori; allora, forse, qualche nuova recluta dell'esercito matematico scoprirà, nelle formole che egli ha sapientemente architettate, qualche idea degna di venire riposta in circolazione o qualche algoritmo suscettibile di ulteriore applicazione: che tale fiducia non sia priva di fondamento, è dimostrato dall'intervento, nella teoria delle equazioni integrali, dei differenziali ad in-

(1) Vedi E. NANNEI in *Il Pitagora*, T. XX, 1914-15, pp. 11-13.

(2) E. BARISIEN in *L'intermédiaire des mathematiciens*, XXI, 1914, pag. 123.

Digitized by Google

dice fratto, cioè della dottrina in cui egli si affermò con più spiccata originalità di pensiero. Il giorno in cui tale previsione sia per essere avverata, sarà dimostrato che PLACIDO TARDY ha nobilmente disimpegnati entrambi gli uffici affidati ad uno scienziato degno di tale nome: il mietere le messi ormai mature ed il gittare semi capaci di assicurare vitale nutrimento alle generazioni dell'avvenire (1).

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI DI P. TARDY

[1]. *Sulla dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange di Agatino San Martino.* Cenno di PLACIDO TARDY (Il « Faro » giornale di scienze, lettere ed arti, tom. IV, Messina, 1836).
[2]. *Sulle funzioni discontinue.* Ricerche di PLACIDO TARDY. (Messina, 1843)
[3]. *Preliminari di una Memoria sui differenziali a indice fratto* (Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani tenuta in Milano nel settembre 1846).
[4]. *Sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi.* (Firenze 1847).
[5]. *Sulle equazioni differenziali lineari* (Annali di TORTOLINI Tom. I; Giornale di Crelle, tom. XLII, 1851).
[6]. *Sopra una nuova equazione di idrodinamica. Alcune osservazioni* (Annali di TORTOLINI, tom. I, 1850; Philosophical Magazine tom. XXXVI, 1850).
[7]. *Sulle equazioni lineari alle differenze finite* (Annali di TORTOLINI, tom. I, 1850; Giornale di CRELLE, tom. 42, 1851).
[8]. *Sulla risoluzione algebrica di talune equazioni* (Annali di TORTOLINI, tom. II, 1851).
[9]. *Trasformazione di un prodotto di n fattori* (Annali di TORTOLINI, tom. II, 1851; *Nouvelles Annales de mathématiques*, tom. X, 1851).
[10]. *Sopra un teorema di poligonometria* (Annali di TORTOLINI, tom. III, 1852; Giornale di CRELLE, tom. XLVII, 1854).
[11]. *Sui differenziali a indice qualunque* (Annali di matematica, tom. I, 1858).
[12]. *Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte* (Giornale di matematiche tom. II, 1864).
[13]. *Sopra alcune formole relative ai coefficienti binomiali* (Giornale di matematiche, tom. III, 1865).
[14]. *Sulle quadrature* (Mem. della Società italiana delle scienze residente in Modena, ser. II, T. II, 1866).
[15]. *Intorno ad una formula del Leibniz* (Bullettino di bibl. e st. ecc. tom. I 1868; Nouvelles Annales de mathématiques, II ser., tom. VII, 1869).
[16]. *Sopra alcuni teoremi aritmetici* (Annali di matematica, tom. III, 1870).
[17]. *Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti* (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, tom. XIX, 1884).
[18]. *Remarque sur une Note de M. Ibach* (Nouvelles Annales de mathématiques, III ser. tom. III, 1884).
[19]. *Sulle serie aritmetiche di numeri interi* (due Note) (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, tom. XXXIX, 1904).

---

(1) Il TARDY mantenne corrispondenza epistolare con tutti i principali matematici italiani del tempo suo (BELLAVITIS, BELTRAMI, BETTI, BONCOMPAGNI, BRIOSCHI, CASORATI, CHIÒ, CREMONA, DONATI, FRISIANI, GENOCCHI, ISÉ, JUNG, LIBRI, MAINARDI, MENABREA, MOSSOTTI, D'OVIDIO, PIOLA, PLANA, SELLA, SIACCI, TORTOLINI, TURAZZA) e con alcuni stranieri (AIRY, CAYLEY, GRUNERT, HIRST, KLEIN, PELZ, PETERS, QUETELET, SCHLÄFLI, DA SILVA, SPOTTINSWOODE, SYLVESTER); le lettere, da lui ricevute e religiosamente conservate, per voler suo, furono depositate nella Bibliotecca della R. Università di Genova. Un rapido esame da me fattone m'indusse a notarne un certo numero dotate di considerevole valore storico o scientifico. Alcune (di GENOCCHI, BETTI e SCHLÄFLI) furono da me pubblicate nei *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, (Ser. V, T. XXIV, 1° Sem. 1915, p. 516-531); altra leggesi nel presente volume (p. 369).

Digitized by Google

XIX.

GUGLIELMO LIBRI COME STORICO DELLA SCIENZA

Dagli *Atti della Società ligustica di Scienze nat. e geogr.* Vol. XXVIII, 1918.

Se un romanziere o un poeta avesse scelto come soggetto di qualche sua opera un giovane profugo il quale, salito insperatamente ai supremi onori nella sua patria adottiva, parve compiacersi nel trasformare in acerrimi nemici appunto coloro che gli erano stati più larghi di appoggi, cosicchè questi, quando accuse infamanti si scatenarono contro di lui, rifiutarono di stendergli una mano provvidenzialmente soccorritrice, quel romanziere o poeta avrebbe indubbiamente trovata unanime la critica nel dichiarare che, per brama di mostrarsi originale, aveva perduto ogni contatto con la realtà. Eppure, tanto arduo è il còmpito di tracciare una linea di demarcazione fra quanto è vero e ciò che appare inverosimile, che GUGLIELMO LIBRI offre in sè stesso l'esempio di una persona che fu il proprio più implacabile nemico, riempiendo di gas asfissianti la splendida dimora che, lontano dalla terra natìa, egli si era abilmente costruita.

Ora, poichè le vicissitudini dell'esistenza fatalmente influiscono sopra il giudizio dei contemporanei intorno ai pregi dell'opera di uno scrittore, così anche sul valore di GUGLIELMO LIBRI come storico furono a varie riprese e da varie parti sollevati dei dubbi, i quali, se fondati, offuscherebbero anche l'aureola di riconoscenza che tuttavia lo circonda. Sono dessi giustificati? Ecco la questione che mi propongo di esaminare serenamente, dopo di avere accuratamente studiati tutti i lavori, di grande o di piccola mole, in cui egli si è occupato dell'evoluzione del pensiero scientifico attraverso i secoli (1).

G. Libri durante il suo primo trentennio.

GUGLIELMO (*Bruto, Icilio, Timoleone*) LIBRI *Conte Carrucci della Sommaja*, nacque a Firenze il 2 gennaio 1802. Mentre dalla propria madre — ROSA DEL ROSSO — venne amorosamente avviato sul cammino della virtù, dal padre — GIORGIO LIBRI BAGNANO — avventuriere di cattiva lega e di peggiore fama, se anche fu con mano ferma indirizzato verso studi

(1) Esaurienti notizie bio-bibliografiche intorno al matematico di cui ci occupiamo si trovano nel *Commentario storico-scientifico sulla vita e le opere del Conte Guglielmo Libri illustre matematico fiorentino del Secolo XIX* (II ed., Firenze, 1879) di ANDREA STIATTESI, al quale abbiamo attinto a larga mano.

Digitized by Google

forti e severi, non potè ricevere che pessimi esempi: circostanza della quale si deve tener conto, non certo per trasformare le colpe del genitore in altrettante armi contro la prole (1), ma per ammettere la possibilità che il discendente di un falsario recasse in sè dalla nascita un'invincibile propensione al mal fare.

Esauriti gli studi secondari nella città natìa, il giovane GUGLIELMO si recò alla vicina Pisa per compiervi il corso universitario nella Facoltà di Scienze (2), e tali e tante speranze di sè fece nascere nei propri maestri che questi lo vollero, non appena laureato, loro collega; sicchè egli, prima ancora di avere compiuti vent'anni, fu chiamato (1823) a professare Fisica matematica nell'illustre Ateneo che l'aveva avuto sino allora discepolo. Se non che la malferma salute lo costrinse a chiedere poco dopo di venire sollevato dal peso dell'insegnamento; ed il GRANDUCA DI TOSCANA, con Decreto del 26 ottobre 1824, soddisfaceva tal desiderio nel modo più lusinghiero e munifico, nominando, cioè, il LIBRI professore emerito con conservazione integrale dell'onorario (350 scudi annui); disposizione che fu scrupolosamente osservata, non soltanto da colui che l'aveva deliberata, ma anche dal Governo italiano succeduto al granducale, fino al giorno (28 settembre 1869) nel quale chi ne fruiva scese nella tomba.

Libero da qualsiasi incombenza ufficiale, il LIBRI si consacrò completamente agli studi, alternando le ricerche di alta Analisi e di Teoria dei Numeri con quelle di storia e di erudizione; le numerose pubblicazioni da lui fatte in quel tempo — alcune delle quali ricevettero (premio ambito ed insperato) il plauso di GAUSS — sono inconfutabili testimonianze della fecondità delle sue elucubrazioni.

Si direbbe, però, che l'ambiente fiorentino apparisse troppo angusto alle mire ambiziose dell'irrequieto patrizio, specialmente dopo che egli

---

(1) La tendenza qui accennata informa il documentatissimo lavoro di C. PITOLLET, *Pour la biographie critique de Guillaume Libri. Le Comte George Libry falsificateur de lettres de change, d'après le Dossier original de ses procès à Lyon en 1813 et 1815-16* (in *Il Libro e la Stampa*, Anno VII, 1913).

(2) Un quaderno scolastico che, per la gentilezza del compianto prof. D. BESSO, divenne mia proprietà all'epoca della deplorata dispersione della Biblioteca raccolta da B. BONCOMPAGNI, porge particolareggiate notizie intorno agli studi che andava facendo il LIBRI durante l'anno 1821; esso si apre con una trascrizione della nota memoria di GAUSS *Summatio quarundam serierum singularium*; contiene poi cenni intorno alle ricerche ed alle « scoperte » di Calcolo integrale che andava facendo il giovane scolaro; ad es., vi si legge: « A dì 10 Agosto 1821, alle 5 dopo desinare ho scoperto il modo d'integrare tutte l'equazioni a differenze finite a due variabili di qualunque natura le siano per mezzo d'integrali definiti »; altrove si leggono dati precisi sopra le ore destinate ogni giorno alle differenti materie di studio; ecc.

Digitized by Google

era venuto a contatto con alcuni celebri scienziati francesi che visitarono in quell'epoca l'Italia (fra i quali giova ricordare F. ARAGO); di tale stato d'animo fa fede la deliberazione, da lui presa nel 1825, d'intraprendere un viaggio di studi avente per mèta Parigi. A ciò fu incoraggiato da GINO CAPPONI, il quale gli fu largo di numerose commendatizie (1): e da una lettera da lui diretta all'amico addì 24 giugno di quell'anno (2), si apprendono preziosi particolari intorno alle sue occupazioni scientifiche ed interessanti giudizi sopra gli scienziati francesi del tempo. « Quanto più mi allontano e sto fuori », egli scriveva, « e più sento che sono italiano; ed al desiderio, che avevo prima, di studiare per utile mio, si è aggiunto quello di pervenire a qualche cosa che faccia onore al mio paese, e di poter dire un giorno: Io sono italiano, e l'Italia val qualchecosa »; nobili sentimenti che sono in perfetto accordo con le direttive ed il tòno di tutti i suoi lavori storici e bibliografici (3).

È forza ritenere che i dotti coi quali egli venne in contatto a Parigi lo abbiano sommamente apprezzato se, l'anno seguente, egli per poco non venne eletto corrispondente dell'Istituto di Francia, e fu considerato come destinato ad ottenere il primo posto che si sarebbe reso vacante nella corporazione scientifica di cui va giustamente orgogliosa la nostra sorella latina (4).

Ritornato in patria, il suo carattere bizzarro (5) gli procurò dissapori, dissensi, litigi i cui echi si trovano in parecchi passi del suo carteggio (6). Forse per effetto di essi, forse l'esempio offertogli dal padre e,

---

(1) A. CARRARESI, *Lettere di Gino Capponi e di altri a lui*, Vol. I (Firenze 1882) pag. 195 e 188. Durante questo soggiorno il LIBRI si trovò in strettezze finanziarie, avendo dovuto soccorrere il padre, che allora viveva a Bruxelles; il CAPPONI lo tolse d'imbarazzo (vol. cit. pag. 198).

(2) Vol. cit. pag. 190-3.

(3) Essi appaiono anche in una lettera diretta nello stesso torno di tempo al GIORDANI (v. F. VESPIGNANI, *Due lettere inedite di Guglielmo Libri con la giunta di un aneddoto della gioventù di Galileo Galilei, l'uno e le altre da una copia di mano del Libri medesimo:* Firenze, 1881), nella quale, fra l'altro, il LIBRI altamente biasimava il « desiderio » degli Italiani « delle cose oltramontane », che egli giudicava « una delle nostre pesti, e forma forse uno degli anelli della lunga catena che ci stringe ».

(4) V. la lettera del LIBRI al CAPPONI del 21 ottobre 1826 pubblicata dal CARRARESI vol. cit. pag. 207. A onore del Nostro va anche ricordato che CAUCHY, nel rendere conto nel *Bulletin* di FERUSSAC di una memoria da lui pubblicata nelle *Annales de Mathématiques*, dichiarava che « les découvertes de M. Libri formeront une révolution complète dans la théorie des nombres ».

(5) Alludendo a lui il CAPPONI scriveva addì 10 aprile 1825: « Egli è strano; ma ha molti capitali, i quali sarebbe troppo gran danno se andassero dissipati » (v. *Lettere di Gino Capponi*, T. I, pag. 196).

(6) V. *Lettere di Gino Capponi*, Vol. I, 176, 209, 342; Vol. II. (Firenze, 1883) pag. 49, 59, 116.

Digitized by Google

forse più che tutto, il desiderio di entrare in ambienti più scientifici di quanto fosse quello che gli offriva la sua Firenze, indussero il LIBRI ad intraprendere quattro anni dopo un secondo viaggio, a scopo di studi. A Milano — lo narrò egli stesso in una lettera diretta al CAPPONI il 21 aprile 1830 (1) — spese molte ore sopra i manoscritti di LEONARDO DA VINCI, del quale trascrisse in gran parte il Codice Atlantico; passato a Torino, pose momentaneamente in disparte le ricerche erudite, per tutto consacrarsi alle Matematiche. Lasciata poi l'Italia si recò a Parigi, ove fu ammesso a leggere una memoria dinnanzi a quell'Accademia delle Scienze e studiò altri manoscritti di LEONARDO; inoltre ebbe occasione di assistere e — se si presta fede a quanto egli compiacevasi di narrare — partecipare alla rivoluzione del luglio 1830.

Egli, però, non pensava allora di prendere stabile dimora in Francia; ed ai primi del 1831 lo ritroviamo a Firenze, intento ad ordire una piccola trama contro il Granduca regnante allora in Toscana (2). Era in animo dei congiurati di sorprendere quel sovrano al teatro della « Pergola » la sera del Berlingaccio (ultimo giovedì di Carnevale) ed obbligarlo a firmare la costituzione; ciò, secondo loro, sarebbe stata scintilla sufficiente a far divampare un vasto incendio per tutta la penisola. Ma al momento prestabilito o il LIBRI non tenne la parola o i suoi compagni di fede non osservarono gli impegni presi; fatto sta che tutto finì in una inconcludente dimostrazione. Si scatenò allora su di lui, che nel frattempo aveva riparato in Marsiglia, un uragano di tremende accuse, delle quali si fece interprete il fido amico GIOVITA SCALVINI: la lettera di giustificazione, che questi ebbe in risposta e che venne di recente resa di pubblica ragione (3), dimostra che realmente nulla si può rimproverare al LIBRI, se non d'essersi lasciato cullare, con deplorevole leggerezza, da sogni ingannatori. D'altronde di tal colpa egli solo dovette soffrire qualche danno, egli solo essendo stato colpito da una condanna di bando dalla sua patria: affrettiamoci a soggiungere che, poco dopo, il Granduca, paternamente bonario, mitigò l'asprezza di tale disposizione, dimodoché il LIBRI, non soltanto potè di quando in quando abbracciare la sua adorata madre, ma (in seguito ai buoni uffici di ALESSANDRO HUMBOLDT) continuò a godere dello stipendio di professore emerito e poté persino riscuotere le mesate arretrate.

---

(1) *Op. cit.* Vol. I, pag. 307.

(2) Cfr. *Scritti editi e inediti di Gino Capponi per cura di* M. TABARRINI, Vol. II. (Firenze, 1877) pag. 39 e segg.

(3) A. LUZIO, *Una lettera auto-apologetica di Guglielmo Libri* (in *Miscellanea di studi storici in onore di Giovanni Sforza*, Lucca, 1915); essa porta la data « Marsilia, 17 aprile 1831 ».

Digitized by Google

La dimora in Francia di G. Libri.

In seguito a questo malaugurato incidente il LIBRI deliberò di prendere stabile dimora in Francia, ove già contava amici celebri e potenti, quali FOURIER, POISSON, CUVIER, AMPÈRE. THÉNARD, FRESNEL ed ARAGO.

Presa la nazionalità francese (2 febbraio 1833), addì 16 dicembre 1834 (1), grazie all'efficace appoggio di POISSON, fu chiamato alla Sorbona nel posto vacante per la morte di HACHETTE, e per più di un decennio espose dalla cattedra, non la Geometria descrittiva come il suo predecessore, ma il Calcolo della probabilità. Già un anno prima era stata a lui conferita la più eccelsa distinzione a cui possono aspirare gli scienziati francesi, cioè era stato chiamato ad occupare nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze il seggio sino allora coperto da LEGENDRE (2). Nello stesso torno di tempo la *Revue des Deux Mondes* gli apriva le

---

(1) Circa in quest'epoca contrasse matrimonio con MÉLANIE DOUBLE (nota favorevolmente nel mondo letterario del tempo, specialmente per un *Eloge de B. Pascal* coronato dall'Accademia francese) che, sino al 1865, gli fu compagna fedele, nella prospera e nell'avversa fortuna.

(2) Quest'elezione essendo anteriore alla pubblicazione regolare dei *Comptes rendus*, i relativi particolari debbono cercarsi altrove; ora una lettera scritta dal LIBRI a G. CAPPONI il 19 marzo 1833 (*Lettera di G. C.*, Volume I, pag 348-9) ne porge di così precisi che reputiamo utile riferirli:

« Ieri l'Istituto mi ha eletto socio ordinario, in luogo del Legendre, morto di fresco. I concorrenti erano quattro disposti in quest'ordine: 1° Libri, 2° Sturm, 3° Duhamel, 4° Liouville. Di cinquantaquattro voti, io n'ebbi trentasette, il Duhamel sedici, il Liouville uno, onde fui eletto al primo squittinio. Questo onore grandissimo supera d'assai il poco merito mio; ma spero in seguito di farmene più degno, studiando e lavorando... L'Arago, il Poisson, il Lacroix, il Thénard e il Biot furono i miei principali sostegni; ma non mancarono emuli e contrari. Tra questi principalissimo fu Charles Dupin: non per odio contro di me, ma solo per non confessare che la geometria francese fosse vinta dagli stranieri. Anche i giornali gridarono un poco; e i miei amici volevano rispondere; ma io nol volli perchè abborro i pettegolezzi. Un vecchio di circa novant'anni (il Tessier), sollecitato dal Dupin a non essere favorevole a uno straniero, rispose: *J'ai voté dans le temps pour Lagrange, j'aurais voté pour Cassini; maintenant je voterai pour M. Libri* ».

Riguardo alla stessa elezione N. TOMMASEO, che trovavasi allora a Parigi, scriveva l'11 gennaio 1835 a G. CAPPONI quanto segue: « Il Libri fu nominato in più legittimo modo; proposto da' professori della Facoltà ed approvato dal Governo che quasi mai non dissente dai voti loro. Poisson lo protesse; ed egli si frega a Poisson, il quale, dice Fauriel, *est un plat paysan et aime les plats et les platitudes*. Ma nessuno giudica immeritato l'onore. I più severi negano al Libri le invenzioni matematiche da lui vantate, non la scienza storica della scienza. Ned egli avrebbe bisogno di brogliare e di piaggiare, per aver fama: ma per aver posti e quattrini, senza sudicerie, in que-

Digitized by Google

sue colonne e, nel 1838, egli prendeva posto fra i dodici Membri dell'Istituto costituenti il « Bureau de rédaction » del *Journal des Savants*, periodico al quale arrecò contributi della più alta importanza. Sino dal 1836 LACROIX avevalo scelto come proprio sostituto nella cattedra di Matematica al Collegio di Francia; morto il LACROIX (25 maggio 1843), se ne contesero la successione CAUCHY, LIOUVILLE e LIBRI; dopo tre scrutinii l'assemblea dei professori del detto Collegio si decideva per il nostro connazionale; l'Accademia delle Scienze, interpellata dal Ministero della Pubblica Istruzione, nella seduta del 3 luglio dello stesso anno, emetteva un voto nel medesimo senso (si noti però che, sopra 45 votanti, solo 13 gli furono favorevoli, essendovi state 25 schede bianche e 3 voti per CAUCHY, benchè questi avesse ritirata la propria candidatura) (1), voto che il Governo francese si affrettava a ratificare (Decreto del 4 luglio 1843).

La fortuna di questo profugo in un paese geloso della propria gloria nazionale come la Francia è veramente inaudita, e riesce tanto più difficile comprendere come la Dea cieca e capricciosa sia rimasta a lui per tanto tempo fedele, quando percorrendo i Resoconti delle sedute dell'Istituto di Francia si acquistano le prove che la grande considerazione, di cui egli godeva come matematico giungendo dall'Italia, sia andata incessantemente diminuendo, man mano che si avvertiva la limitata portata dei metodi di cui egli non stancavasi di vantare l'importanza, e si scopriva la vacuità di certe sue formole, le quali, sotto un'imponente generalità, mascherano un'insanabile impotenza. Ed invero, mentre nel 1836 egli era chiamato a far parte della Commissione aggiudicatrice del « Gran Prix des Sciences mathématiques » (*C. R.*, T. III, p. 111), mentre poco dopo veniva, assieme ad altri, incaricato di proporre un tema per l'analogo concorso dell'anno 1838 (*C. R.*, T. IV, p. 240), mentre la carica di giudice in tale concorso gli veniva conferita ancora nell'anno successivo (*C. R.*, T. IV, p. 670), mai più in seguito egli ottenne una siffatta significante onorificenza. A noi mancano esplicite testimonianze coeve per spiegare questo mutamento di attitudine da parte dei membri dell'Accademia; però la raccolta dei *Comptes rendus*, accuratamente esaminata, ci porge non pochi elementi per rendercene ragione.

Infatti, nella seduta del 19 febbraio 1838 egli prese la parola per tentare

---

sto paese è difficile assai ». Vedi *N. Tommaseo e G. Capponi. Carteggio inedito dal 1833 al 1874 per cura di* I. DEL LUNGO *e* P. PRUNAS (Vol. I. Bologna, 1911, pag. 212-3).

(1) *Comptes rendus*, T. XVII, pag. 38 e L. AM. SÉDILLOT, *Les professeurs de mathématique et de physique générale au Collège de France* (in *Bull. di bibl. e storia*, ecc., T. III, 1870, pag. 146).

Digitized by Google

un'autodifesa riguardo a critiche sostanziali fatte dal LIOUVILLE (1) al *Mémoire sur la théorie de la chaleur* da lui pubblicato, prima fra i suoi *Mémoires de mathématiques et de physique* e poi nel T. VII del *Giornale di Crelle*; e ritornò sulla questione, veramente piuttosto in abito da avvocato che da vero scienziato, nell'esordio al *Mémoire sur la théorie générale des équations différentielles linéaires*, presentato all'Accademia delle Scienze il 13 maggio 1839 (*C. R.*, T. VII, pag. 732). LIOUVILLE confermò il proprio punto di vista e la discussione continuò a lungo, con l'intervento di C. STURM accanto a LIOUVILLE (*C. R.*, T. VIII., pag. 788, 789, 792, 798), senza che le parti giungessero ad un accordo. Quale giudizio pronunciassero al riguardo, almeno nel fondo della loro coscienza, i geometri dell'Istituto si può desumere dal fatto che il LIOUVILLE, appunto in quel tempo (3 giugno 1839), veniva chiamato a sedere al loro fianco.

L'insanabile dissenso fra i due geometri citati, di cui le discussioni surriferite rappresentano un primo sintomo, divampò nuovamente quando il LIBRI, addì 24 febbraio 1840, comunicò all'Accademia delle Scienze alcune critiche infondate sopra un lavoro del LEJEUNE-DIRICHLET (*C. R.*, T. X, pag. 311), con lo scopo inconfessato ma evidente di richiamare l'attenzione dei colleghi sopra le sue precedenti ricerche aritmetiche. Allora LIOUVILLE sorse spontaneamente in difesa del grande matematico tedesco (vol. cit. p. 343) e sottopose alcuni scritti del collega italiano ad una critica demolitrice. Una fiacca replica, a scopo di rappresaglia, di questo (*id.* pag. 345) non ebbe altro risultato che provocare una conferma del LIOUVILLE (*id.*, pag. 347) e nuove critiche a lavori del LIBRI (*id.*, pag. 381), sicchè questi finì in sostanza per dichiararsi vinto (*id.* pag. 383).

Memori dell'aurea massima di VOLTAIRE « nel dir tutto sta il segreto di riuscire noiosi », sorvoliamo sopra altri incidenti somiglianti e limitiamoci a notare che un'altra congenere discussione, con esito non dissimile, nacque fra gli stessi matematici nel corso del secondo semestre dell'anno 1843, in occasione di un lavoro dell'HERMITE, e che l'incisiva risposta data da un altro distinto matematico, J. B. BIOT (*C. R.*, T. XII pag. 523), ad un'imprudente osservazione auto-apologetica del LIBRI (*ivi*, pag. 522), sono documenti irrefragabili della rapida discesa della stima in cui

(1) *Observations à un Mémoire de M. Libri relatif à la théorie de la chaleur* (*Journ. de Mathém.*, T. III, 1838, pag. 350-4). Non è questo il primo degli attacchi mossi da LIOUVILLE al geometra italiano; giacchè nella nota *Sur une lettre de d'Alembert à Lagrange* (id. T. II, 1837, pag. 245-7) egli ha rivendicata a D'ALEMBERT una scoperta dal LACROIX attribuita a LIBRI, mentre nel T. III, pag. 3 del *Journal* da lui diretto, egli ha riprodotta una grave obbiezione mossa da LEJEUNE-DIRICHLET ad un suo lavoro aritmetico.

Digitized by Google

erano tenuti i suoi lavori matematici da parte dei competenti in materia.

Ora, mentre nubi sempre più procellose venivano ad oscurare l'astro del LIBRI come scienziato, la sua fama letteraria e storica si andava vieppiù affermando e diffondendo nella sua nuova e nella sua antica patria. E noi ora ci volgiamo ad indagare se ciò sia dovuto a casi singolarmente propizi, oppure se sia l'espressione di giudizi conformi a rigorosa giustizia, premettendo a tale disamina l'osservazione che noi ci occuperemo quasi esclusivamente degli scritti del LIBRI pertinenti alla storia delle scienze fisico-matematiche, ma che alla sua rinomanza contribuirono efficacemente molte altre pubblicazioni, relative a vari rami di storia od a recenti scoperte scientifiche, apparse in buon numero nel *Journal des Savants*, nella *Revue des Deux Mondes* e nell'*Antologia* di Firenze.

Scritti di G. Libri sopra la storia scientifica dell'Italia.

Percorrendo tutte le pubblicazioni fatte dal LIBRI dopo il suo trasferimento in Francia si è condotti ad ammettere che in lui, come in altri profughi, la distanza abbia valso a rendere più intenso e vigile l'affetto verso la patria, chè rari sono i suoi scritti che all'Italia non si riferiscano o che dell'Italia non parlino, sia pure per incidenza; circostanza questa tanto più notevole giacchè molte videro la luce in quel periodo di grigio scoramento, succeduto alle sterili rivoluzioni degli anni 1830 e 1831, a vincere il quale, come è ben noto, G. MAZZINI si adoperò efficacemente, a partire del 1839, imprimendo vita novella alla *Giovine Italia* (1).

Dei sentimenti patriottici del pensatore di cui ci occupiamo offrono chiara testimonianza quattro articoli da lui pubblicati nella *Revue des Deux Mondes* (15 marzo, 15 giugno e 15 agosto 1832 e 15 febbraio 1833) col titolo *Revue scientifique de l'Italie* ed il cui intento politico è indiscutibile; vi sono descritte le condizioni della cultura successivamente negli Stati Sardi, nel Regno Lombardo-Veneto, nella Toscana e nei Ducati, finalmente nello Stato Pontificio, e sono dati saggi consigli ai governi nazionali (escluso, cioè, quello che gravava sopra la Lombardia e la Venezia), per indurli a promuovere i buoni studi, ed ai cittadini, per persuaderli a concorrere attivamente all'elevazione del livello intellettuale delle popolazioni. Lo scopo e l'intonazione di questi articoli riscossero il plauso di un giudice non eccessivamente indulgente, il MAZZINI (2), il quale ne trascrisse un brano ad uso di G. LA CECILIA, che a sua volta lo sfruttò nell'articolo sopra *La Sicilia considerata in riguardo all'unità d'Italia*.

(1) Cfr. la lettera a P. GIANNONE da Londra il 17 agosto 1839 in *Scritti editi ed inediti di G. Mazzini*, Vol. XVIII (Imola, 1914), pag. 157-164.

(2) *Scritti editi ed inediti*, Vol. V. (Imola, 1909) pag. 236-7.

Digitized by Google

Questo fatto meritava di venire rilevato perchè un posteriore articolo del LIBRI — intitolato *De l'influence française en Italie* (1) — ed inteso a dimostrare che, caduto NAPOLEONE, la Francia aveva gradatamente perduto l'impero che essa dinanzi esercitava sopra gli spiriti in Italia, e ad esortarla a conquistare il terreno perduto — provocò invece il biasimo del grande agitatore genovese, il quale, gelosissimo della dignità della patria, notava (2): « L'articolo del LIBRI sarà buonissimo; ma l'intento e ciò che vi si dice dell'Italia è malissimo: secondo il mio modo di vedere. Raccomandare, quand'anche si crede di doverlo fare, un paese ad un altro e dire: non vogliate conquistarci, lasciateci liberi — dicendo nello stesso tempo, esplicitamente com'ei fa: siamo nulli, impotenti, vili, non abbiamo speranza di far da noi; se ci trattate male chiameremo i tedeschi — non mi par savio nè nazionale »; osservazioni, crudamente espresse, ma certamente conformi al vero.

Altra attestazione del caldo affetto del LIBRI per la patria sua ci viene offerta dal *Discorso intorno alla storia scientifica della Toscana*, da lui scritto a Carpentras il 6 novembre 1835 e subito pubblicato nell'*Antologia* (3), importante specialmente perchè contiene il primo pubblico annuncio dell'intenzione di esporre, in un'opera di lunga lena, le glorie scientifiche dell'Italia. Nella sua prima fase di sviluppo tale disegno abbracciava la Matematica e la Fisica in Toscana, dal Risorgimento sino alla fine del Secolo XVII e doveva venire colorito considerando distintamente la vita degli scienziati, gli studi da essi compiuti ed i metodi adoperati, tenendo il debito conto delle condizioni dei tempi, dell'indole de' popoli e dei bisogni della crescente civiltà. Le numerose dotte note di cui va corredato tale scritto fanno fede della vasta e solida preparazione del LIBRI ad assolvere il non facile còmpito spontaneamente assunto.

Ora, mentre in origine egli giudicò opportuno di limitare le proprie indagini alla terra natìa (e ciò non per gretto zelo municipale, ma per il timore che esorbitasse dalle proprie forze il tracciare, in tutta la sua ampiezza, un quadro di quanto « l'ingrata Europa debba all'Italia »), nell'effettuare il suo progetto avvertì che, così facendo, il suo lavoro o sarebbe riuscito per parecchie ragioni manchevole, oppure egli sarebbe stato trascinato a digressioni estranee al tema scelto. In conseguenza l'opera — di cui quel *Discorso* servì come araldo ed alla quale gli fu concesso dar mano soltanto quando ebbe riordinata la sua raccolta di documenti, confusi o dispersi durante una fuga subitanea — porta il titolo

(1) *Revue des Deux Mondes*, 1° marzo 1841.
(2) *Scritti editi ed inediti*, V. XX (Imola, 1914) pag. 114.
(3) N. 131 della Collezione.

Digitized by Google

ben più comprensivo di *Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la Renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII Siècle.* L'epigrafe «Italia lacerata, Italia mia» tratta dal MAGALOTTI e la dedica «L'auteur offre cet Ouvrage aux Amis qu'il a laissé en Italie» stanno a provare come da Parigi, dove scriveva, il LIBRI guardava incessantemente al di qua delle Alpi.

Il T. I fu presentato all'Accademia francese delle Scienze il 7 Dicembre 1835: ma tutto lo *stock* di copie essendo stato preda di un terribile incendio (1), la stampa dovette venire rinnovata, e soltanto il 24 maggio 1838 i due primi volumi nella nuova veste (e si badi che, riguardo al primo, si trattava in realtà di una II edizione notevolmente migliorata) entrarono nella biblioteca di quella grande corporazione scientifica. I due volumi successivi uscirono negli anni 1840 e 1841 (2); altri due, destinati a coronare l'opera, benchè dichiarati dall'editore «sous presse», non vennero mai pubblicati.

Chiunque percorra questa celebre opera non può non rimanere colpito dalla larghezza di vedute dimostrata dall'autore e dalla vastità e profondità della sua erudizione, la quale si può ben dire senza limiti (3). La sua magica penna rende attraenti i più aridi argomenti, sicchè il lettore, abbagliato, vede passare dinanzi ai propri occhi tutti gli avvenimenti legati alla evoluzione della civiltà in Italia, tutti i nostri connazionali che in qualche misura contribuirono all'incremento del sapere, tutto il contributo che la patria nostra diede alla fulgida collezione di scritti costituenti la gloria dello spirito umano.

Tuttavia se, dopo una prima lettura, si riesce a sottrarsi al potente fascino esercitato dal LIBRI sopra i propri lettori, si è costretti a riconoscere che molte cose da lui esposte, sono estranee all'argomento, od almeno hanno

---

(1) Particolari sopra questo immane disastro «che ha consumato per due milioni e mezzo di libri a prezzo di fabbrica e per sei milioni almeno a prezzo di catalogo» si apprendono dalla lettera scritta dal LIBRI al CAPPONI il 27 dicembre 1835 (*Lettere di G. Capponi*, Vol. I, pag. 409).

(2) La pubblicazione di questi volumi fu ritardata in parte dalle precarie condizioni di salute del LIBRI ed in parte da un furto di cui egli fu vittima per opera di un suo domestico; cfr. la lettera che egli scrisse al CAPPONI il 19 marzo 1841 (*Lettera di G. Capponi*, Vol. II, Firenze, 1883, pag. 15-22).

(3) NICOLÒ TOMMASEO, che praticò a lungo a Parigi il LIBRI, senza divenirne entusiasta ammiratore, ebbe a giudicarlo «uno dei pochi che abbiano nell'arte cercata la scienza, nella scienza la società, il bello nel vero. In molte ed importanti cose io con lui non consento: ma non posso non lodare cotesto ampio modo di trattare gli argomenti, cotesta diligenza delle piccole cose in mezzo alla sollecitudine delle grandi, coteste perseveranti indagini della patria gloria e ricchezza» (*Dizionario estetico*, Firenze, 1869, col. 184).

Digitized by Google

con questo un legame molto discutibile. Ed infatti, mentre nel titolo egli aveva preso impegno di occuparsi esclusivamente di scienze matematiche, in realtà trattò, non solo di quelle a cui aveva volto la mente tracciando nel succitato *Discorso* le prime linee del suo lavoro, ma altre, quali la navigazione e la statistica, la demografia e l'alchimia e persino la politica e la finanza. Come conseguenza di ciò sta il fatto, da molti deplorato, che le pagine dell'*Histoire* relative alle matematiche propriamente dette sono molto meno numerose di quanto fosse desiderato e presumibile. Nè va taciuto che il LIBRI, assillato dalla smania di assicurarsi un grande numero di lettori, bandì dal testo ogni considerazione matematica, onde non vi si trova nè una formola nè una figura. Ma poichè egli ben sapeva che solo dai particolari minuti ed esatti il suo scritto avrebbe acquistato carattere scientifico e valore permanente, così si attardò a somministrarli nelle lunghe illustrazioni a piè di pagina e più ancora nelle estese *Note* stampate al termine di ciascun volume e che ne formano all'incirca una metà. A tali *Note* l'opera in questione è debitrice del trovarsi tuttora, con collocazione onorifica, nella biblioteca di qualunque storico delle scienze positive, chè racchiudono un'enorme quantità di documenti ghiotti od importanti, inediti o rarissimi, che dianzi costituivano il monopolio di pochi eletti. Quando si rifletta che i manoscritti di LEONARDO DA VINCI erano allora pressochè totalmente inesplorati; che le opere del FIBONACCI attendevano ancora che B. BONCOMPAGNI le desse alle stampe; che GALILEO e la sua scuola erano conosciuti soltanto in modo frammentario; che la generalità degli algebristi italiani anteriori a LUCA PACIOLI dormono ancora il sonno del giusto in biblioteche che quasi nessun matematico si cura di esplorare; che la scienza araba è nota oggi ancora soltanto in piccolissima parte; che prima del LIBRI era sconosciuta agli storici della scienza quella inesauribile fonte di notizie sul glorioso periodo galileiano che è la biblioteca del PEIRESC (1): si vedrà agevolmente come ben pochi, e fosse nessuno, può vantare titoli di benemerenza paragonabili a quello che acquistossi il LIBRI nel far conoscere le vie che la scienza ha percorse per passare dalle profonde tenebre medioevali alla luce sfolgorante dell'era moderna. Potrà qualche anima timorata sentirsi offesa dall'intonazione francamente anticlericale in cui è scritta tutta l'opera (2); ma chi potrà negare la generosità di sentimenti manifestati dal LIBRI contemplando inorridito il rogo di GIORDANO BRUNO e il carcere

(1) Cfr. A. FAVARO, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei*, XXXIX, *Nicolò Fabri di Peiresc* (Atti del R. Ist. Veneto, T. LXXVI, 1916-17, P. II, pag. 591-636).

(2) Siffatta intonazione provocò biasimi da parte del CAPPONI, come risulta dalle difese di sè stesso che il LIBRI giudicò necessarie (*Lettere di G. Capponi*, T. I, pag. 484 e 497).

Digitized by Google

di TOMMASO CAMPANELLA ?... Un solo appunto molto serio può, a nostro avviso, essergli rivolto (e vedremo più avanti che non gli fu risparmiato), quello di avere disconosciuta e negata la grandezza di VIÈTE (cfr. *Histoire*, T. I, pag. 99, nota; T. II, pag. 34; T. III, pagg. 23 e 620); senza tentare di ottenere la sua assoluzione da tale colpa, insistiamo piuttosto sopra la somma importanza delle pagine che egli dedicò a LEONARDO da VINCI, della cui opera scientifica egli per primo tentò delineare un quadro fedele, dopo di averne studiati a fondo, con intelletto d'amore, i più importanti manoscritti.

Il T. IV dell'*Histoire* è, in massima parte, dedicato a GALILEO; spogliato dalle eruditissime note illustrative divenne l'*Essai sur la vie et les travaux de Galilée* apparso, in anticipazione, nella puntata 15 luglio 1841 della *Revue des Deux Mondes*; esso fu tradotto in italiano da GIUSEPPE SACCHI, in occasione del Congresso degli scienziati italiani, che ebbe luogo in quell'anno a Firenze, e pubblicato in settembre negli *Annali universali di statistica*.

Va inoltre notato che, prima, l'articolo sopra GALILEO della ben nota *Cabinet Cyclopedia* del LADNER, dovuto, se la fama non mente, al BREWSTER, porse occasione al LIBRI di scrivere, quasi come primo saggio delle sue ricerche galileiane, due documentatissimi articoli (1), ove, oltre a parecchie rettifiche a quanto è esposto in quel lavoro, si trovano enumerate alcune copiose fonti d'informazione che l'autore di quell'articolo non aveva potuto o saputo utilizzare; il LIBRI afferrò poi questa favorevole occasione per insistere sopra la necessità di un'edizione, veramente completa, delle *Opere di Galileo*. Ora, a tale saggia esortazione non rimase sordo il governo toscano, il quale deliberò poco dopo d'intraprenderla e, avendo tentato indarno di affidarne la direzione prima al LIBRI, poi all'ANTINÒRI, si decise per l'ALBÉRI, che condusse a termine il lavoro. Aggiungiamo che alcuni disgustosi incidenti accaduti agli inizi di questa grande impresa ebbero un'eco anche entro il recinto dell'Istituto di Francia (*C. R.*, T. XVII, 2° sem. 1843, pagg. 268, 271, 253), dando luogo a un battibecco (uno dei tanti, come vedremo) tra LIBRI ed ARAGO.

Volendo far cenno di tutti gli scritti del LIBRI sopra GALILEO e la sua scuola, bisogna ancora ricordare la sua recensione (2) della III ed., curata dell'ANTINÒRI, della notissima opera *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*. Volendo invece enumerare tutti i contributi da lui dati alla storia scientifica dell'Italia, debbonsi ancora citare alcune considerazioni esposte all'Accademia delle Scienze di Parigi, una

(1) *Journal des Savants*, settembre e ottobre 1840.
(2) *Id.*, febbraio, maggio 1843 e giugno 1844.

Digitized by Google

per rivendicare a B. CASTELLI l'invenzione di un metodo per conservare il grano (*C. R.* T. VI, 1° sem. 1836, pag. 795), una seconda (*id* T. IX, 2° sem. 1837 p. 289) per escludere che MARCANTONIO CELLIO debba annoverarsi fra i precursori di DAGUERRE, l'ultima (*ivi*, pag. 289-90) per rettificare l'interpretazione data dal ROULIN per un'iscrizione numerica collocata sopra la cattedrale di Pistoia. Da tutto ciò emerge che il LIBRI confermava con la propria attitudine l'opinione che « l'histoire se sont les faits » (1).

Ricerche del Libri sopra Fermat.

La bibliofilia — così radicata nel LIBRI (2) e che, trasformatasi col tempo in vera mania, fu causa non ultima di tutte le sue sciagure — designandolo, sino dai primordi del suo soggiorno in Francia, come una vera provvidenza per i librai antiquari, gli concesse la singolare ventura di porre la mano sopra una collezione straordinariamente importante di scritti di FERMAT, fatta dal noto matematico ARBOGAST e che, dopo la costui morte, era stata posta in vendita a Metz. Dell'insperato acquisto egli si affrettò a dare comunicazione ai colleghi dell'Istituto (*C. R.* T. IX, pag. 357-9), manifestando poi (*ivi* pag. 773) l'intenzione di dare alle stampe quella parte che fosse risultata inedita. Circa nello stesso tempo (settembre 1839) inseriva nel *Journal des Savants* un importante articolo, dal titolo *Des manuscrits inédits de Fermat*, ove, dopo brevi considerazioni intese a porre in luce il grande valore di questo matematico, è descritta la dispersione de' suoi scritti, sono enumerati quelli che l'ARBOGAST riuscì a salvare dalla sovrastante distruzione ed è confermato l'impegno di pubblicare tutto quanto di FERMAT a lui o ad altri fosse dato di raccogliere: anzi, per agevolare il salvataggio dei manoscritti dispersi ed evitare false attribuzioni, fece riprodurre in litografia alcune linee di un autografo e la firma del sommo scienziato francese.

Due anni più tardi (3) egli ritornò sull'argomento per esporre il risultato delle indagini da lui compiute a Tolosa, durante un soggiorno fattovi venendo dall'Italia, risultato, a dir vero, non molto cospicuo, chè può dirsi riducasi alla scoperta della corrispondenza tenuta da un erudito del tempo, il JUSTEL, con SAMUELE FERMAT. Però questo soggiorno ebbe un'altra più importante conseguenza, quella, cioè, di richiamare l'attenzione dei Tolosani sopra il loro illustre concittadino e di spingerli a indagini archivistiche capaci di eliminare i punti oscuri che

(1) *C. R.* T. XII, 1839, pag. 680.
(2) Di essa trovansi numerose prove nel suo carteggio col CAPPONI.
(3) *Journal des Savants*, maggio 1841.

Digitized by Google

presentava tuttora la sua biografia; così (1), grazie alle fruttifere fatiche di un membro del foro tolosano, il TOBIAC, si scoprì che FERMAT ebbe il battesimo a Beaumont de Lomagne il 20 agosto 1601, che la sua famiglia era borghese, ma che nel periodo 1631-38 egli fu ascritto alla « noblesse de robe », grazie ai servigi resi allo stato in qualità di magistrato (nella magistratura era stato ammesso nel 1631, poco avanti il suo matrimonio), e che egli morì a Chartres il 12 gennaio 1665. Tali elementi d'allora in poi fanno parte integrante di ogni biografia dell'immortale scienziato.

Per effetto di tali pubblicazioni il grande aritmetico divenne per qualche tempo di moda; ed il Governo francese decise d'intraprendere un'edizione completa delle sue opere; in conseguenza il VILEMAIN, nella sua qualità di ministro della pubblica istruzione, il 28 aprile 1843 presentava all'uopo un progetto di legge al Parlamento ed il DESPEYROUS veniva inviato in missione a Vienna per riconoscere se in quella biblioteca imperiale esistessero materiali da utilizzare (non ne fu trovato alcuno). Quel progetto venne approvato dalla Camera dei deputati, in seguito ad una relazione favorevole di F. ARAGO, e dal Senato, per opera di LAPLACE, figlio del celebre matematico; il LIBRI fu incaricato (1844) della direzione della meritoria impresa ed egli, quasi a dimostrare a tutta la Francia la bontà di tale scelta, pubblicò nella *Revue des Deux Mondes* del 15 maggio 1845 un articolo sopra FERMAT, profondo nella sostanza e splendido di forma, tanto che è uno dei più riusciti lavori del nostro connazionale e viene tuttora consultato da chiunque si occupi della storia delle matematiche nel periodo cartesiano. Ad esso però si riduce il contributo dato dal LIBRI alla progettata edizione, quantunque venisse sollecitato dal Governo francese perchè iniziasse il lavoro; dopo due anni d'inutile attesa, il ministro SALVADNY finì per dispensarlo da quell'ufficio (Decreto 6 giugno 1846) e di quell'importante progetto, per circa un trentennio, non si è più parlato; ma il germe deposto dal LIBRI godeva di una vitalità inestinguibile, e per svolgerlo completamente il Governo della terza Repubblica francese presentava il 16 febbraio 1882 un nuovo disegno di legge, che portò finalmente ai cinque volumi delle *Oeuvres de Fermat* dovuti alle cure di P. TANNERY e C. HENRY.

Scritti vari di G. Libri.

I lavori del LIBRI sopra FERMAT costituiscono, dopo il gruppo delle sue pubblicazioni intorno all' Italia, il più importante contributo

(1) LIBRI, *Sur la vie et les manuscrits de Fermat* (Journal des Savants, novembre 1845).

Digitized by Google

(quantunque, in parte, indiretto) da lui dato alla storia delle matematiche; il più importante, ma non l'unico, come si riconosce percorrendo la raccolta del *Journal des Savants*.

Infatti, nel fascicolo di gennaio 1846 di questa rivista, analizzando la *Correspondance mathématique et physique* pubblicata dal FUSS, egli diede in luce tre lettere dirette a LAGRANGE — due di D'ALEMBERT, la terza di EULERO — allora inedite e che egli aveva casualmente trovate in un pacco di manoscritti di FERMAT; in conseguenza di ciò quelle lettere presero posto nel carteggio scientifico del sommo analista torinese (1).

Minore novità presenta la recensione del LIBRI di un' estesa biografia di KEPLERO (2), in cui, più che l'erudito, spicca lo stilista, il quale, con abilità sorprendente, seppe porre in luce il lato romantico della travagliata esistenza del grande astronomo tedesco.

Affrettiamoci ad osservare che non era soltanto la parte aneddotica della storia dell'astronomia che interessava il LIBRI; ed in verità quando un noto orientalista e matematico, A. SÉDILLOT, dall'esame di alcuni manoscritti arabi fu indotto ad attribuire ad ABUL WEFA la scoperta dell'importante fenomeno offerto dal movimento della luna che chiamasi « variazione », il LIBRI (il quale asserivasi in grado di leggere nell'originale un'opera scientifica scritta in Arabo o in Cinese) sorse a combattere questa tesi, prima verbalmente in seno all'Accademia delle Scienze (v. *C. R.* T. II, 1° sem. 1836, pag. 261) e poi nella sua *Histoire* (T. I, pag. 248, 300 e 302 e T. II, pag. 21); qui specialmente il tono divenne aggressivo e violento, onde il SÉDILLOT fu indotto a replicare (*C. R.* T. II, 1° sem. 1838, pag. 638) senza però giungere a ridurre al silenzio il proprio competitore. A cui toccò poco dopo di trovarsi di fronte tutti i colleghi dell'Accademia, i quali, in seguito ad un Rapporto firmato da ARAGO e MATHIEU, si pronunciarono in senso favorevole al SÉDILLOT (*C. R.* T. VII, pag. 1015). Tuttavia la partita non era definitivamente perduta dal LIBRI. Infatti nuove ricerche di un altro distinto orientalista, il MUNK, i cui risultati vennero presentati nel 1843 all' Istituto di Francia (*C. R.* T. XVII, pag. 76), provocarono esplicite dichiarazioni da parte del BIOT (*C. R.*, T. XX, 1° sem. 1845, pag. 1309 e 1319) e del BINET (*ivi*, pag. 1322) favorevoli alle opinioni del LIBRI; oggi ancora la questione non si ritiene chiusa (3), onde è chiaro come con piena ragione egli non credette inchinarsi dinnanzi al responso di un consesso scien-

(1) *Oeuvres de Lagrange*, T. XIII (Paris, 1882), pag. 38, 134 e 136; T. XIV (Ivi, 1892) pag. 205-7.

(2) *Journal des Savants*, giugno-agosto 1847.

(3) R. WOLF, *Geschichte der Astronomie* (München, 1877) pag. 53-5.

Digitized by Google

tifico, per fermo altamente rispettabile, ma che in questa occasione subì troppo leggermente l'ascendente esercitato dal proprio focoso segretario perpetuo, piuttosto traviato da personali rancori, che ispirato dagli interessi supremi della verità.

Al LIBRI si deve eziandio l'articolo sopra ABEL della *Biographie universelle* (1); ad esso vanno tributati caldi elogi specialmente per due ragioni; cioè per il rimprovero ivi mosso ai geometri dell'Istituto di avere accolta con indifferenza quasi sprezzante l'immortale memoria sopra le funzioni trascendenti presentata nel 1826 dal giovane matematico norvegese (rimprovero che valse a rompere l'alto sonno di chi dormiva troppo profondamente); e per avere fatti valere i diritti di P. RUFFINI e del Conte di FAGNANO a conseguire un posto onorevole — il primo nel campo algebrico, il secondo nella teoria delle funzioni ellittiche — fra coloro che dissodarono il terreno in cui ABEL mietè tanti allori.

A complemento di questa rassegna delle svariate ricerche storiche del LIBRI faremo menzione dell'articolo che egli dedicò nel *Journal des Savants* (agosto 1839) all'*Aperçu historique* di M. CHASLES, nel quale si leggono alcune notevoli generalità appartenenti alla metodologia della scienza che ci sembrano degne di venir qui riferite. Secondo lui i metodi sino allora seguiti da coloro che se ne occuparono si possono caratterizzare come segue: 1° Esposizione delle scoperte, senza alcuna menzione di coloro che le fecero; 2° Esposizione delle scoperte, con notizie biografiche relative agli scienziati; 3° Narrazione della vita dei pensatori e simultanea esposizione delle loro idee. Aggiungeva il voto che, in avvenire, ne venisse applicato un 4° onde giungere ad una vera storia dei metodi matematici. Contemplando al lume di questi principii la surricordata opera dell'eminente matematico francese, il LIBRI vi notò parecchie imperfezioni, di cui la sproporzione fra il testo e le Note porge *ad oculos* un'impressionante conferma; esse si spiegano perchè è noto che CHASLES, ottenuto dall'Accademia di Bruxelles l'ambito premio, nel mentre si stampava la memoria coronata, s'immerse in profonde ricerche di erudizione, che rimandarono di otto anni la pubblicazione del lavoro ed i cui risultati egli affannosamente aggiungeva sulle bozze di stampa. Le critiche del LIBRI — esposte, d'altronde, sotto forma calma e riguardosa — avevano, dunque, una base indiscutibile e solida; non è, quindi, in esse che deve ricercarsi la prima radice dell'animosità che gradatamente sorse fra i due storici e della quale tra breve segnaleremo le manifestazioni più violente.

(1) A noi sta sott'occhio la versione italiana di quest'opera; lo scritto citato si trova nel Vol. I di *Supplimento* (Venezia, 1834).

Digitized by Google

Un congenere giudizio non può certamente pronunciarsi riguardo a tre suoi articoli pubblicati anonimi nella *Revue des Deux Mondes* (1) col titolo *Lettres à un Américain sur l'état des sciences en France*. Nel primo — che tratta de *L'institut et M. Arago* — si trova descritta, con colori vivacissimi, la profonda trasformazione subìta verso il 1835 dall'Accademia delle Scienze allo scopo di porsi in contatto diretto col pubblico; mentre, prima, questo aveva conoscenza dei lavori di quella unicamente esaminando i volumi delle *Memorie*, da quel momento, non soltanto fu concesso a molti studiosi di assistere alle sue adunanze, ma, grazie alla pubblicazione ebdomadaria dei *Comptes rendus*, tutti furono regolarmente informati di che cosa si occupavano gli scienziati nei quali la Francia riponeva tutte le sue speranze. Secondo il LIBRI tale metamorfosi è opera esclusiva dell'ARAGO, il quale, bramoso degli applausi di un grande pubblico, si sentiva soffocare nell'ambiente rinchiuso in cui aveva sino allora vissuto l'istituto di cui egli era segretario; e poichè tale mutamento, a suo avviso, doveva deplorarsi da tutti i ben pensanti, così egli si lasciò trasportare a fare una carica a fondo contro colui che ne era responsabile, scendendo ad attacchi personali, che possono far ammirare il coraggio e la vena polemica del nostro connazionale, ma che avranno senza dubbio trasformato in odio inestinguibile i sentimenti dell'ARAGO, sin d'allora non più benevoli, verso di lui. — Il tono si raddolcisce nel seguente articolo dedicato a *L'Institut et son organisation*, nel quale si trovano esposti obbiettivamente molti particolari intorno al funzionamento dell'Accademia delle Scienze e suggeriti alcuni rimedi ai difetti che esso presentava, fra l'altro quello di assicurare ai membri di essa una situazione economica totalmente indipendente; sono osservazioni in massima parte giuste, ma che è strano leggere in una lettera diretta ad uno straniero, che sulle cose francesi non poteva esercitare alcuna influenza. Ancora più elevata è l'intonazione del terzo degli articoli in questione, tutto dedicato a POISSON, morto appunto in quel tempo, del quale il LIBRI tesse il più caldo ed affettuoso elogio; ma poichè egli, anche occupandosi di avvenimenti relativi alla sua nuova patria, non dimenticava l'antica, trovò modo di rivendicare incidentalmente ad EGNATIO DANTI la scoperta della variazione dell'eclittica, di consueto attribuita a TICONE BRAHE, e di porgere ragguagli importanti intorno ai manoscritti di LAGRANGE, conservati a Parigi nella Biblioteca dell'Istituto; l'importanza dell'articolo fu così notevolmente accresciuta.

---

(1) Fascicoli del 15 marzo, 1° maggio e 1° agosto 1840.

Digitized by Google

Polemiche storico-scientifiche di G. Libri.

Nella seduta del 15 marzo 1841, M. CHASLES, allora semplice corspondente dell'Accademia delle Scienze, presentava a questa una nota dal titolo *Catalogue d'apparitions d'étoiles filantes: de 538 à 1123* (*C. R.*, T. XII, pag. 499-509), lavoro di solida erudizione, frutto di un diligentissimo spoglio di numerose cronache inedite, coronato da un tentativo per dedurre qualche informazione generale intorno alle epoche in cui il fenomeno della caduta delle stelle avviene con maggiore frequenza; in una nota finale è emessa l'ipotesi che l'anello di Saturno altro non sia che un sistema di asteroidi, satelliti di quel pianeta. Nell'adunanza successiva il LIBRI fece una *Communication verbale au sujet du Catalogue d'étoiles filantes presenté par M. Chasles* (vol. cit. pag. 523-7) col quadruplice intento di mostrare che CHASLES ebbe torto di tradurre le date offerte da quelle cronache in altrettante basate sull'applicazione del Calendario gregoriano, che egli fraintese il significato del termine tecnico «acies ignea», che alcuni fenomeni da lui ritenuti stelle cadenti sono invece aurore boreali, che finalmente l'ipotesi concernente Saturno rasenta l'assurdo. Rispose subito CHASLES (vol. cit. pag. 527-9) dando ulteriori spiegazioni a sostegno delle proprie idee; volendo poi far completa luce sopra i punti controversi, nella seduta del 5 aprile 1841 presentò all'Accademia una *Note en réponse aux observations de M. Libri* (ivi, pag. 587-91) ove, fra l'altro, è segnalato un errore di calcolo commesso dal suo contraddittore ed è rilevato che la surriferita ipotesi concernente Saturno venne emessa per la prima volta da G. D. CASSINI. Sino a questo punto la discussione si mantenne obbiettiva e serena. Ma nel replicare nuovamente (vol. cit. pag. 591-7) il LIBRI, mentre riconosceva di avere commesso l'errore di calcolo imputatogli — e che, non a torto, egli qualificava per una semplice «distrazione» — per assicurarsi l'assoluzione da tale lieve colpa, citò un' inesattezza molto più grave che esiste nella *Connaissance des temps pour l'année 1821 publiée par le Bureau des Longitudes* e confermò del resto le opinioni anteriormente manifestate. Con esemplare buon senso CHASLES dichiarò (vol. cit. pag. 597-8) chiuso per proprio conto il dibattito, sembrandogli che i lettori dei *Comptes rendus* disponessero ormai di tutti gli elementi per decidere da qual parte si trovasse la ragione. Invece ARAGO, a cui non parve vero gli si presentasse un'occasione per rintuzzare l'audacia dell'autore delle *Lettres à un Américain*, sorse nell'adunanza seguente dell'Accademia (*C. R.*, T. XII pag. 652-3) rivestito della toga di difensore del «Bureau des Longitudes», di cui egli era membro, e in particolare del vecchio astronomo BOUVARD, che ne era il decano. Dopo di avere rimproverato al LIBRI di

Digitized by Google

ripetere appunti da tempo pubblicati dal barone VON ZACH, si lasciò imprudentemente trascinare ad esporre particolari sul modo in cui veniva compilata la *Connaissance des temps*, certamente indicati per diminuire, piuttosto che aumentare, la considerazione di cui godeva l'ufficio a cui ne incombeva la responsabilità di fronte al mondo scientifico. La risposta del LIBRI, annunciata poco dopo (vol. cit. pag. 655), fu presentata in altra riunione dell'Accademia (*ivi*, pag. 673-87) ed è una carica a fondo contro l'opera spiegata dal « Bureau des Longitudes » nell'intorno dell'anno 1820, la quale sarebbe riuscita certamente più efficace ove il LIBRI non fosse ancora una volta sceso a personalità contro ARAGO. Altrettanto acre, pungente e personale è la replica data dal bollente segretario dell'Accademia (vol. cit. pag. 68-79): basti rilevare che egli, parlando del CASSINI, lo chiama, ad onta della naturalizzazione del LIBRI, « compatriota » di questo e che, finendo, taccia questi d'ingratitudine.

L'originaria polemica, dopo di aver completamente deviato ed essersi notevolmente abbassata, non accennava a chiudersi (vol. cit. pag. 689 e 697); allora, con indiscutibile opportunità, intervenne l'ufficio di presidenza dell'Accademia, chiudendo d'autorità l'increscioso dibattito, di cui l'ultimo episodio è rappresentato dalle linee seguenti, che il BOUVARD volle inserite nel citato volume dei *Comptes rendus*: « Je désire qu'après une carrière aussi longue que la mienne, M. LIBRI n'ait pas à se reprocher des fautes plus graves que celles qu'il a énumérées devant vous avec tant de détails ». Era in fondo riconoscere implicitamente che il critico si trovava dal lato della ragione; onde in questa lotta incruenta, ma deplorevolmente velenosa, la vittoria rimase al nostro connazionale; ma fu una vittoria di Pirro, circostanza di cui dovrà tener conto chi vorrà adunare tutti i fattori, vicini o remoti, palesi o inconfessati, dell'uragano che si scatenò più tardi sul capo dello storico delle matematiche in Italia.

Ciò è tanto più necessario giacchè il LIBRI mai depose le armi di fronte al proprio avversario. Lo provano i numerosi attacchi che egli fece contro di lui in seno all'Accademia (1). Lo prova anche meglio un breve articolo dal titolo *Revue scientifique*, inserito senza firma nel fascicolo 15 giugno 1845 della *Revue des Deux Mondes*, nel quale è rinnovata l'accusa contro ARAGO di aver fatta opera dannosa alla scienza promovendo la creazione dei *Comptes rendus* ed è di più dichiarato che, stante l'insuccesso di tale pubblicazione (?!), la detta *Revue* intendeva di riprendere l'antica abitudine d'informare essa stessa i propri lettori intorno ai lavori dell'Accademia delle Scienze, abitudine che era stata smessa fidan-

(1) V. parecchi passi dei *Comptes rendus* relativi agli anni 1842 e 1843.

Digitized by Google

do che tale ufficio fosse lodevolmente disimpegnato dai *Comptes rendus*. Tale dichiarazione aveva evidentemente per mira il segretario dell'Accademia; ma oggi si deve riconoscere che la stoccata non colpì nel segno, chè i 165 volumi di quella pubblicazione, malgrado certi difetti, costituiscono, per generale consenso, la più importante raccolta scientifica che si conosca, onde l'averla creata è titolo, non di demerito, ma d'indiscutibile gloria per l'ARAGO.

La discussione fra LIBRI e CHASLES di cui dianzi parlammo non è la sola che abbia avuto luogo fra i due eminenti storici; di un'altra dobbiamo occuparci. Nella nota dell'*Aperçu historique* « Sur le passage du premier livre de la Géométrie de Boèce relatif à un nouveau système de numération », CHASLES, contrariamente al LIBRI (*Histoire*, vol. I, pag. 80-81 e Nota II), si è dichiarato favorevole ad ammettere l'origine pitagorica del nostro sistema di numerazione. Ora, presentando addì 7 ottobre 1839 all'Accademia delle Scienze un opuscolo di J. O. HALLIWELL, egli constatava (*C. R.*, T. IX, pag. 447) trovarsi ivi nuove conferme a quell'attribuzione. Prese subito allora la parola il LIBRI (*ivi*, pag. 447-8) per manifestare dei dubbi intorno all'identità di vedute degli eruditi inglese e francese (specialmente perchè l'HALLIWELL mostravasi propenso ad ammettere che il famoso passo della *Geometria* di BOEZIO fosse una posteriore interpolazione) e per esortare CHASLES a presentare date certe piuttosto che interpretazioni ipotetiche. Replica e controreplica non si fecero attendere (vol. cit., pag. 448-52 e 452-4); nell'ultima leggiamo, fra l'altro, la seguente osservazione del LIBRI che ci sembra d'inoppugnabile verità: « il ne s'agit pas d'une opinion, mais d'un fait, et on ne pourra croire que notre Arithmétique est dérivée de celle des Romains, que lorsqu'on aura trouvé, dans des manuscrits d'une date certaine et antérieurs aux communications des Arabes avec les Chrétiens, les nombres écrits réellement d'après notre système actuel », avvertendo in nota che « il faut que non seulement les ouvrages, mais que les *manuscrits* aussi soient antérieurs à ces communications ». La discussione si protrasse nella seduta seguente (vol. cit. pag. 463-9, 469-70 e 470-72) ed il giuoco dei due schermitori divenne sempre più serrato, senza scostarsi dalle norme che governano le vere discussioni scientifiche e senza però condurre all'accordo fra i due contendenti. La questione continuò ad occupare il matematico francese per buona parte della sua vita, ed è estraneo al còmpito nostro l'analizzare le sue pubblicazioni sull'argomento; ma ci corre l'obbligo di osservare due cose.

Anzitutto che, quando egli presentò all'Accademia delle Scienze la I Parte della elaboratissima memoria *Explication des Traités de l'Abacus, et particulièrement du Traité de Gerbert* (*C. R.*, T. XVII, 1° sem. 1843,

Digitized by Google

pag. 156-173) il LIBRI dichiarò non avervi trovati argomenti sufficienti per indurlo a mutare la propria convinzione intorno all'origine orientale delle nostre cifre, aggiungendo che, riguardo all'opinione di CHASLES che l'« abaco » fosse una procedura di calcolazione meccanica fondata sul l'impiego di una tavoletta ricoperta di sabbia, si trattava di un'idea da lui da tempo comunicata a CHASLES stesso e che era esposta in un piego suggellato depositato negli Archivi dell'Accademia sino dall'8 giugno 1840 e del quale egli chiedeva l'apertura; il DUMAS, che in quel momento presiedeva l'Accademia, avendo osservato che mancava il tempo per procedere a tale operazione, di quel piego non si parlò più nè allora nè poi; *sarebbe interessante sapere se si trovi tuttora presso l'Istituto di Francia.*

La seconda nostra osservazione è che, a quell'opinione intorno all'origine delle cifre oggi in uso, CHASLES si mantenne fedele sino al termine della sua vita (1), con un'ostinazione degna di miglior causa; chè — lo rilevò un giudice non sospetto (2) — si tratta di un'opinione che tutte le indagini posteriori hanno sempre più dimostrata lontana da ogni parvenza di verità; torna quindi ad onore del LIBRI l'essersi adoperato a dimostrarne l'infondatezza.

Ben diverso fu l'esito della terza ed ultima polemica che il LIBRI ebbe a sostenere con CHASLES. Ne fu punto di partenza la valutazione, inesatta come già rilevammo, dell'opera di VIÈTE che si legge nell'*Histoire des sciences mathématiques en Italie* ed a cui il LIBRI fu trascinato dalla smania di estollere FERRO e FERRARI, TARTAGLIA e CARDANO, in paragone degli scienziati francesi coevi. A ricollocare le cose nella debita luce è destinata l'importante *Note sur la nature des opérations algébriques (dont la connaissance a été attribuée à tort à Fibonacci). Des droits de Viète méconnus,* presentata da CHASLES all'Accademia delle Scienze di Parigi il 5 maggio 1841 (*C. R.* T. XII, pag. 741-56), nella quale è rigorosamente dimostrato che a VIÈTE appartiene la creazione dell'aritmetica « letterale » ; ivi, naturalmente, gli appunti al LIBRI sono frequenti, ma presentati sotto forma obbiettiva e rispettosa. In coda a questa comunicazione è stampata una breve *Réponse transmise au Secrétaire*, nella quale il LIBRI dice che, siccome le osservazioni di CHASLES sono dirette contro un'opera in corso di stampa, le risposte avrebbero trovata la loro sede naturale nei volumi successivi di essa, nei quali l'autore avrebbe occasione di ritornare sopra i punti controversi.

---

(1) M. CHASLES, *Rapport sur les progrès de la géométrie en France* (Paris, 1870) pag. 96.

(2) P. TANNERY, *La grande Encyclopédie*, T. X, pag. 87, oppure *Mémoires scientifiques*, T. VI, p. 521.

Digitized by Google

Con la succitata *Note* CHASLES non ritenne di avere aggiustati i propri conti col LIBRI; la fondamentale importanza del problema di determinare le origini dell'algebra lo indusse a scrivere l'estesa memoria intitolata: I. *Sur l'époque où l'algèbre a été introduite en Europe.* II. *Sur les expressions res et census. Et sur les noms Algebra et Almuchabala*, la cui I Parte venne presentata all'Accademia di Parigi il 6 settembre 1841 (*C. R.*, T. XII, pag. 497-524) ed in cui, mentre si sostiene che l'algebra fu nota in Europa prima del FIBONACCI per opera di traduttori di opere arabe, è dichiarato che ciò non obbliga in alcun modo a togliere a lui la dignità del più grande matematico del Secolo XIII. Contro l'antagonista il tono, benchè un po' vivace, è abbastanza pacato; in un sol punto CHASLES con pieno fondamento si lagnò che il LIBRI, dopo di avere rilevata un'inesattezza commessa dal suo emulo, aggiunse di segnalarla come « exemple de la manière de travailler » di CHASLES (*Histoire*, T. IV, pag. 489) e non a torto notò che il suo lavoro presente porge la prova più luminosa della serietà con cui egli conduceva le indagini storiche. Allora LIBRI credè opportuno di ripetere (vol. cit., pag. 559-60) che intendeva continuare la discussione con CHASLES nei seguenti volumi della sua *Histoire*. Ma — ancora una volta invelenendo le questioni prettamente dottrinali con frasi imprudenti ed acri — aggiunse di respingere l'« insinuation » di CHASLES che egli fosse sempre animato dal desiderio di diminuire le glorie francesi, citando come prova le sue ricerche intorno a FERMAT che gli avevano procurate commoventi manifestazioni di gratitudine da parte della città di Tolosa. CHASLES rispose subito confermando le proprie opinioni, illustrando i propri intendimenti e protestando contro la parola « insinuation » usata dal suo contraddittore; e LIBRI immediatamente sorse per confermare quanto aveva detto contro CHASLES, senza nemmeno sfiorare il lato scientifico della controversia.

Nella II Parte del succitato lavoro di CHASLES (*C. R.*, T. XIII, pag. 601-26) sono confutate le opinioni di LIBRI sopra le origini della parola « algebra » e nuovamente discusso il suo giudizio su VIÈTE; inoltre è ampiamente spiegato perchè CHASLES abbia creduto dover suo di atteggiarsi a paladino della scienza francese offesa. Alla lettura di questa importante memoria seguirono brevi osservazioni dei contendenti (vol. cit., pag. 626, 627, 628), ma una vera e propria discussione dottrinale non ebbe luogo. Essa — da parte del LIBRI — avrebbe dovuto avere per principale teatro gli ultimi due volumi dell'*Histoire*, ma, come dicemmo, essi non furono mai pubblicati.

L'impressione che si riceve dall'esame dei documenti da noi enumerati è che il nostro connazionale abbia finito per riconoscere di trovarsi dalla parte del torto; e tale constatazione ebbe probabilmente non pic-

Digitized by Google

cola parte nella deliberazione presa dall'Istituto di Francia ai 14 aprile 1851, di destinare a CHASLES il seggio già occupato dal LIBRI nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze.

L'ultimo segno di vita data dal LIBRI come storico è, dunque, il meno felice di quelli di cui trovammo memoria; un indomabile orgoglio gli vietò di dichiarare di essersi ingannato. Esso però non può nè deve far dimenticare le altissime benemerenze che egli si è acquistate coi numerosi scritti che abbiamo analizzati; chè questi lo fanno apparire come un vero maestro della ricerca storica, dotato di sguardo acuto e lungimirante, i cui lavori debbono essere additati come modelli da imitarsi, tanto ai micrologi, che restringono il còmpito dello storico al pubblicare nuovi documenti, quanto a coloro che vagano in nebbiose generalità destituite di solidi fondamenti.

La catastrofe.

L'immensa e profonda erudizione sparsa a piene mani nelle pubblicazioni del LIBRI, la fama che egli era venuto acquistando di ricercatore e conoscitore di opere antiche e rare, manoscritte o stampate, gli studi da lui compiuti in parecchie pubbliche biblioteche francesi (1), consigliarono nel 1842 il VILEMAIN, allora ministro della P. I., di sceglierlo come segretario di una Commissione incaricata di compilare il catalogo generale dei manoscritti sparsi nelle pubbliche collezioni esistenti in Francia, del quale la necessità assoluta ed urgente facevasi sentire ogni giorno più intensamente. Questo onore grande, benchè non immeritato, aggiunse tutta una nuova classe di nemici a quelli che il suo carattere altezzoso aveva fatti pullulare sotto la cupola dell'Istituto di Francia; se questi s'industriarono a screditare a viso aperto lo scienziato, quelli preferirono l'arma tenebrosa delle denuncie anonime. Ed appunto nel 1846 la polizia parigina ricevette parecchie comunicazioni intese a rilevare come ogni visita del LIBRI ad una biblioteca fosse contrassegnata dalla scomparsa di qualche prezioso cimelio (2). Avuto sentore delle

(1) Cfr. i quattro articoli *Notice des manuscrits de quelques bibliothèques des départements* (Journal des Savants, luglio-settembre 1841 e gennaio 1842).

(2) Non è fuor di luogo osservare qui che i sospetti intorno alla correttezza del LIBRI risalgono ad epoca assai più remota; infatti in una lettera scritta dal TOMMASEO al CAPPONI il 27 febbraio 1837 si legge quanto segue: « Il Mamiani, alla fine, è uno dei pochi esuli che lavorassero forte e con vivo amore dell'Italia infelicissima; nè in questi sei anni gli si possono rimproverare le viltà che infamarono il Rossi, o i sospetti che macchiano il nome del Libri, o le debolezze che facevano alquanto rettile l'Orioli. Ma siccome al Libri dànno del ladro o della spia, perchè manca in ogni cosa di delicatezza, così al Mamiani, perchè ha pochi affetti e arte molta ». (*N. Tommaseo e G. Capponi - Carteggio inedito* già citato Vol. II, Bologna 1915, Pag. 53).

Digitized by Google

folgori che stavano per essere scagliate contro di lui, egli tentò salvarsi offrendo allo Stato la sua magnifica biblioteca, con l'unica condizione che essa conservasse la propria unità sotto il nome di *Collezione* LIBRI; tale profferta essendo stata respinta, egli decise di porre in vendita il tesoro bibliografico da lui adunato (1). Ora la contemplazione di tanta ricchezza ed il rumore fatto pei prezzi elevatissimi raggiunti da alcuni volumi durante la vendita al pubblico incanto, aggravarono i generali sospetti contro LIBRI e diedero nuova esca alle operazioni esplorative della polizia francese; e questa, poco prima del febbraio 1848, presentava a GUIZOT, allora capo del Governo, una particolareggiata Relazione, nella quale egli era prospettato come autore di numerose manomissioni a danno del pubblico erario. L'amicizia di quell'eminente personaggio salvò momentaneamente il LIBRI dalla minacciata azione giudiziaria. Ma, caduto LUIGI FILIPPO, egli sentì di trovarsi in completa balìa dei propri nemici; onde, incassate in fretta e furia le opere più preziose di cui era tuttora in possesso, riparò a Londra, ove ricevette le più cordiali accoglienze. Intanto, malgrado le reiterate discolpe da lui inviate di là al nuovo Governo francese, la giustizia inesorabile proseguiva nella propria azione investigatrice e, valendosi del diritto di punire di cui era rivestita, il 22 giugno 1850, condannava il LIBRI, sempre contumace, a 10 anni di reclusione ed alla perdita di tutti i diritti di cittadino francese. Tale severa condanna non valse a fiaccare il LIBRI, il quale, sorretto dalla plejade di amici che contava in Italia ed in Inghilterra, fece ogni sforzo per ottenere la cassazione della severa sentenza e la propria riabilitazione; memorabile è specialmente la petizione presentata al Senato dalla moglie, in data 22 febbraio 1861, e firmata da buon numero di spiccate personalità francesi; ma indarno! chè, esaminata e discussa dalla Camera dei Pari nelle sedute del 4 e 11 giugno di quell'anno, essa fu respinta a grandissima maggioranza.

Nel frattempo LIBRI aveva assunta la nazionalità inglese e divideva tutto il proprio tempo fra il congegnare le proprie discolpe ed il curare la vendita alle migliori condizioni dei resti della sua celebre biblioteca; *come storico della scienza, con l'approdo in Inghilterra, il* LIBRI *cessa di esistere*, onde a questo punto noi giudichiamo esaurito il còmpito prefissoci. Prima di chiudere osserveremo che chi vorrà intraprendere lo studio dei suoi rapporti con i magistrati francesi dovrà accuratamente esaminare il suo carteggio, che si conserva nella Biblioteca Nazionale di Parigi, senza dimenticare i fatti registrati nel presente studio. Soltanto in

(1) La pubblica vendita fu preceduta dalla pubblicazione del *Catalogue de la Bibliothéque de M. L.* ***, *don la vente aura lieu le 28 juin 1847* (Paris 1847).

Digitized by Google

tal modo si riuscirà a decidere se ebbero ragione i suoi amici di gioventù nel conservargli intatta la propria stima (1), o se è più conforme

(1) Fra questi ci limiteremo a ricordare due nomi: GINO CAPPONI e PLACIDO TARDY. Ora dalle lettere scritte dal LIBRI al primo il 20 agosto 1848 (*Lettere di G. Capponi*, Vol. II, Firenze, 1883, pag. 430-2), da due dirette da questo a quello il 23 agosto 1851 e nell'ottobre 1854 (*Id.* T. III, Firenze, 1884, pag. 43 e 168), finalmente dal loro carteggio durante l'anno 1867, quando il LIBRI, tornato in Italia, aveva ormai un piede nel sepolcro (*Id.*, T. IV, Firenze, 1885, pag. 202, 205, 213, 214, 216, 218, 223 e 225), emerge che la fuga e la condanna del LIBRI non alterarono i sentimenti verso di lui dell'austero patrizio fiorentino, il quale anzi dettò l'epigrafe che venne incisa sulla sua tomba (essa è riferita nel citato opuscolo dello STIATTESI).

D'altronde fra le lettere dirette al TARDY e depositate per suo volere presso l'Università di Genova, parecchie sono del LIBRI; benchè non tutte datate, pure non è difficile comprendere l'epoca in cui furono scritte. Prescindendo da alcuni semplici biglietti d'invito o di augurio che il TARDY ricevette durante il soggiorno che egli fece a Parigi per ragioni di studio, la più antica fu scritta il 12 aprile 1841 e concerne la richiesta di opere sulla storia della Sicilia (il TARDY trovavasi allora a Messina). Le due seguenti (9 agosto 1843 e 14 marzo 1844) hanno per principale soggetto la presentazione all'Istituto della memoria di TARDY *Sulle funzioni discontinue*; la successiva (17 luglio 1844) è piena di suggerimenti relativi agli studi del TARDY. A questo punto la corrispondenza presenta una lacuna, chè le seguenti lettere portano le date 6 e 16 agosto, 25 settembre e 9 dicembre 1851 e 2 novembre 1854; esse provano che il LIBRI, malgrado le disgrazie, non aveva abbandonati gli studi scientifici. Il carteggio offre poi un'altra lacuna, chè contiene ancora soltanto la seguente lettera che riferiamo per essere assai significante:

« *Mio caro Signore e Pregiatissimo Amico,*

« Fiesole (vicino a Firenze), Villa Vannini.

« Un nuovo assalto dato in questi ultimi giorni alla mia debolissima macchina, non mi ha permesso di rispondere alla Sua cortesissima lettera, e di ringraziarla, come avrei voluto e dovuto della amorevolezza, a me sì cara, che mi dimostra. Si accerti che Ella sta nella prima fila dei rarissimi che dopo 40 anni di lontananza ho ancora trovati vivi in Italia. Nella mia vita già lunga e non scevra di travagli, ho imparato a considerare le doti del cuore assai più di quelle della mente. Ma quando a cuore nobile e gentile s'unisce, come in Lei avviene, eminenza di mente, l'uomo diventa tale da rendere la sua amicizia carissima e desideratissima.

Idropisia, assalti ripetuti di paralisi, e gravissimi disordini gastrici, mi hanno talmente indebolito che anche la mente spesso vacilla. Ai miei amici può sembrare ch'io abbia sofferto troppi colpi di sventura. A me pare altrimenti, essendo mia fermissima opinione che gli uomini si corrompono nella prosperità e che i dolori e le lacrime sono un dono prezioso che ci fu fatto per nostra correzione e miglioramento. Se in questa aria balsamica riprendo un poco di forza mi sarà carissimo parlare con Lei di quegli studj ne' quali Ella è maestro. Ebbi dal signor Boncompagni, tanto benemerito delle buone discipline, la lettera italiana di Lagrange da lui sì opportunamente ripubblicata, ma non ho avuto ancora forza bastante per rispondere a quel nostro ottimo amico. Accoglienza, visite e lettere ne ho ricevute moltissime, ma siccome lo scrivere, ed anche il parlare, mi affatica assaissimo, così ho dovuto cercare quiete e riposo qui,

Digitized by Google

a verità l'odierna corrente, delineatasi specialmente in Italia in seguito alle delusioni che seguirono l'acquisto da parte del nostro Governo della collezione Ashburnham (1), la quale indusse parecchi a non escludere fosse affetto da cleptomania chi finì col presentarsi sotto l'ignobile aspetto di venditore di fumo.

XX.

PHILIP E. B. JOURDAIN

MATEMATICO E STORICO DELLA SCIENZA

Dall'*Archivio di storia della scienza* T. II, 1921.

1. — Spenti i valorosi campioni — CAYLEY, SYLVESTER, SALMON — grazie ai quali la patria di NEWTON, durante il secolo XIX, seppe affermare la propria originalitá nel campo delle matematiche pure; scomparsi, d'altra parte, gli autori di grandi opere sulla storia del pensiero scientifico — WHEWELL, BUCKLE, DE MORGAN — l'Inghilterra, da un lato, sembrò adottare, anche nel campo prettamente scientifico, l'attitudine di « splendido isolamento » caratteristico della sua politica nell'e-

---

e mentre mi sarà sempre carissimo ricevere Sue lettere qui, La prego non dare a nessuno il mio recapito, nè dire che io Le abbia scritto, altrimenti moltissimi si crederebbero offesi dal mio silenzio.

« Ho scritto già troppo e son costretto a cessare. Gradisca i miei voti per la Sua felicità e pel bene di quelli che le son più cari. Abbia cura della Sua salute e mi creda sempre con affetto pari alla stima.

Suo Servo ed Amico
G. LIBRI DELLA SOMMAJA »

Non vi è data, ma fu scritta certamente nel periodo 1867-69, probabilmente nel 1868.

Un'altra significante prova della considerazione di cui continuava a godere il LIBRI in patria, anche dopo la sua condanna, è offerta del fatto che, quando nel 1854 G. BARBÈRA progettò la creazione del giornale letterario *Lo Spettatore*, N. TOMMASEO, richiesto di consiglio sopra le persone di cui chiedere la collaborazione, vi incluse il LIBRI, senza restrizioni riguardo ai temi da trattare (v. G. BARBÈRA, *Memorie di un editore pubblicate dai figli*, Firenze, 1883, pag. 109). — Di altro segno di stima (quale?) datogli dopo il 1860 dai suoi concittadini è fatto cenno da GINO CAPPONI (*Lettere*, T. IV, Firenze, 1885, pag. 203).

(1) Cfr. A. FAVARO, *Ragguaglio di manoscritti galileiani nella Collezione Libri Ashburnham presso la Biblioteca Mediceo-Laurenziana di Firenze* (Bull. di bibl. e storia, ecc., T. XVII, 1884, pag. 849-78); G. VASSURA, *La pubblicazione delle Opere di E. Torricelli con alcuni documenti inediti* (Faenza, 1908) pag. 41; G. MANCINI, *Giorgio Vasari, Vite cinque annotate* (Firenze, 1917) pag. 217. — Delusioni non dissimili si ebbero in Francia; v. *Oeuvres de Fermat*, T. I (Paris, 1891), pag. XXII.

Digitized by Google

poca vittoriana, d'altro lato mostrò scarsa propensione per le ricerche di storia della scienza. tanto che essa attende ancora chi esponga gli allori da essa conquistati nel campo delle discipline esatte (1).

Ma sul cadere del secolo decorso, apparve nel Regno Unito una personalità eminente, la quale avvertiva la necessità di diffondere fra i propri conterranei le idee profonde e vaste con cui WEIERSTRASS, DEDEKIND e specialmente G. CANTOR, trasfondendo una nuova linfa nel vetusto tronco dell'aritmetica classica, avevano fatto orientare l'analisi matematica verso inesplorati splendidi orizzonti, ed in pari tempo, col precetto e con l'esempio, stabiliva l'importanza ed esponeva la bellezza delle indagini intorno all'evoluzione del pensiero umano. Parliamo di PHILIP EDWARD BERTRAND JOURDAIN, spentosi nel fiore degli anni, fra l'universale rimpianto di chi ne conosceva la mente ed il cuore, il I° d'ottobre del 1919.

Egli era nato nel 1879 da famiglia oriunda dalla Francia, ultimo figlio del Rev. F. JOURDAIN Vicario di Ashbourne (Derbyshire), ed aveva con ottimo successo iniziati i propri studi nell'università di Cambridge; ma, colpito da insanabile paralisi, che ebbe per deplorevole effetto una completa atassia, gli fu vietato di conseguire tutti i gradi caratteristici del *curriculum* universitario inglese e fu costretto a rinunziare alla carriera d'insegnante, alla quale era da natura chiamato, per dedicare tutta la propria energia allo studio ed alla meditazione.

Nel 1912 P. CARUS, direttore della ben nota rivista americana *The Monist*, durante un viaggio fatto in Europa in occasione del V Congresso internazionale dei matematici, lo indusse a dividere con lui il gravame della direzione di quel periodico, sicchè da allora la sua collaborazione allo stesso divenne più regolare ed intensa. Tre anni più tardi egli si univa in matrimonio con Miss LAURA INSULL e si stabiliva a Fleet (Hampshire), piccola e tranquilla località che egli era destinato a non più abbandonare.

2. — Chi ebbe la fortuna di avvicinare il pensatore di cui piangiamo la perdita recente, ne ricorda con commossa ammirazione, non soltanto l'intelligenza vivace e la profonda cultura, ma anche lo spirito arguto e l'inalterabile serenità (2). Noi, che con lui avemmo soltanto relazioni epistolari, dobbiamo limitarci a considerarne l'opera scritta, ed in particolar modo, data l'indole di questo *Archivio*, quanto a lui deve la storia

(1) E' un fatto che io ebbi occasione di lamentare in una circostanza solenne: v. il discorso *Le glorie matematiche della Granbretagna*, riprodotto nel presente volume.

(2) Interessanti particolari al riguardo si leggono nell'articolo necrologico (non firmato) pubblicato nel fascicolo di aprile 1920 di *The Monist*, ove sono inseriti alcuni commoventi ricordi giovanili dettati da una sorella dell'estinto.

Digitized by Google

della scienza. Diciamo « in particolar modo » e non « esclusivamente » perchè — mentre, ad esempio, in H. G. ZEUTHEN lo storico ed il geometra costituiscono due personalità schiettamente distinte — nel JOURDAIN lo scienziato, lo storico ed il filosofo erano fra loro così strettamente ed armonicamente fusi, che il contemplare esclusivamente una delle facce della sua attività intellettuale avrebbe per conseguenza una così radicale e deplorevole deformazione della sua fisonomia scientifica, che farebbe perdere qualsia pregio al quadro che noi ci accingiamo a delineare.

Uno sguardo d'insieme alle pubblicazioni del JOURDAIN (1) fa vedere, in primo luogo, che egli, anche nel momento in cui aveva la mente rivolta a qualche problema prettamente scientifico, non trascurava le questioni storiche ad esso collegate: così facendo egli, quasi senza rendersene conto, veniva raccogliendo dati preziosi per seguire lo svolgimento del pensiero scientifico attraverso i secoli. Esso poi dimostra che l'interesse del JOURDAIN si concentrò, durante il ventennio in cui egli rimase sulla breccia, sopra tre grandi provincie matematiche, cioè: *a*) Teoria degli insiemi, in sè e nelle sue svariate applicazioni; *b*) Fondamenti dell'aritmetica ed in particolar modo Logica matematica; *c*) Meccanica analitica. Ed è notevole come al perfezionamento di ciascuna di tali discipline egli abbia contribuito con lavori originali, con ricerche storiche e finalmente curando la ristampa — con opportuni commenti — di lavori altrui. Quanto ora ci apprestiamo ad esporre varrà — tale almeno è la speranza che ci anima — a dimostrare l'esattezza di tale apprezzamento generico. Ma prima di scendere ai particolari della dimostrazione giova notare che molte idee e molte osservazioni recanti la firma del nostro autore si leggono più volte, sia pure sotto forme diverse, in articoli di indole differente, perchè inseriti in periodici di varie tendenze.

3. — Il JOURDAIN esordì (1901) nell'arringo scientifico [2] sotto la veste di cultore delle teorie destinate ad attraversare i secoli col nome di GIORGIO CANTOR, ed alle stesse egli dedicò anche l'ultima pubblicazione di carattere dottrinale che di lui conosciamo [97]; nel quasi ventennale periodo interposto fra l'una e l'altra egli mai perdette di vista quel seducente soggetto di studi, come fanno fede numerosi suoi scritti

(1) Si percorra l'*Elenco cronologico* posto al termine del presente articolo (di cui ogni elemento verrà citato col relativo numero d'ordine), il quale, benchè certamente non del tutto completo, è abbastanza vicino alla perfezione per servire al nostro scopo; non vi inserimmo alcune recensioni, di cui però, per quando ci fu possibile, non mancammo di prendere notizia.

Digitized by Google

[5, 6, 7, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 34, 38, 40, 53, 96], alcuni dei quali sono di pertinenza della pura analisi matematica, mentre altri illuminano di nuova luce l'interpretazione dei fenomeni della natura [75] ed altri ancora [85 e 98] fanno vedere le relazioni che intercedono fra i concetti cantoriani ed i sofismi che resero celebre ZENONE D'ELEA(1). Fra i primi spicca una memoria [12], a cui fu conferita in patria un'alta distinzione, mentre all'estero ottenne l'onore dell'inserzione in uno dei più celebri periodici del mondo; ivi è stabilito, per tacer d'altro, il notevole risultato che «una funzione integrabile, nel senso riemanniano, non può in generale rappresentarsi analiticamente nemmeno mediante una serie non uniformemente convergente di funzioni continue», cosicchè la «potenza» (nel senso cantoriano) delle funzioni integrabili risulta superiore a quella del continuo.

Contemporanea all'inizio di tali investigazioni nei campi più elevati sinora raggiunti dal pensiero matematico è la prima parte di un'esposizione storica della teoria dei numeri transfiniti [3, 11, 37, 58]. Sebbene fra il momento in cui ne furono vergate la prime pagine e quello in cui il JOURDAIN ne licenziò le ultime siano scorsi non meno di dodici anni, pure questo lavoro ha un carattere di completa unità; esso inoltre è condotto secondo le norme che guidarono l'autore costantemente nelle sue investigazioni storiche: conoscenza profonda della dottrina, studio diretto delle fonti, considerazione di tutti i fattori, remoti e prossimi, delle scoperte. Nella I Parte di tale lavoro il JOURDAIN descrive lo sviluppo storico della teoria delle funzioni di una variabile reale sino al 1870: da essa si apprende come sia sorta e siasi svolta la dottrina delle serie trigonometriche sino a LEJEUNE-DIRICHLET, in qual modo GAUSS e CAUCHY abbiano concepita la teorica delle funzioni di una variabile complessa, finalmente quali perfezionamenti RIEMANN abbia arrecati a questa ed alla conoscenza delle serie trigonometriche; segue un'esposizione dei contributi dati da HANKEL alla teoria delle funzioni di variabili reali e da HEINE, CANTOR, ASCOLI, DU BOIS REYMOND e HÖLDER a quella delle serie di FOURIER. La II Parte ha per protagonista WEIERSTRASS, chè essa porge una chiara idea del come questo grande analista abbia assicurate all'analisi nuove e più solide basi. La III Parte abbraccia il periodo 1870-82; l'autore dà anzitutto notizie esaurienti intorno ai lavori di G. CANTOR sopra le serie trigonometriche ed i numeri irrazionali, non senza aggiungere qualche informazione intorno agli altri metodi che — sino a KRONECKER inclusivamente — furono proposti per definire e trattare

(1) Per giustizia va avvertito che fu P. TANNERY il primo a segnalare una certa parentela fra le idee del CANTOR e quelle di ZENONE.

Digitized by Google

questi enti (1). Così si tocca la soglia della dottrina dei numeri transfiniti, mèta suprema dell'interessante peregrinazione; ad essa sono dedicate le ultime pagine della monografia di cui ragioniamo. Riteneva il nostro autore di avere per tal modo esaurito il còmpito che si era prefisso od intendeva egli di far conoscere anche le ultime fasi della disciplina considerata? Nulla permette di porgere a questa domanda una risposta autorizzata; se però a noi fosse lecito manifestare un'opinione personale diremmo che, ove la grande conflagrazione che di recente sconvolse l'Europa non avesse momentaneamente elevata un'insormontabile barriera fra l'Inghilterra e la Germania, ed ove la morte inesorabile non avesse pronunziato un tremendo « veto », l'intera teoria dei numeri transfiniti avrebbe trovato nell'eminente pensatore britannico uno storico degno dell'altezza del soggetto.

4. — Parecchi posteriori articoli, di cui ci apprestiamo a dare notizia, furono scritti dal JOURDAIN nell'intento di perfezionare vari punti, troppo fugacemente toccati nella monografia testè riassunta.

In uno [71] egli riprese, dal punto di vista storico, la teoria dei numeri irrazionali; fatto rapido cenno del modo in cui tali enti furono considerati ed osservato che il V libro degli *Elementi* di EUCLIDE costituisce un'ottima propedeutica all'applicazione del numero alla geometria, egli li segue negli scritti di WARING, LAGRANGE, GAUSS, CAUCHY, FOURIER, BOLZANO, HANKEL, STOLZ, DU BOIS REYMOND, DE MORGAN e finalmente in trattati scolastici moderni, riserbando le teorie che oggi meritatamente godono maggior favore ad una seconda parte, che per lungo tempo si è desiderata ed a cui è oggi forza rinunziare per sempre (2).

Altrove [66] egli fece notare che, ammesso essere opera di LAGRANGE — come afferma DELAMBRE — la teoria della leva recante la firma di DAVIET DE FONCENEX, la nozione di « funzione analitica » si deve far risalire al 1759.

Della parte che ebbero GAUSS e CAUCHY nella costituzione della teoria delle funzioni di una variabile complessa tratta un breve articolo [13] che oggi appare come il preludio di altro posteriore lavoro d'insieme [66] sulla storia del concetto di continuità e d'integrale definito. In esso si trova, dopo qualche cenno intorno ai vari significati che vennero at-

(1) Ai numeri irrazionali si riferisce anche un altro articolo [32] ove il JOURDAIN si propose di mostrare come una teoria generale e rigorosa di quegli enti costituisca un preludio indispensabile ad un'esatta formulazione del concetto di « limite », fatto questo che sembra non fosse stato riconosciuto da molti trattatisti inglesi.

(2) Del metodo usato dal DEDEKIND per definire gl'irrazionali, il Nostro ebbe occasione di fare una lucida esposizione, scrivendo la necrologia [81] di quell'eminente scienziato.

Digitized by Google

tribuiti alla parola funzione, una particolareggiata esposizione della celebre controversia originata dalla soluzione data da D'ALEMBERT per il problema delle corde vibranti, specialmente nella parte che riguarda la distinzione tra funzioni «continue» e funzioni «discontinue» (scritti di EULERO, LAGRANGE, ARBOGAST, LACROIX e FOURIER); seguono notizie intorno alla determinazione dei coefficienti di una serie trigonometrica prima di FOURIER e quindi un'analisi completa dell'«opus magnum» di questo celebre matematico. L'autore esamina poi con profondità ed ampiezza le memorie pubblicate da CAUCHY negli anni 1814, 1815 e 1821, paragonando le idee sulla continuità ivi esposte con altre congeneri manifestate da BOLZANO e DE MORGAN; allo stesso matematico sono dedicati gli ultimi §§ della memoria in questione, nell'intento di esporre quali ne fossero le idee rispetto agli integrali.

Va ancora notato come il JOURDAIN abbia per primo insistito [46 e 95] sul fatto, dianzi poco o punto avvertito, che FOURIER esercitò enorme influenza sullo sviluppo dell'analisi durante tutto il secolo passato, innumerevoli ed importantissime essendo le indagini che hanno la loro prima radice nella considerazione delle serie trigonometriche, di cui per primo egli fece misurare lo straordinario potere.

Prima di porre termine alle presenti notizie intorno a questo gruppo di lavori storici del JOURDAIN ci corre l'obbligo di rilevare come ben pochi capitoli dell'analisi matematica non trovino ivi qualche notizia storica complementare o rettificatrice, e come buon numero delle informazioni ivi somministrate s'incontrino, sia pure sotto altro aspetto, nell'esordio al volume [77] in cui egli raccolse — dopo averli tradotti in inglese — i più essenziali contributi dati dal CANTOR alla teoria dei numeri transfiniti; inaugurando con tale pubblicazione una raccolta di *Classici della Storia e della Filosofia* egli ha fatto il più significante degli omaggi al sommo matematico tedesco ed ha contribuito nel modo più efficace a diffondere la conoscenza delle sue idee nel mondo anglo-sassone.

5. — Il ponte che congiunge il campo di studi in cui si aggirano gli scritti del JOURDAIN sinora esaminati e quello a cui appartengono i lavori a cui ora ci volgiamo è rappresentato da una nota [21] di cui la materia appartiene all'ordine di idee cantoriano, mentre, per la forma, va annoverata tra le indagini sulla logica matematica secondo le idee di G. PEANO; per conseguenza, mentre conferma essere il JOURDAIN uno dei migliori conoscitori del pensiero del grande analista tedesco, lo fa ascrivere anche fra coloro che erano in grado di servirsi, con invidiabile disinvoltura, e del «latino sine flexione» e della simbolica creata dall'originale matematico torinese.

Numerosissimi altri suoi scritti stanno a provare come egli fosse ap-

Digitized by Google

passionato cultore di tutte le questioni attinenti alla natura ed alla tecnica del ragionamento; questioni che in Inghilterra vennero in questi ultimi anni mantenute all'ordine del giorno per precipuo merito del RUSSELL, la cui opera filosofica venne dal Nostro amorosamente seguita e largamente commentata [42, 47, 79, ecc.] (1). A siffatte questioni il JOURDAIN fa più o meno rapida allusione in tante occasioni che è vano il tentativo di farne qui una completa enumerazione. Ma nella collezione dei suoi lavori vi è una monografia storica di cui non ci è lecito fare soltanto una fugace menzione. Alludiamo ad un'esposizione storico-critica dei vari indirizzi seguiti dai fondatori della logica matematica [39, 45, 59]; benchè pure interrotta dalla morte inesorabile, essa possiede un'importanza veramente eccezionale, non fosse altro perchè le pagine relative a scrittori viventi furono sottoposte ad una preventiva revisione da parte loro, e così, non solo si è certi che ne rispecchiano le idee con diplomatica fedeltà, ma sono ricchi di commenti ed aggiunte che recano le loro firme. Il JOURDAIN analizza anzitutto l'opera di LEIBNIZ come logico, specialmente con l'aiuto di ben note pubblicazioni del COUTURAT; passa poi al BOOLE, di cui riassume le idee intorno alle leggi governatrici del pensiero, oltrechè in base a note opere a stampa, con l'aiuto di documenti inediti, di cui dianzi non era nemmeno nota l'esistenza (2). Passa poi a fare altrettanto rispetto a MAC COLL, FREGE, PEANO, paragonandone i metodi ed esponendo le polemiche a cui questi diedero origine. Da ultimo si occupa del JEVONS, il più popolare, se non il più originale, degli scrittori di logica apparsi in Inghilterra nella seconda metà del secolo XIX. Quando si rifletta a quanti altri valentuomini abbiano di recente scritto sul calcolo logico, e si compili un bilancio preventivo delle dotte pagine che il nostro autore vi avrebbe indubbiamente consacrate, si fa più lancinante il cordoglio per la sua immatura dipartita.

A indennizzare, in parte almeno, della perdita in conseguenza subìta dalla letteratura matematica stanno alcuni scritti sui quali è dover nostro spendere qualche parola. Emerge fra essi quello [83] con cui il JOURDAIN collaborò al fascicolo di *The Monist* inteso a ricordare il secondo centenario della morte di LEIBNIZ. Ivi il Nostro osserva che, studiando a fondo le opere del filosofo dell'ottimismo, si avverte che, tanto le sue opere matematiche, quanto le filosofiche hanno per punto di partenza i frutti delle sue meditazioni a scopo logico; ciò, mentre da un lato di-

(1) Del RUSSELL il JOURDAIN tradusse dal francese in inglese un notevole discorso *Sull'importanza filosofica della logica matematica* (The Monist, T. XXIII, 1913, p. 353-389).

(2) E' certo che il JOURDAIN non fu estraneo alla ristampa delle *Opere* del BOOLE di recente fatta dalla Casa Editrice di *The Monist*.

Digitized by Google

mostra quanto male sia stato consigliato il GERHARDT nel pubblicarne gli scritti matematici separatamente da quelli filosofici, mette in luce che chi voglia ritrarne con precisione la fisonomia intellettuale deve prendere le mosse da un'analisi della sua opera di logica. E per dimostrare l'unità mentale di LEIBNIZ il JOURDAIN comincia a considerarlo quando, appena quindicenne, egli entrò in possesso della ricca biblioteca paterna, per poi segnalare l'influenza che su lui esercitarono i vari eminenti personaggi coi quali venne a contatto. Nelle pagine da lui scritte sulla logica, LEIBNIZ manifesta impressionanti coincidenze col BOOLE; spettava però a FREGE, PEANO, WHITEHEAD e RUSSELL il raccoglierne l'eredità e far fruttare il patrimonio da lui relitto.

Di non minore estensione è un altro articolo [89] col quale il JOURDAIN partecipò ad una discussione intorno all'ufficio del simbolismo nella logica, la quale ebbe per teatro una reputata rivista italiana; articolo in cui egli sostenne che essa, mentre offre il mezzo più sicuro che si conosca per analizzare un ragionamento, insegna una forma di esposizione non soltanto espressiva e concisa, ma anche — grazie alla sua rassomiglianza coll'ordinario calcolo algebrico — altamente suggestiva.

Ad analoghi concetti sono informate altre pubblicazioni del JOURDAIN, in particolare un breve articolo polemico [90] provocato da altro del prof. SHAW, col quale giudichiamo opportuno di dar termine a questa sezione della nostra rassegna.

6. — Sino dai primordi (1903) della sua carriera scientifica il JOURDAIN si è efficacemente occupato di quanto concerne la Meccanica analitica ed in particolar modo delle equazioni che formano le basi di tale scienza [4, 8, 11, 15, 20, 27, 28 e 36]. I frutti da lui raccolti — fra cui merita di venire ricordato un nuovo gruppo di equazioni di detto tipo, il quale completa quelle note (1) — vennero subito apprezzati a dovere dai competenti: a dimostrarlo sta il fatto che a lui fu affidato di curare la pubblicazione [30] fra i *Klassiker der exakten Wissenschaften* dei lavori di LAGRANGE, RODRIGUES, JACOBI e GAUSS che conferirono alla meccanica dei solidi il contenuto e la forma ben noti a chiunque conosca la letteratura odierna sull'argomento.

Fedele alle proprie abitudini, il JOURDAIN, mentre efficacemente promoveva la scienza dei moti e delle forze, volgeva la mente alle vie ed alle persone che la condussero allo stato in cui egli la trovò. Ora, fra gli storici della meccanica, come aquila vola il MACH, autore che il JOUR-

(1) Più tardi è stato notato che erano state incontrate anche dall'APPELL; ma l'essersi casualmente incontrato con un così grande matematico non è forse titolo di onore per il giovane scienziato?

Digitized by Google

DAIN ebbe a commentare [70] e tradurre [44]. Ma l'ammirazione che egli sentí, mantenne e manifestò per quell'eminente pensatore non ebbe virtù di fargli chiudere gli occhi alle lacune e manchevolezze che si trovano nella celebre opera *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch und kritisch dargestellt;* però, scambio di limitarsi a procurare a sè stesso la meschina e sterile soddisfazione di segnalare siffatti difetti, si adoperò a toglierne buona parte, istituendo ricerche profonde che costituiscono uno dei suoi più solidi titoli di onore e provano come egli non presumesse troppo di sè proponendosi di scrivere quell'*History of scientific Thought*, a cui sventuratamente non gli fu concesso di dare che un principio di attuazione.

Il passo del MACH che per primo attrasse l'attenzione del JOURDAIN è quello che si riferisce ad una delle leggi fondamentali della meccanica, cioè al celebre « principio della minima azione » del MAUPERTUIS (1). A complemento di quanto ne scrisse il succitato storico, il Nostro seguì quel principio (non scompagnandolo, anzi, dagli altri principii della meccanica), a partire dal Secolo XVIII sino ai trattatisti nostri contemporanei; in seguito investigò con maggiore profondità le origini di esso ed ebbe così favorevole occasione per esaminare nella sua interezza l'opera, non soltanto matematica, ma anche filosofica del MAUPERTUIS.

Un secondo punto incriminato si trova nell'originale osservazione fatta dal MACH che, quando si voglia misurare e giudicare quanto fece NEWTON per stabilire la teoria della gravitazione universale, è indispensabile tenere presente la parte preminente rappresentata dall'«immaginazione». Ora il JOURDAIN si è proposto ed è riuscito a dimostrare [63] che su quella scoperta influirono possentemente le idee — sia pure vaghe ed impregnate di metafisica — di R. HOOKE, le quali, pubblicamente svolte durante il periodo 1666-1682, non rimasero ignote all'autore dei *Principia*; se a questo la sorte concesse di recarle a perfezione gli è che, a differenza del suo turbolento rivale, egli, col metodo delle flussioni, si era procacciato uno strumento matematico di forza sufficiente per fargli superare le difficoltà dei problemi di filosofia naturale sgorganti dall'ipotesi della gravitazione universale.

Postosi ad investigare l'opera meccanica di NEWTON — lo studio della quale non fu dal MACH esaurito — il Nostro non si è più arrestato ed in una collana di notevoli articoli si è collocato in prima linea fra i conoscitori del pensiero del sommo inglese, in tali indagini efficacemente aiutato dai manoscritti newtoniani esistenti nella Biblioteca del Trinity

(1) Gli articoli storici e dottrinali del JOURDAIN sul principio della minima azione [48. 49, 57, 64] vennero poi raccolti in un volume.

Digitized by Google

College di Cambridge (1), che per primo egli ha potuto e saputo utilizzare.

La sua attenzione fu allora attratta dall'indagine della via percorsa da NEWTON per giungere a formulare i principii mediante i quali gli riuscì di dare un'attendibile spiegazione dei fenomeni offerti dalla meccanica celeste [68 e 69]; è una ricerca che era stata omessa dagli storici anteriori, i quali mostrarono d'interessarsi assai più dei risultati astronomici stabiliti nei *Principia* che dei mezzi usati per arrivarvi; ora il JOURDAIN con piena ragione osserva che, se si paragona la scienza ad un albero, è assai più importante lo studio dell'ufficio e del funzionamento delle radici, di quanto sia la semplice contemplazione delle foglie, dei fiori e dei frutti. Le investigazioni fatte in base a tale direttiva portarono il JOURDAIN a confermare come l'indiscutibile superiorità di NEWTON sopra gli scienziati del suo tempo derivi principalmente dalla sua grande forza matematica, e poi a scoprire le varie tappe che lo condussero al concetto di massa.

Più tardi il JOURDAIN diresse i propri sforzi [72, 73, 74] a ricostruire le meditazioni che guidarono NEWTON ai concetti di etere e di gravitazione, giovandosi per ciò anche delle sue pubblicazioni sulla teoria della luce e degli scritti di coloro che ne combatterono le idee. Da ciò egli fu trascinato anche ad occuparsi dell'attitudine di NEWTON di fronte alla Divinità, osservando con piena ragione quanto segue: « Per quanto pio possa essere uno scienziato — ed alcuni eminenti pensatori furono veri modelli di devozione a certe sette religiose — egli tenterà sempre di rendersi ragione mediante cause naturali dei fenomeni sino allora giudicati spiegati come miracoli divini. È difficile immaginare che la fede religiosa si possa accordare con un siffatto postulato dell'investigazione scientifica, epperò si può appena credere che NEWTON preferisse aiutarsi ammettendo essere certe azioni dovute a Dio, quando vi era probabilità che la gravitazione potesse spiegarsi con l'ipotesi di un etere rarefatto».

A meglio lumeggiare il processo logico che guidò NEWTON alle sue immortali scoperte, JOURDAIN ha anche riconosciuta, investigata e misurata l'influenza su di lui esercitata da GALILEO [94], sostenendo che essa ebbe per istrumenti, non soltanto gli scritti fisico-matematici del grande fiorentino, ma anche le molteplici applicazioni sparse nelle sue opere del Metodo degli indivisibili, preludio indiscutibile ed indiscusso del Metodo delle flussioni.

In una fase successiva di tali indagini il Nostro fece ed applicò con la debita ampiezza l'osservazione [105] che chi voglia oggi misurare e-

(1) Furono particolarmente sfruttati i sunti delle lezioni tenute a Cambridge da NEWTON negli anni 1666 e 1684.

Digitized by Google

sattamente l'altezza e la difficoltà dei problemi risoluti da NEWTON, non ha nulla di meglio che trattarli con i procedimenti attualmente in uso; lo sviluppo di tale concetto gli porse il destro ad interessanti raffronti con quanto scrissero su quei problemi, non soltanto i contemporanei LEIBNIZ e VARIGNON, ma anche MÖBIUS, HAMILTON e GRASSMANN.

Un altro rilevante problema storico affrontato dal JOURDAIN consiste nella ricerca del modo con cui NEWTON passò dal caso semplice di un moto ad orbita circolare all'ipotesi di una trajettoria qualsivoglia. Secondo lui [106] questo passo fu mosso da NEWTON negli anni 1679-80; ma, per ottenere piena luce sull'argomento, egli istituì un minuto paragone fra le tre edizioni dei *Principia* (1687, 1713, 1726) curate dallo stesso autore; ciò lo portò alla constatazione di un fatto nuovo ed importante, che, cioè, l'espressione della forza centrale in coordinate intrinseche, la quale vien di solito attribuita a NEWTON, perchè la si legge nella seconda edizione di quella grande opera, appartiene in realtà a GIOVANNI BERNOULLI, che la fece conoscere sino dal 1710. Per compenso NEWTON non è affatto incorso in un'errore, imputatogli appunto dal BERNOULLI, nella ricerca dell'orbita conoscendo la forza centrale.

Chiude questa brillante serie di lavori una breve nota postuma [107] relativa alla procedura tenuta da NEWTON per calcolare l'attrazione esercitata su un punto esterno da un involucro sferico o da una sfera piena.

Quando avremo aggiunto che la ristampa, curata dal JOURDAIN [67], dei migliori fra gli articoli storico-biografici dedicati dal DE MORGAN a NEWTON, mostra che egli non trascurava alcuno dei lati da cui si può contemplare la figura di questa personalità di eccezione, avremo presentati al lettore tutti gli elementi per concludere come nessuno poteva vantare una migliore preparazione di lui per presiedere all'edizione veramente completa delle *Opere di Newton* da tutti gli studiosi desiderata e da alcuni pubblicamente richiesta (1); a tale gigantesco lavoro egli accingevasi appunto quando venne sfiorato dall'ala inesorabile della morte: possa il nobile e grandioso disegno venire da altri condotto al termine desiderato!

7. — Arrivato a questo punto dovrò io porre termine a questa rapida corsa attraverso la collezione dei lavori del tanto rimpianto pensatore? Se io stessi scrivendo un togato elogio accademico, ottimo consiglio sarebbe il congedarmi dai lettori appunto nel momento in cui segnalo gli scritti in cui la personalità quale storico del mio eroe si delinea sotto l'aspetto da ritenersi definitivo. Ma, intendendo io di non lasciare

(1) Anche questo è un voto manifestato nel discorso citato nella nota (1) a pag. 371.

Digitized by Google

inesplorata alcuna latebra del suo intelletto, mi corre l'obbligo di segnalare, sia pure di sfuggita, alcuni altri scritti minori, nei quali egli non disdegnò di dirigersi agli umili per completarne la cultura (1).

Tali sono alcune brevi note [83 e 88] intese ad additare ai giovani matematici i periodici bibliografici che stanno a disposizione dei cultori delle scienze esatte. Tale un altro breve articolo [60] composto nell'intento di illustrare, su un fatto occorso all'OERSTED, l'intervento del «caso» nella scoperta della verità, ed altro [62] scritto con lo scopo di applicare la logica matematica alla risoluzione di proposizioni di carattere enigmatico.

Ma ove le sue doti di popolarizzatore rifulgono di più vivida luce è in una serie di articoli [78, 80, 86, 93] ed in un aureo volumetto [51, 104] aventi l'intento di porgere un concetto di che cosa sia oggi la matematica. Ora — limitandomi all'analisi di quest'ultimo — è evidente che il JOURDAIN, di fronte a siffatto difficilissimo problema, devesi essersi detto che, per delineare i contorni di una scienza coltivata da non meno di quattro millenni e da persone appartenenti a stirpi differentissime, nulla meglio vi fosse che seguirne, sia pure con grande rapidità, l'evoluzione attraverso i secoli. In conseguenza egli, dopo di aver con pochi tratti descritte le origini della ricerca matematica, indicò come nacquero e che cosa siano l'algebra, la geometria analitica, il metodo degli indivisibili, la dinamica ed il calcolo infinitesimale; elevandosi poi a più alte sfere si arrestò ai concetti moderni di *numero* e di *limite*, come quelli che fungono da cardini delle odierne ricerche analitiche, per chiudere con alcune geniali considerazioni sulla natura delle matematiche. Ed è specialmente in queste ultime pagine che egli rivela, nel modo più schietto, la propria personalità; chè soltanto chi ha l'abitudine di riflettere e giudicare con il proprio cervello poteva, ad esempio, escogitare la sottile distinzione fra *Matematica* e *matematica*, abbracciando sotto il primo nome (con M maiuscola) il complesso delle verità costituenti l'algebra e la geometria e sotto il secondo la totalità dei procedimenti usati per scoprirle, quello esistendo indipendentemente dalla presenza dell'uomo sulla terra, al modo istesso che l'esistenza dell'America è affatto indipendente da quella di CRISTOFORO COLOMBO.

La lettura di questo delizioso volumetto va particolarmente consigliata a coloro che considerano i lavori di popolarizzazione come al dissotto del còmpito dello scienziato degno di tal nome; essi, esortando i pensa-

(1) Agli articoli che stiamo per citare sarebbe forse da aggiungere una nota critica [99] intesa a rettificare alcune asserzioni contenute nell'allora più recente edizione dell'*Encyclopedia Britannica*.

Digitized by Google

tori ad appartarsi dal mondo, a presentarsi alle moltitudini sempre e soltanto sotto la veste di sacerdoti celebranti a porte chiuse un rito misterioso, ottengono il deplorevole risultato di fare assottigliare le schiere di coloro in grado di ammirare ed amare una scienza bellissima fra le belle e di servirsi dei mezzi più sicuri e potenti posti oggi a disposizione di chi voglia squarciare il velo misterioso che nasconde agli occhi nostri il microcosmo ed il macrocosmo. Ove il JOURDAIN, durante tutta la sua esistenza, non avesse ottenuto altro risultato che neutralizzare l'effetto dell'assiderante propaganda di questi — sia pure involontari — oscurantisti, il suo (ahimè! troppo breve) passaggio per questa valle di lagrime non sarebbe stato sterile e vano.

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI DI PHILIP E. B. JOURDAIN

1. *The origin of the doctrine of compensation of errors in the infinitesimal Calculus* (Nature, 1899, T. LX, p. 245).
2. *On unique, non repeating, integer function* (Mess. of Mathem, II Ser. T. XXXI, 1901, p. 8-11).
3. *The development of the theory of transfinite numbers* (Arch. für Math. und Physik, III Ser., T. X, 1906, p. 254-281).
4. *On Gauss princip of least contraint and the equations of mechanics* (Mathem. Gazette, T. II, 1903, p. 337-340).
5. *The cardinal numbers of aggregate of integrable Functions* (Mess. of Mathem. II Ser., T. XXXIII, 1903, p. 78-79).
6. *On functions, all of whose singularities are non-essentials* (Id. p. 166-171).
7. *A general theorem on the transfinite cardinal numbers of aggregates of functions* (Philos. Magazine, VI Ser. T. VI, 1903, p. 323-326).
8. *On the general equations of mechanics* (Quart. Journ. of Mathem., T. XXXIV, 1904, p. 61-79).
9. *On the transfinite cardinal numbers of number-class in general* (Phil. Magazine, VI Ser. T. VII, 1904, p. 61-75).
10. *On the transfinite cardinal numbers of number-class in general* (Ivi p. 294-303).
11. (continuazione) *The development of the theory of transfinite numbers* (Arch. f. Math. und Phys., III Ser., T. XIV, 1909, p. 289-311).
12. *On the general theory of functions* (Journ. f. r. u. a. Mathematik, T. CXXVIII 1905, p. 169-210.
13. *The theory of functions with Cauchy and Gauss* (Bibl. mathem., III Ser. T. VI, 1905, p. 190-207).
14. *On two differential equations in Lagrange « Mécanique analytique »* (Ivi p. 350-353).
15. *Alternative forms of the equations of mechanics* (Quart. Journ. of Mathem., T. XXXVI, 1905, p. 284-296).
16. *On transfinite cardinal numbers of the exponential form* (Phil. Magazine, VI Ser. T. IX, 1905, p. 42-56).
17. *The definition of a series similary ordered to the series of all ordinal numbers* (Mess. of Mathem. II Ser. XXXV, 1905, p. 465-470).

Digitized by Google

18. *On a proof, that every aggregate can be well ordered* (Mathem. Ann. T. LX, 1905, p. 465-470).
19. *Noces on two articles* (Mathem. Gazette, T. III, 1906 p. 327 e 380).
20. *The derivation of equations in generalized coordinates from the principle of least action and allied principles* (Mathem. Ann., T. LXII, 1906, p. 413-418).
21. *De infinito in mathematica* (Rivista di matem. T. VIII, 1906, p. 121-6).
22. *On the question of the existence of transfinite numbers* (Proc. of the London math. Society, II Ser., T. IV, 1906, p. 266-283).
23. *On the comparison of aggregates* (Quart. Journ. of mathem. T. XXXVIII, 1907, p. 352-367).
24. *On sets of intervals in a single ordered series* (Mess. of Mathem. II Ser., T. XXXVI, 1907, p. 61-69).
25. *The multiplication of an infinity of ordered types* (Ivi, p. 13-16).
26. *On the multiplication of the Alephs* (Mathem. Ann., T. LXV, 1908, p. 506-512).
27. *On the principles of mechanics wich depend upon process of variation* (Ivi p. 503-517).
28. *Addition of the Papers on the equations of mechanics* (Quart. Journ. of Mathem. T. XXIX, 1908, p. 241-250).
29. *On infinite sums and products of cardinal numbers* (Ivi p. 374-384).
30. *Lagrange, Rodrigues, Jacobi, Gauss Abhandlungen über die Principien der Mechanick herausgegeben von* PHILIP E. B. JOURDAIN (Ostwald, Klassiker der exacten Wissenschaften, N. 267. Leipzig, 1908).
31. *On some points in the fundation of mathematical physics* (The Monist, T. XVIII, 1908, p. 217).
32. *The introduction of irrational numbers* (The mathem. Gazette, T. IV, 1908, p. 201-209).
33. *The study of mathematics* (Ivi p. 306-307).
34. *The commutative law of addition, and infinity* (Nature, T. LXXXI, 1909, p. 69).
35. *The relevance of mathematics* (Ivi p. 382-384).
36. *Note on an analogous of Gauss principle of least contraint* (Quart. Journ. of Mathem. T. XL, 1909, p. 153-157).
37. (Continuazione). *The development of the theory of infinite numbers* (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser. T. XVI, 1910, p. 21-43).
38. *A theorem in the general theory of ordered aggregates* (Quart. Journ. of Mathem., T. XLI, 1910, 210-219),
39. *The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics* (Ivi p. 324-352).
40. *Transfinite numbers and the principles of mathematics* (The Monist, T. XX, 1910, p. 93).
41. *A mathematical paradoxes* (Ivi p. 134).
42. *The philosophy of Mr. B*rtr*ndR*ss*ll. With Appendices on leading passages from certain other works* (Id. T. XXI, 1910, p. 483-508).
43. *Some modern advances in logic* (Ivi, p. 564-566).
44. MACH, *History and root of the principle of the conservation of energy. Translated from the German and annotated* (Chicago & London, 1911).
45. (continuazione). *The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics* (Quart. Journ. of Mathem., T. XLIII, 1912, p. 219-314).
46. *Logic, M. Bergson and Mr. H. G. Wells* (The Hibbert Journ. T. X, 1912, p. 835-45).
47. *Mr. Bertrand Russell's first work on the principia of mathematics* (The Monist, T. XXII, 1912, p. 149-158).
48. *The principle of least action. Remarks on some passages in Mach's Mechanics* (Ivi p. 285-304).

Digitized by Google

49. *Maupertuis and the principles of least action* (Ivi p. 414-456).
50. *Henri Poincaré: obituary* (Ivi p. 611-615).
51. *The nature of mathematics* (London & Edinburgh, 1912).
52. *Nominal in mathematics* (Mind, T. XXI, 1912, p. 623-624).
53. *The values that certain analytic functions can take* (Proc. of the V intern. Congress of mathem., 1912; Vol. I, p. 283-284).
54. *On isoid relations and the theory of irrational numbers* (Id. T. II, p. 492-496).
55. *Note on the Fourier's influence on the conception of mathematics* (Ivi p. 526).
56. *The ideas of the «fonction analytique» in Lagrange's early works* (Ivi p. 540-541).
57. *The nature and validity of the principle of least action* (The Monist, T. XXIII, 1913, p. 227-293).
58. (Continuazione). *The development of the theory of transfinite numbers* (Arch. f. Math. u. Phys, III Ser. T. XXII, 1913, p. 1-21).
59. (Continuazione). *The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics* (The Quart. Journ. of Mathem. T. XLIV, 1913-128).
60. *An accident that led to a notable discovery* (Open Court, T. XXVII, 1913, p. 39-40).
61. *Sir George Darwin: a biographical sketch* (Ivi p. 190-201).
62. *Tales with philosophical morales* (Ivi p. 310-315).
63. *Robert Hooke, as a precursor of Newton* (The Monist T. XXIII, 1913, p. 353-384).
64. *Note on Sir George Darwin* (Open Court, T. XXVII, 1913, p. 572-3).
65. *A correction and some remarks* (Ivi p. 145-148).
66. *The origin of Cauchy's conception of definite integral and the continuity of a function* (Isis, T. I, 1914, p. 661-703).
67. A. De Morgan, *Essays on the life and works of Newton. Edited with Notes and Appendices* (Chicago & London, 1914).
68. *The principles of mechanics with Newton, from 1666 to 1679* (The Monist, T. XXIV 1914, p. 188-224).
69. *The principles of mechanics with Newton, from 1679 to 1687* (Ivi p. 515-564).
70. *The economy of thought* (Ivi p. 134-155).
71. *The theory of irrational numbers.* Part. I: *Incommensurables, convergent and earlier geometrical theories* (Bull. of the Indian math. Soc.).
72. *Newton 's hypothesis of ether and gravitation from 1672 to 1679* (The Monist T. XXV, 1915, p. 79-106).
73. *Newton's hypothesis of ether and gravitation from 1679 to 1693* (Ivi p. 234-254).
74. *Newton' hypothesis of ether and gravitation from 1693 to 1726* (Ivi p. 410-440).
75. *The purely ordinal conceptions of mathematics and their signification for the mathematical physics* (Ivi p. 140-144).
76. *Mathematicians and philosophers* (Ivi p. 140-144 e 633-638).
77. *The contributions to the founding of the theory of transfinite numbers by* Georg Cantor. *Translated and provided with Introduction and Notes The Open Court Series of Classic of Science and Philosophy* (Chicago & London 1915).
78. *Mathematics in the twentieth Century* (Science Progress, T. X, 1915, p. 114-120, 276-281, 431-436).
79. (Continuazione). *The philosophy of Mr. B*rt*nd* R*ssll. With appendices of leading passages from other works* (The Monist, T. XXVI, 1916, p. 24-62).
80. *Mathematics* (Science Progress, T. XI, 1916, p. 89-97, 431-437, 615-623).
81. *Richard Dedekind* (1833-1917) (The Monist T. XXVI, 1916, p. 504-523).
82. *The logical work of Leibniz* (Ivi p. 504-523).
83. *What every mathematicians need* (Mathem. Gazette, T. VIII, 1916, p. 312).

Digitized by Google

84. *On a review* (Ivi p. 312).
85. *The flying arrow, an anachronism* (Mind, T. XXV, 1916, 42-55).
86. (Continuazione). *Mathematics* (Science Progress, T. XII, 1917, p. 4-13, 189-199, 361-371, 539-549).
87. *The Mittage-Leffler Institute* (Ivi p. 647).
88. *The organisation of science* (Ivi p. 686-690).
89. *The function of symbolism in mathematical logic* (Scientia, T. XIX, 1917, p. 1-12).
90 *Logic and psychology* (The Monist, T. XXVII, 1917, p. 460-467).
91. *Notes on recent works in the philosophy of science* (Ivi p. 618-639).
92. *Existents and entities* (Ivi p. 142-151).
93. (Continuazione). *Mathematics* (Science Progress, T. XIII, 1918, p. 1-13, 176-182, 345-355, 520-527).
94. *Galileo and Newton* (The Monist, T. XXVIII, 1918, p. 629-933).
95. *The influence of Fourier's theory of the conduction of heath on pure mathematics* (Scientia, T. XXIII, 1918, p. 245-254).
96. *Problem of arrangement of an infinite class* (Science Progress, T. XIII. 1918, p. 299-304).
97. *Démonstration d'un théorème d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné* (C. R. T. CLVXI, 1919, p. 23-25).
98. *Notes on Zeno's argument on motion* (Mind T. XXVIII, 1919, p. 123-124).
99. *Mathematics in an Encyclopaedia* (Science Progress, T. XIV, 1919, p. 162-179).
100. *Causality, Induction and Probability* (Mind, T. XXVIII, 1919, p. 162-179).
101. *The logical siguificance of Ockham's razor* (The Monist, T. XXIX, 1919, p. 450-451).
102. *Cause and effect* (Ivi p. 547-559).
103. *Indefinables and indemonstrables in mathematics and theology* (Ivi p. 547-559).
104. *The nature of mathematics. Revised edition* (London & Edinburgh, 1920).
105. *The analytical treatement of Newton's problems* (The Monist, T. XXX, p. 19-38).
106. *Elliptic orbits and the growth of the third law of Newton* (Ivi, p. 183-198).
107. *Newton's theorem on the attraction of spheres* (Ivi p. 199-202).

XXI.

DUE GRANDI STORICI DELLE MATEMATICHE M. CANTOR - H. G. ZEUTHEN

Articolo pubblicato in francese nel T. XXXI di *Scientia*, Aprile 1922.

Nessuna delle discipline costituenti oggi lo scibile umano fu, in questi ultimi tempi, così duramente provata come la storia delle matematiche: non soltanto vedemmo scomparire M. CURTZE e F. HULTSCH, che fecero conoscere e pubblicarono tanti documenti importanti; non soltanto la gelida ala della morte ha colpiti P. TANNERY e P. DUHEM, nel momento in cui si trovavano tuttora sulla breccia; ma noi abbiamo perduti VAILATI, BJORNBÖ, BRAUNMÜHL, MILHAUD e, ancora più di recente, PH. E. B.

Digitized by Google

JOURDAIN e P. STÄCKEL, da cui ragionevolmente si attendevano contributi importanti alle nostre cognizioni sopra l'evoluzione delle scienze esatte. Quasi ciò non bastasse, il principio dell'anno 1920 fu contrassegnato dalla scomparsa di due personalità eminenti, che con piena ragione erano considerati quali pionieri in questa vasta e feconda provincia. Gli è precisamente ad un rapido esame dell'opera da essi compiuta che io invito i lettori di questa Rivista, spintovi non soltanto dal legittimo desiderio di rendere alla memoria di questi eminenti pensatori un doveroso tributo di grata ammirazione, ma anche nella speranza di trarre dai loro scritti qualche insegnamento capace di spianare le via a chi vorrà seguire le loro orme gloriose. Ora è singolarmente istruttivo il considerare simultaneamente la produzione di M. CANTOR e quella di H. G. ZEUTHEN, giacchè si tratta di due persone i cui spiriti furono tanto differenti quanto lo furono le loro carriere nel mondo: infatti, mentre il primo (1) deve la propria fama esclusivamente ai suoi lavori storici, sarebbe ben difficile decidere se in ZEUTHEN (2) lo storico superi il geometra o viceversa; mentre in uno il lavoro originale cessa alla fine del periodo di studente universitario, l'altro ha potentemente contribuito a rendere di un' invidiabile floridezza una branca importantissima della geometria.

I.

Verso la metà dello scorso secolo, la storia delle scienze positive era coltivata ben poco in Germania, come d'altronde in tutta Europa; negli ambienti accademici godeva di un favore talmente limitato che veniva citato come un'originalità il fatto che NESSELMANN tenesse all'Università di Königsberg un corso sopra la storia dell'algebra. Come, in siffatte condizioni, CANTOR abbia potuto pensare a consacrare alla storia delle matematiche un tempo ed un'energia che, spesi in modo diverso, gli avrebbero assicurato più prontamente un posto nel pubblico insegna-

(1) M. CANTOR nacque a Mannheim il 23 Agosto 1829. Nel 1851 ottenne la laurea filosofica a Heidelberg, dopo aver passati alcuni semestri a Gottinga ove ebbe per maestro GAUSS; due anni dopo cominciò ad insegnare in qualità di libero docente; nel 1863 fu promosso professore straordinario e nel 1877 gli venne conferito il titolo di professore onorario (titolo che in Germania ha un significato differente da quello che ha da noi); ormai cieco, morì a Heidelberg il 10 Aprile 1920, tre giorni dopo il suo unico figlio.

(2) H. G. ZEUTHEN nacque a Grimstrup (Jutland) il 15 Febbraio 1839; nel 1865 conseguì a Kopenhagen la laurea dottorale e l'anno dopo la libera docenza. A partire dal 1871, e sino a che fu colpito dalla legge sui limiti d'età, appartenne al corpo insegnante di questa Università e della Scuola politecnica di Kopenhagen; qui si spense serenamente il 5 Gennajo 1920.

Digitized by Google

mento, è un mistero che egli non ha mai rivelato (1). Io non ho la stolta audacia di supplire alla sua riserva, ma non posso passare sotto silenzio la circostanza che sin dal 1838 era professore di matematica e fisica al Ginnasio di Heidelberg e libero docente all'Università A. ARNETH autore di una *Geschichte der reine Mathematik in ihre Beziehung zur Entwickelung des menschlichen Geistes* (Stuttgart 1852), nella quale, ad onta della mancanza di un certo equilibrio fra le varie parti, tutti riconoscono qualità solide e rare. Ora la tendenza dell'ARNETH ad inquadrare la storia delle matematiche nella storia generale del pensiero umano è un criterio a cui rimase costantemente fedele l'autore di cui ci occupiamo. Infatti, sino dalla sua prima estesa pubblicazione, egli ebbe a dichiarare che « la storia delle matematiche è parte integrante della storia generale della civiltà e possiede una grande importanza per chiunque voglia studiare le origini della cultura e le mutue relazioni fra popoli primitivi ». Quantunque il volume ove leggesi tale dichiarazione trovi oggi pochi lettori — e fra poco noi ne diremo la ragione — l'esame di esso presenta una grande importanza per chi voglia seguire le tappe successive del pensiero di CANTOR. La questione ivi trattata (e che riesce assai malagevole indovinare dietro il velo del titolo (*Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*) è una delle più gravi che s'incontrino nella storia del pensiero scientifico; si tratta, infatti, di decidere da chi gli Europei abbiano appreso i segni numerali generalmente in uso a partire dal Rinascimento. E' un problema sul quale hanno faticato gran numero di eminenti scienziati, senza ancora pervenire a conclusioni definitive. M. CHASLES contribuì efficacemente a sollevare questa interessante questione, analizzando (1837) un frammento della *Geometria* attribuita a BOEZIO, in base alla lezione offerta da uno splendido manoscritto esistente nella Biblioteca di Chartres. Gli è a partire da questo momento che la suenunciata questione si è venuta in fondo a identificare con quella dell'autenticità o meno della *Geometria* di BOEZIO. Ora esiste di quest'opera alla Biblioteca universitaria di Erlangen un altro prezioso esemplare che, al pari del precedente, risale circa al secolo decimoprimo; che cosa di più naturale di esaminarlo con la più scrupolosa cura per trarne conferme o smentite della tesi cara al grande matematico francese? Gli è appunto quanto CANTOR si propose e che fu il punto di partenza delle ampie ricerche i cui risultati sono consegnati nel volume succitato e nel quale, invece di limitarsi alla questione da noi enunziata, il nostro autore espone tutto ciò che, da vicino o da lontano, si connette ai segni numerali ed all'a-

(1) E' soltanto noto che a consacrarsi alla storia fu consigliato dal RÖTH, noto autore di una storia della filosofia.

Digitized by Google

ritmetica pratica dei popoli antichi e medioevali. Ed in realtà egli fa sfilare in buon ordine, carichi del loro bagaglio aritmetico, Egiziani, Babilonesi e Indiani; volgendosi quindi agli Europei, egli riferisce quanto si conosce della vita di PITAGORA ed indica in termini generali le caratteristiche della logistica presso i Greci ed i Romani; a questo punto egli fa entrare in scena BOEZIO e investiga a fondo il problema di determinare l'autore della *Geometria* che ne porta il nome; ma, per gettare piena luce sulla questione, CANTOR a ragione giudica indispensabile di fare una digressione sulle matematiche degli Indiani, chiusa la quale esamina le matematiche dell'età di mezzo a partire da ISIDORO di Siviglia sino a LEONARDO di Pisa. Quale ampiezza in questo piano e quale profondità d'indagine! Qual differenza fra questo modo di concepire la ricerca storica e quello che informa le fatiche di coloro che s'illudono di risolvere un problema storico col semplice esame di un testo isolato!

Scrivendo la parola fine all'opera rivelatrice dell'architettura del Cosmo KEPLERO si chiedeva se avrebbe trovato un lettore e con superba indifferenza soggiungeva: « Che importa? Dio non ha forse atteso seimila anni un contemplatore della sua opera? ». Si vuole che un analogo dubbio assalisse GIOVANNI PLANA, il quale non faceva assegnamento su altro lettore all'infuori del proto che sovraintendeva la stampa della sua *Théorie du mouvement de la lune*. CANTOR ebbe la singolare ventura di trovare subito un lettore, che non fu spaventato dall'assoggettarsi al pesante lavoro di rifare per proprio conto la ampie investigazioni del dotto professore di Heidelberg, partendo però da concetti suoi propri e utilizzando altre fonti. Intendo alludere a T. H. MARTIN, il quale, incaricato dal Principe BONCOMPAGNI di render conto negli *Annali di Matematica* del volume cantoriano, scrisse un lavoro (1) che, come estensione, rappresenta circa la metà dell'opera analizzata, che è pieno di solida dottrina e di considerazioni originali ed in cui, senza misurare elogi all'autore, gli si muovono alcune critiche, rimproverandolo in ispecie di non avere attinto a tutte le fonti che trovavansi a sua disposizione. Il balsamo d'un elogio bastando di rado a cicatrizzare la ferita prodotta da una critica, questo resoconto dovette produrre sul palato del CANTOR un « sapor di forte agrume »; ma è certo che le parole del MARTIN, al pari di quelle che CACCIAGUIDA rivolse a DANTE, se riuscirono sgradevole al primo momento, non mancarono di essere poi trovate ricche di vital nutrimento; ed infatti le osservazioni di cui è parola gli riuscirono di somma utilità in un'occasione di cui parleremo più avanti.

---

(1) *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'Antiquité et du Moyen Age* (Annali di Matem.. T. V, 1863).

Digitized by Google

Frattanto CANTOR era entrato nella direzione della *Zeitschrift für Mathematik und Physik* incaricato di redigerne la sezione storico-bibliografica; ciò gli porse il destro di prendere notizia dei principali scritti che, da quel momento, furono pubblicati sopra la storia delle matematiche, lo spinse ad allargare il campo dei propri studi e lo indusse a confermare e talora a modificare alcune delle opinioni che aveva anteriormente manifestate. Tuttavia le sue funzioni di critico non gli vietarono di proseguire i propri lavori originali. Infatti nel 1867 diede in luce un saggio storico sopra *Euclide e il suo secolo* che B. BONCOMPAGNI fece tradurre in italiano per inserirlo nel *Bullettino* da lui diretto. Maggiore importanza possiede il suo volume dal titolo *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in die Geschchte der Vermessungskunde* (1875), tema di una rattristante aridità, la quale si manifesta paragonando la lussureggiante produzione geometrica dei Greci con l'assenza di cultura scientifica nei conquistatori e legislatori del mondo; CANTOR lo svolse con l'ampiezza di vedute caratteristica del suo metodo di lavoro, giacchè, per far luce sopra i procedimenti usati da quei modesti funzionari, egli risalì ad ERONE d'Alessandria, sfiorando in tal modo un'altra delle questioni più controverse relative alla matematica greca e arrecando qualche non inutile complemento a quanto aveva esposto nei suoi *Mathematische Beiträge* riguardo alla scienza dei Romani e dei loro discepoli durante l'epoca tenebrosa delle invasioni barbariche. Poco dopo, un orientalista di Heidelberg, THIBAUT, pubblicò una memoria fondamentale sulle tre versioni note della celebre opera scientifico-religiosa intitolata *Culvasutras*: e CANTOR fu da esse indotto a quegli *Studi greco-indiani* che, tradotti in italiano per cura di G. SCHIAPARELLI, furono inseriti nei *Rendiconti del R. Istituto lombardo* (1876); scopo di essi è porre allo scoperto il legame fra la scienza greca e la scienza indiana e di mostrare che se, riguardo alla geometria e l'astronomia il senso del cammino della scienza fu dall'occidente verso oriente, esso ha seguita una direzione opposta per quanto concerne l'aritmetica e l'algebra. Quando avremo aggiunto che, circa nella medesima epoca, CANTOR ajutò efficacissimamente l'eminente egittologo AUGUSTO EISENHLOR nell' interpretazione del celebre Papiro Rhind, avremo completato il quadro dei lavori che egli portò a buon termine prima del 1880, anno da segnarsi «albo lapillo» perchè è precisamente a questa data che egli fece uscire il I volume (che comprende il periodo dalle origini al Rinascimento») delle sue *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, opera «*nunquam satis laudata, nunquam satis laudanda*», dal destino chiamata a determinare la fine del regno secolare e glorioso del MONTUCLA. Io non mi farò eco dei giudizi entusiastici che furono pronunziati al pre-

Digitized by Google

sentarsi di questo avvenimento memorabile nella storiografia matematica da pensatori del valore di SCHIAPARELLI e HEIBERG; noto soltanto — come dato importante per chiunque si accingerà a ricostruire il processo creativo di una delle opere più famose della letteratura scientifica — che il nuovo volume può, in gran parte e con piena ragione, riguardarsi come una seconda edizione accresciuta e completamente rimaneggiata dei *Mathematische Beiträge*. Redigendola CANTOR seppe trarre profitto non soltanto dell'articolo del MARTIN, ma eziandio di tutte le più importanti pubblicazioni sulla storia delle matematiche apparse nel periodo 1863-1879, mostrandosi sempre pronto e disposto ad accettare le opinioni diverse da quelle dianzi manifestate, quando le ravvisava più ragionevoli.

Scrivendo *Erster Band* in testa alle sue *Vorlesungen*, CANTOR assumeva verso il pubblico un ben grave impegno, che egli si fece debito d'onore di mantenere; infatti nel 1892 ne dava in luce un II Volume, relativo al periodo che comincia con LEONARDO PISANO e si chiude con i primi bagliori che annunciano l'apparizione del calcolo infinitesimale; ed a soli due anni di distanza era in grado di consegnare al tipografo un primo fascicolo del III Volume, consacrato al decisivo periodo che comincia con NEWTON e LEIBNIZ e si chiude con la prima pubblicazione di LAGRANGE; nel 1898 anche questo volume era compiuto; non è il caso di parlare del IV Volume, a cui CANTOR non contribuì in modo significante. Il successo tanto largamente concesso al I Volume di questa grande opera non venne rifiutato ai seguenti, giacché tutti i giudici imparziali riconobbero che l'autore si era mostrato all'altezza del pesante suo còmpito, avendo egli riconosciuti i diritti posseduti dai due elementi fondamentali di qualunque storia, l'uomo e l'opera, e non essendosi lasciato traviare da pregiudizi di scuola o da malintesa boria nazionale; cosicchè egli poteva, al pari di MONTAIGNE, scrivere in testa alla sua grande opera: «c'est ici un livre de bonne foy»; perciò generale fu la soddisfazione di avere a propria disposizione un bilancio esatto di quanto sapevasi sull'evoluzione del pensiero matematico, il quale poteva servire utilmente quale punto di partenza per ulteriori ricerche. Soltanto si osservò che, avendo CANTOR ripartito ciascuno dei suoi volumi in sezioni determinate da considerazioni prevalentemente cronologiche, l'esposizione di certi avvenimenti o di certe teorie subiva interruzioni brusche e talora penose; tener conto del «tempo» è certamente stretto dovere dello storico, ma egli deve anche avere sempre presente che i fatti umani si svolgono indipendentemente dalle nostre artificiali ed artificiose divisioni cronologiche, di modo che, mostrandosi troppo schiavi di queste,

Digitized by Google

si corre rischio di sacrificare a meschine considerazioni di forma la veduta panoramica dell'insieme (1).

Le edizioni che non mancarono a quest'opera monumentale sono testimoni del favore costante che venne ad essa accordato; esse differiscono dalla prima per modificazioni di certi punti speciali, le quali non alterano la fisonomia generale dell'insieme; tuttavia — è vano negarlo — appunto in conseguenza di ricerche a cui CANTOR non era rimasto estraneo, molti passi avrebbero necessitato trasformazioni radicali. E' evidente che CANTOR, già avanti negli anni, non ebbe il coraggio, l'energia e la salute (2) che sarebbero stati necessari per riscrivere totalmente la propria opera; in tale stato di spirito e di corpo, di fronte al problema di preparare nuove edizioni dei suoi volumi, sarebbe stato forse miglior consiglio il seguire l'esempio dato da CHASLES quando fece ristampare senza modificazione alcuna il suo *Aperçu historique*. Invece il nostro autore adottò una soluzione intermedia, la quale, al pari di tutti i compromessi, non soddisfece nessuno, perchè si trovò che l'edificio da lui eretto aveva perduta — almeno in qualche parte — la sua solidità, cessando di riflettere fedelmente lo stato delle nostre cognizioni sopra un importante ramo dello scibile. Ciò non ostante CANTOR non fu fatto scendere neppure di un gradino dall'alto posto in cui era stato collocato per « consensus omnium » : ne è prova il volume giubilare che gli fu offerto da storici del mondo intero in occasione del suo LXX natalizio.

L'anno 1899, nel quale ebbe luogo questa solenne manifestazione, contrassegna l'apogeo della fama di M. CANTOR, giacché poco dopo cominciò a farsi udire una voce critica, la quale, con un' implacabile insistenza e con un tono sempre più aspro, continuò sino al giorno in cui scoppiò la conflagrazione che di recente sconvolse l'intero mondo. Gli è un infortunio che certamente poteva venire ragionevolmente risparmiato a un uomo che, avendo lavorato coscienziosamente per più di mezzo secolo, aveva ben diritto di finire la propria esistenza circondato dal rispetto universale. Quando, al principio di questa campagna, colui che la dirigeva appariva animato dall'unico scopo di rendere più perfette le *Vorlesungen*, il grande storico dovette rallegrarsi di trovare una collaborazione che agiva in un senso non dissimile da quello già offertagli tanti anni prima dal MARTIN. Ma non v'ha dubbio che la sua attitudine subì

(1) Una conseguenza di questo ordinamento scelto dal CANTOR fu che la storia della lunga disputa fra NEWTON e LEIBNIZ per l'invenzione del calcolo infinitesimale non si presenta con tutta la desiderabile chiarezza nelle *Vorlesungen*, benchè vi si trovino tutti gli elementi che ne contrassegnano le fasi successive.

(2) Sin d'allora le sua vista era in costante diminuzione.

Digitized by Google

una radicale e ben giustificata modificazione quando si trovò di fronte un critico instancabile, che nulla rispettava, nè sostanza, nè forma, che si atteggiava a paladino della verità, secondo lui, calpestata e sottoponeva i volumi cantoriani ad una critica talmente minuziosa che non vi avrebbe resistito alcuna opera, per quanto robusta ne fosse l'ossatura. Così facendo egli mostrava di non rendersi conto del fatto che il grado di verità che può raggiungere un'opera storica è di gran lunga inferiore a quello che può toccare una ricerca matematica; ci si avvicina alla verità storica nel modo in cui una curva si accosta ad un suo asintoto, per approssimazioni successive, senza mai raggiungerla, ragione per cui un lavoro dell'indicata specie ha la propria ragion d'essere quando segna un progresso sopra i lavori congeneri anteriori; ora chi può avere il coraggio di affermare che le *Vorlesungen* — quand'anche non soddisfino all'esigenza di «rifar la gente» avanzata dal GIUSTI — non siano di gran lunga superiori alle precedenti storie delle matematiche? Può darsi che CANTOR non abbia letto tutto, non abbia riferito tutto, che non abbia saputo evitare lo strano fenomeno (che io raccomando al futuro investigatore della «fisiopatologia del lettore») per effetto del quale restano inosservate cose degne di venire rilevate; ma quale autore potrebbe dirsi abbastanza audace per ritenersi esente da colpe siffatte?... Dunque... *veniam damus, petimusque vicissim*! E non dimentichiamo che il concepire ed eseguire un'opera storica di grandi dimensioni presenta difficoltà gravissime, ignote a coloro che limitano il proprio lavoro ad analisi isolate di qualche scritto scientifico; soltanto chi, con un' instancabile perseveranza, dovette consultare centinaja di autori, ascoltarne le opinioni talora discordanti e, dopo ciò, elevarsi ad una vasta opera d'insieme, capirà come qualche emulo di NEWTON potrebbe essere tentato di proclamare che «la difficoltà di un lavoro storico è proporzionale al cubo della sua ampiezza».

CANTOR trovò conforto alle amarezze che certamente gli cagionò quest'incessante campagna critica constatando che, mentre la schiera dei suoi ammiratori era sempre numerosa e brillante (e se n'ebbe una prova inoppugnabile nel secondo volume giubilare, che gli fu offerto al compirsi del suo LXXX anno), rarissimi erano gli aderenti alla guerra sferrata contro di lui; cosicchè lo spettacolo offerto allora dal campo storico richiama alla memoria quello che si presenta quando, in una notte illune, il profondo silenzio della campagna è improvvisamente interrotto dall'abbajare di un cane; altri cani sono pronti a farvi eco dalle corti vicine, ma tosto si arrestano quando riconoscono trattarsi di un falso allarme, provocato da un pericolo immaginario.

Digitized by Google

II.

Mentre EUCLIDE è considerato come l'autore degli *Elementi*, NEWTON come quello dei *Principia*, CHASLES come quello dell'*Aperçu historique*, MORITZ CANTOR è generalmente designato come colui che scrisse le *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Tuttavia, come le citate opere non esauriscono la produzione di quei sommi, così le *Vorlesungen* non rappresentano l'intera messe raccolta dal CANTOR nei campi da lui percorsi. Ma gli altri suoi scritti o furono inglobati nel suo «opus magnum», ovvero appartengono alle scienze ausiliari della storia, la biografia e la bibliografia (1). Tuttavia bisognerebbe tenerne conto se si volesse delineare un ritratto perfetto del pensatore di cui ci occupiamo; per conto nostro, ci basti notare che questi scritti offrono la prova che la sua coltura scientifica gli avrebbe permesso di proseguire la sua storia almeno sino alla fine del Secolo XVIII, ed arrecano nuove conferme al giudizio pronunciato intorno al suo stile, ad un tempo esatto e brillante. Ma siccome, dilungandoci sopra CANTOR-biografo in questo articolo relativo a CANTOR-storico, noi sembreremmo inclini a biasimarlo per avere sempre protestato contro l'identificazione della storia della matematica con la storia dei matematici, noi lasceremo Heidelberg per Kopenhagen, onde esaminare l'opera storica dell'Uomo che rappresenta degnamente la patria d'AMLETO nel campo in cui CANTOR ha consacrate tante veglie feconde: H. G. ZEUTHEN.

Essendosi recato a Parigi in un'epoca nella quale tanti illustri matematici riuscivano a conservare alla Francia la posizione eminente ad essa conferita dagli immediati successori di LAGRANGE, il giovane danese, che contava allora poco più di venti anni, vi subì il fascino di MICHELE CHASLES. Questo toccava appunto allora l'apogeo della sua gloria, sia come storico che come geometra, giacchè la sua famosa divinazione dei *Porismi d'Euclide* porta la data 1860, mentre nel 1864 comincia la serie delle sue memorabili comunicazioni all'Istituto di Francia sulla teoria delle caratteristiche dei sistemi di sezioni coniche. Ora è appunto all'importante capitolo di geometria cui diedero origine queste comunicazioni (la geometria numerativa) che appartengono per la maggior parte i lavori geometrici di ZEUTHEN. Totalmente assorbito, durante circa un ventennio, da ricerche di alta geometria e dalle cure dell'insegnamento, egli non offrì alcuna prova tangibile d'interesse per la storia della scienza, di modo che si poteva ritenere che, da questo punto di vista,

(1) Un completo elenco di essi fu redatto da M. CURTZE e pubblicato al termine del T. IX (1899) delle *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*.

Digitized by Google

il contatto con CHASLES non avesse lasciato in lui alcuna traccia. Ma tale giudizio, se fu pronunciato, dovette essere cassato all'annuncio che il 31 ottobre 1884 egli aveva presentata all' Accademia danese delle scienze un' estesa memoria sopra *Le sezioni coniche nell'antichità*. Allorquando questa memoria fu pubblicata (e meglio ancora quando, poco dopo, ne apparve un'ottima versione tedesca) il mondo scientifico apprese a conoscere una nuova e splendida faccia della robusta intelligenza dell'eminente pensatore. Si trattava, non d'un'opera storica di tipo ordinario, ma di una completa ricostruzione della geometria superiore dei Greci; è ben vero che (come fa supporre il titolo) la maggior parte di quest'opera è formata da una profonda analisi dell'immortale trattato di APOLLONIO PERGEO; ma, siccome ciò non è sufficiente per chiarire la genesi delle idee in questione, ZEUTHEN chiamò successivamente alla sbarra, quali testimoni, tutti i matematici dell'Antichità. Grazie ai dati così raccolti, l'autore riuscì a divinare totalmente i procedimenti che permisero agli antichi di portare la teoria delle curve di secondo ordine ad un grado di perfezione di ben poco inferiore a quello a cui lo portarono i moderni ricorrendo alla geometria analitica, al concetto di projettività ed al calcolo infinitesimale, non senza far risaltare l'identità sostanziale fra i procedimenti antichi ed i moderni (1). Sgraziatamente il numero dei testimoni che risposero all'appello non fu sufficiente per sollevare tutti i veli sotto i quali piacque ai Greci di nascondere i loro procedimenti di ricerca geometrica; perciò ZEUTHEN fu costretto di ricorrere all'espediente a cui nessuno storico può sempre sottrarsi, cioè dovette colmare con ipotesi le lacune che presentava la totalità dei dati sicuri. Ora, quantunque ZEUTHEN ne abbia fatto l'uso più sobrio, tutti gli storici non si ritennero autorizzati ad inscrivere nell'elenco delle verità incontestabili le conseguenze a cui egli giunse. E fra i riluttanti troviamo M. CANTOR il quale, nella seconda edizione del T. I delle sue *Vorlesungen*, non accordò alcun posto a certe vedute su cui lo storico danese non ammetteva dubbio alcuno; in conseguenza, fra i due illustri campioni ebbe luogo un duello ad armi cortesi e di breve durata; il pubblico dei dotti, giudice del torneo, seguì con grande interesse le fasi della lotta, senza però accordare ad alcuno dei contendenti la palma della vittoria, giacchè il fondo del dissenso era da ricercarsi in due modi diversi, ma egualmente legittimi, di concepire la storia della scienza, i quali potevano

(1) Notiamo a questo riguardo che a ZEUTHEN appartiene la geniale osservazione che, per gli antichi, una costruzione geometrica aveva una reale importanza anche quando non serviva in pratica, perchè rappresentava una parte analoga a quella disimpegnata nelle matematiche moderne dai teoremi di esistenza.

Digitized by Google

vantaggiosamente coesistere, ma fra cui è vano cercare un compromesso.

L'idea d'identificare la storia della scienza con l'esposizione dei concetti scientifici, la quale presiedette alla redazione della prima estesa pubblicazione storica dell'eminente scienziato danese, si ritrova in tutti gli altri suoi scritti storici, in particolare in un'importante pubblicazione (*Forelaesning over mathematikens historie: oldtid og middelalder;* Kjôbenhavn, 1898) su cui dobbiamo spendere alcune parole, quantunque traduzioni in tedesco e in francese abbiano assicurata alla stessa una notorietà invidiabile, ma ben meritata. A differenza della prima di cui abbiamo parlato, essa possiede un carattere didattico, avendo per iscopo di far noto ai professori quanto è di loro interesse conoscere riguardo alle matematiche dell'Antichità e del Medio Evo, cioè, non i nomi degli scopritori dei principali teoremi (1) e dei più importanti metodi di risoluzione dei problemi, ma piuttosto le nozioni necessari e sufficienti per apprezzare giustamente il modo in cui si presentarono le nuove verità ed i metodi per scoprirle. Emerge da ciò che, secondo ZEUTHEN, dei due elementi fondamentali di qualunque storia — il fatto e l'uomo — il primo ha una preminenza che può ben dirsi invadente. E' superfluo che ci dilunghiamo ad esporre in modo particolareggiato il modo in cui ZEUTHEN applicò tale concetto, dal momento che si tratta di un'opera che i nostri lettori indubbiamente conoscono; ci sia lecito soltanto osservare che, dal punto di vista educativo della gioventù (ed è precisamente quello prescelto dal nostro autore) deprezzare l'elemento umano nella storia della scienza è un criterio, secondo noi, da adottarsi con le massime riserve, giacchè la biografia degli uomini veramente rappresentativi può esercitare un'influenza assai migliore di quella che si può ragionevolmente attendere dall'esposizione di quei particolari intimi che di solito si ammanniscono con grande abbondanza riguardo a coloro che toccarono i pinnacoli della fama salendo sopra monti di cadaveri; per colui che si avvia verso la

(1) Che i dati di questa specie possano essi pure riuscire istruttivi gli è ciò che mi sembra risultare dal seguente esempio: In tutti i trattati di geometria i teoremi di PASCAL e BRIANCHON sono collocati uno accanto all'altro; perciò è naturale che il lettore supponga che BRIANCHON, personaggio di cui egli ode in quest'occasione il nome per la prima volta, sia stato un contemporaneo dell'autore delle *Pensées*, mentre non meno di due secoli li separano. Ora il fatto che un così lungo intervallo di tempo sia passato fra due scoperte tanto simili che una vien spesso presentata come immediata conseguenza dell'altra, si spiega mediante l'altro fatto che il legame esistente fra esse è un semplice corollario della legge di dualità nel piano, la quale non venne segnalata che circa un secolo fà. Notato ciò l'esperto insegnante — fedele al vecchio sistema di coronare qualunque favola con la sua morale — troverà occasione propizia per far osservare che della semplice constatazione di un fatto nuovo per il progresso della scienza possiede più grande importanza la formulazione di leggi generali.

Digitized by Google

carriera delle scienze la collezione degli *Éloges* pronunziati da ARAGO nella sua qualità di segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi ci sembra di una lettura ben più istruttiva delle *Vite* parallele di PLUTARCO.

Questo sentimento, che potrebbe quasi dirsi di avversione, manifestato da ZEUTHEN per l'elemento umano della storia della scienza, quasi si trattasse di uno spiacevole ingombro, si nota ancora in altro eccellente volume, nel quale l'autore ha completate e coordinate le proprie ricerche intorno all'evoluzione del pensiero matematico nei secoli XVI a XVII (1); ivi infatti quanto concerne la biografia e la storia propriamente detta si trova raccolto in una Sezione introduttiva, mentre la parte sostanziale dell'opera è riservata agli sviluppi puramente dottrinali, E' questo un sistema i cui motivi saranno certamente compresi da chiunque si è trovato nella necessità di esporre la storia di un lungo periodo scientifico; è un sistema indubbiamente comodo per chi scrive, ma che, ad esempio, rende malagevole risolvere un problema, pur così interessante, quello cioè di decidere se ed in quale misura i casi della vita di uno scienziato abbiano influito sul corso dei suoi lavori; un sistema che, ad esempio, avrebbe forse impedito di notare come i tre periodi in cui si svolse naturalmente la vita di LAGRANGE corrispondano perfettamente ai vari caratteri della sua attività: periodo di ardente ed intensa preparazione a Torino, periodo della massima produzione originale a Berlino, periodo di ammirabile attività didattica e ufficiale a Parigi. E' possibile che taluno giudichi siffatte ricerche estranee al còmpito della storia della scienza (2), come è possibile che altri tenga per cosa agevole il fondere in un tutto omogeneo ciò che ZEUTHEN ha tenuto separato; ma, quanto a noi, riteniamo fosse nostro dovere di segnalare una delle caratteristiche piu spiccate dello stile dello storico di cui ci occupiamo, tanto più che il giudizio intorno a questo modo di scrivere la storia del pensiero è ben lungi dal riscuotere l'unanime approvazione.

Sono queste le opere storiche di maggior lena composte da ZEUTHEN ma non sono gli unici suoi lavori del genere, giacchè si può dire che si-

---

(1) *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert* (Abhandl. zur Gesch. der Mathematik, XVII Heft, 1903).

(2) A nostro avviso, la storia della scienza, intesa nel significato più ampio, comprende, non soltanto l'esposizione dei procedimenti che guidarono alla scoperta della verità, ma anche delle circostanze che deidero origine ai lavori scientifici, delle opposizioni che incontrarono le nuove idee, delle lotte e delle polemiche che queste incontrarono; ora è chiaro ogni autore è padrone di svolgere soltanto una parte di questo vasto programma; ma nessuno ha il diritto di mutilarlo per sempre, chè così facendo produrrebbe gran danno alla branca dello scibile di cui ragioniamo.

Digitized by Google

no alla morte egli continuò — giovandosi in parte dei suggerimenti di un suo illustre collega — l'ellenista HEIBERG — a perfezionare e completare i risultati delle sue indagini sopra la matematica dei Greci, forse col segreto proposito di preparare ai suoi volumi nuove più perfette edizioni (1). La presente occasione non consentendo di dilungarci in un'analisi esauriente di questi scritti, ci limiteremo a notare che tutti senza eccezione, al pari degli altri recanti la sua firma, sono riboccanti di osservazioni acute e di vedute originali. Possa lo studio degli uni e degli altri eccitare i giovani a seguire un esempio così istruttivo, mostrando esse come lo studio coscienzioso e profondo delle grandi opere del passato è in grado di dare origine a pubblicazioni capaci di destare e mantenere quella generale considerazione che è l'unica ricompensa su cui possano fare assegnamento coloro che si consacrano a lavori lontani da ogni pratica applicazione.

XXII.

L'OPERA GEOMETRICA DI CORRADO SEGRE (2).

Dal Vol. II della IV Serie degli *Annali di Matematica*.

Egli era, benchè di poco, più giovane di me: se, quindi, il corso degli eventi umani non fosse soggetto ad inattese (e spesso dolorosissime!) perturbazioni, non a me sarebbe spettato il penoso còmpito di redigere il bilancio dei contributi da Lui dati alla scienza che per un quadriennio ci affratellò: era per me, anzi, un consolante pensiero quello che

(1) Chi vuol conoscere i titoli di tutti gli scritti dell'eminente matematico danese può ricorrere all'articolo che gli ha dedicato M. NÖTHER (Mathem. Annalen. T. LXXXIII, 1921).

(2) Nato a Saluzzo ai 20 di agosto del 1863; laureato in matematica dalla Università di Torino il 1° luglio 1883. Durante l'anno 1883-84 fu in questo Ateneo assistente alla cattedra di algebra complementare e geometria analitica (prof. E. D'OVIDIO) e nel seguente prestò il prescritto servizio militare; nel triennio 1885-88 occupò il posto di assistente alla cattedra di geometria proiettiva e descrittiva (prof. G. BRUNO) facendo le lezioni della prima di tali materie. Morto F. FAÀ DI BRUNO, il D'OVIDIO passò dall'incarico della Geometria superiore a quello dell'Analisi superiore ed il SEGRE fu nominato (15 novembre 1888) per concorso professore straordinario di quella disciplina: quattro anni appresso venne promosso ordinario. Durante tre trienni, cioé dal 1909 al 1918, fu preside della Facoltà di Scienze della Università di Torino: nel biennio 1895-97 ebbe anche l'incarico dell'insegnamento della fisica matematica e dal 1918 al 1922 quello delle conferenze di magistero in matematica. Un morbo repentino ed inesorabile lo spense addì 18 maggio 1924.

Digitized by Google

sino alla morte avrei trovato al mio fianco l'amico fedele con cui mi ero legato sui banchi dell'Università.

Ma in questo momento in cui, in seguito ad un onorevole invito rivoltomi dalla Direzione di questi gloriosi *Annali*, io debbo esaminare, sia pur brevemente, l'opera scientifica dell'indimenticabile geometra, sento l'imprescindibile dovere di trattenere le lacrime, comprimendo qualunque impulso del cuore, affinchè in quanto sto per dire il lettore non sia trascinato a ravvisare elogi dettati dall'affetto, in luogo di semplici constatazioni di fatti ormai acquisiti dalla storia della scienza.

1. — Nell'anno accademico 1881-82, quando il SEGRE era inscritto nel terzo anno di corso per la laurea in matematica, il professore ENRICO D'OVIDIO scelse come argomento delle sue lezioni di geometria superiore nell'Università di Torino, la geometria della retta. Ciò servì di occasione e stimolo pei suoi ascoltatori di prendere conoscenza dei fondamentali lavori sull'argomento del PLÜCKER e del KUMMER: proseguendo in tale via si passò a quelli di F. KLEIN e G. BATTAGLINI; e poichè gli scritti del primo di questi matematici sono tutti informati al concetto dell'essere la geometria dello spazio rigato identica allo studio di una varietà quadratica a quattro dimensioni immersa in uno spazio lineare a cinque, mentre d'altronde vi è fatto largo uso della riduzione a forma canonica di una coppia di forme quadratiche, così da un lato si fu indotti a studiare la grande memoria del VERONESE sulla geometria proiettiva degli iperspazi e dall'altra a prendere notizia di quella, non meno importante, del WEIERSTRASS sulle forme bilineari e quadratiche.

Ora, appunto gli scritti del KLEIN, del BATTAGLINI, del VERONESE e del WEIERSTRASS costituiscono la piattaforma su cui riposano le pubblicazioni con cui il SEGRE esordì, applauditissimo, sulla scena del mondo matematico.

Delle due memorie ([2] e [3] (1)) costituenti in origine la dissertazione di laurea dell'autore, la prima contiene uno studio metodico delle quàdriche situate in ispazi comunque estesi, delle loro scambievoli intersezioni e dei risultanti sistemi lineari (fasci e schiere di quàdriche); il teorema di WEIERSTRASS, che assegna la condizione necessaria e sufficiente affinchè una coppia di forme bilineari o quadratiche si possa trasformare in altra, viene presentato sotto forma geometrica per dedurne criteri atti a caratterizzare una di dette coppie senza ricorrere alle equazioni cano-

(1) I numeri di questo tipo servono di richiamo ai lavori registrati nell'*Elenco* posto in calce al presente articolo e che venne redatto in buona parte dal prof. E. G. TOGLIATTI: si trovano ivi notati anche alcuni scritti minori (recensioni e necrologie) di cui, per brevità, non tenemmo conto nel presente articolo.

Digitized by Google

niche scoperte dal grande matematico tedesco. Applicando i risultati ottenuti al caso in cui lo spazio ambiente sia a cinque dimensioni (1), il SEGRE [3] ritrova e completa tutte le proprietà allora note dei complessi quadratici e ne stabilisce una completa classificazione, esente dagli errori in cui cadde un discepolo del KLEIN (A. WEILER), che per primo affrontò questa importante questione (2).

2. — Prima di occuparci di alcuni scritti che si collegano ai due testè discorsi è opportuno ricordare che (lo rilevò per primo il KLEIN) i complessi di rette studiati dal BATTAGLINI non sono del tutto generali, dal momento che sono rappresentabili, mediante le ordinarie coordinate di rette, con equazioni della forma $\Sigma c_{ik} p_{ik}^2 = 0$; tale osservazione fa nascere la questione: quali sono i complessi quadratici che entrano nella categoria investigata dal BATTAGLINI? Ora per risolverla un mezzo era offerto dal teorema (scoperto dall'ASCHIERI) che ogni complesso del BATTAGLINI può generarsi mediante le rette che tagliano armonicamente due date superficie di 2° ordine: di esso appunto è tratto profitto in un lavoro [1] ove l'anzidetta questione è risolta dal SEGRE con la collaborazione di un suo condiscepolo.

Lo stesso complesso venne poi investigato dal Nostro in altri due lavori; nell'uno [5] egli si servì della trasformazione doppia di spazio rappresentabile in coordinate proiettive mediante equazioni della forma $\rho x'_i = x_i^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, giungendo a nuove proprietà tanto di quel complesso quanto della superficie (tetraedroide) che ne è superficie singolare; nell'altro [85] sfruttò questa nuova definizione da lui scoperta pochi anni prima della deplorata sua fine: Date due schiere rigate non appartenenti alla stessa quàdrica, ogni retta r dello spazio incontra due generatrici a_1, a_2 della prima e due b_1, b_2 della seconda; ora se s'impone la condizione che la punteggiata $r\,(a_1, a_2, b_1, b_2)$ risulti proiettiva al fascio di piani $r\,(a_1, a_2, b_1, b_2)$, tutte le rette r che la soddisfano costituiscono un complesso del BATTAGLINI.

3. — Tra i fasci di quàdriche considerati nelle prime memorie da noi analizzate (3) non si trovano quelli costituiti tutti da quàdriche singolari

(1) È interessante notare che alla rappresentazione delle rette dello spazio ordinario sui punti di una quàdrica di S_5 il nostro autore ricorse in parecchie occasioni posteriori; p. es. investigando — in un lavoro [93] ispiratogli dal WILCZYNSKI — le congruenze rettilinee aventi per superficie focali due rigate sghembe.

(2) Le inesattezze rilevate dal SEGRE si riferiscono principalmente al caso in cui la superficie singolare del complesso è una quadrica doppia; esse sono notate anche in un articolo [4] il quale, nella sostanza, se non nella forma, è un'estratto della tesi di laurea dell'autore.

(3) A questo periodo della sua vita scientifica, in cui l'attenzione del SEGRE era di preferenza rivolta alla geometria della retta, appartengono due sue brevi note [8]

Digitized by Google

(coni di varie specie): di essi il nostro autore si è occupato in uno scritto [13] nel quale le considerazioni geometriche si alternano con le applicazioni di equazioni canoniche scoperte dal KRONECKER.

Al pari di questo è una derivazione della più volte citata memoria del WEIERSTRASS, e precisamente di quanto è ivi detto sulle forme bilineari, una memoria ([10] completata dalla nota [24]) nella quale (prendendo le mosse dalla classificazione delle omografie dello spazio ordinario, eseguita poco prima da un fratello d'armi del SEGRE che egli ricorda (1), è mostrato come la classificazione delle corrispondenze proiettive in S_n si possa ottenere senza ricorrere alle equazione canoniche scoperte dal sommo analista di Berlino. Nel corso di tale ricerca è esposta una completa teoria di dette corrispondenze, con l'aggiunta di nuovi risultati; limitiamoci a riferire il seguente teorema, il quale completa un risultato dovuto al SIACCI e che il nostro autore espose anche isolatamente [7]: « Se $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ sono due determinanti dello stesso grado e $|\alpha_{ik}|$, $|\beta_{ik}|$ i loro reciproci, i due determinanti $|pa_{ik}+qb_{ik}|$, $|p\alpha_{ik}+q\beta_{ik}|$ non differiscono al più che per un fattore e possiedono gli stessi divisori elementari ».

Proseguendo le sue meditazioni sopra le trasformazioni lineari in S_n [18] e giovandosi di alcune classiche ricerche del CAYLEY e dell'HERMITE sopra le sostituzioni ortogonali, il Nostro ha studiate a fondo le omografie che mutano in sè stessa una quàdrica ed è poi passato a congeneri investigazioni sulle correlazioni (2) negli iperspazi; importanti lavori del FROBENIUS e del VOSS si arricchirono in conseguenza di notevoli complementi (3).

Molteplici punti di contatto tanto con le più volte ricordate ricerche del WEIERSTRASS quanto con le memorie del SEGRE sulla geometria della retta possiede la notevolissima memoria [15] sull'astatica, la quale porge

---

e [19] sui complessi lineari e un suo originale lavoro [6] ove le sfere ed i complessi lineari di rette vengono avvicinati per essere studiati dal punto di vista delle metriche relative.

(1) G. LORIA, *Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazi* (Giorn. di matem. T. XXII, 1884).

(2) Di essi è una parola anche nella nota [11], la quale però si connette a scritti non del WEIERSTRASS, ma del PASCH e del LÜROTH.

(3) Non è fuor di proposito segnalare qui una ricerca compiuta recentemente dal SEGRE ([96]; cfr. [94]) la quale, da un certo punto di vista, si connette ai suoi studi sulle corrispondenze rappresentabili mediante equazioni lineari; alludiamo alle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1ª specie, che egli ha insegnato a studiare ricorrendo ad un'ingegnosa rappresentazione sopra le generatrici di due quàdriche, distinte o coincidenti, traendone in particolare gli elementi per una classificazione delle anzidette corrispondenze.

Digitized by Google

nuovi punti di vista e nuove proposizioni in un campo in cui eransi già illustrati matematici di alta rinomanza, fra cui basti citare il MINDING ed il SIACCI.

Un ultimo lavoro [12] del SEGRE, che si collega, nel modo che diremo, alla memoria del WEIERSTRASS, sulle forme quadratiche, ha per iscopo lo studio e la classificazione delle superficie di quarto ordine con conica doppia. Chi scrive le presenti linee erasi già occupato di tali figure per il caso in cui la linea doppia coincida col cerchio imaginario all'infinito(1) e, giovandosi della circostanza che, mediante coordinate pentasferiche, esse possono rappresentarsi con due equazioni quadratiche omogenee, ne aveva dedotta la classificazione dalle equazioni canoniche del WEIERSTRASS. Con una considerazione più geometrica il SEGRE, contemporaneamente al VERONESE, ha notato che, qualunque sia la natura della conica singolare, una superficie dell'anzidetta specie può ottenersi proiettando sullo spazio ordinario l'intersezione di due quadriche di S_4: applicando tale concetto egli ne stabilì una completa teoria e ne fece un'esauriente classificazione, che, oltre a ricondurre a superficie già note, ne rivelò altre nuove e interessanti.

Non è fuor di luogo rilevare esplicitamente che fra tali superficie di quarto ordine non si trova quella di KUMMER, con sedici punti ed altrettanti piani singolari, che s'incontra come superficie singolare di un complesso quadratico di rette: due brevi ma importanti note ([14], [16]) mostrano che essa pure attrasse l'attenzione del Nostro.

4. — Prima di proseguire nella descrizione della messe raccolta dal nostro matematico nelle sue peregrinazioni iperspaziali, è necessario (in omaggio alla cronologia, i cui diritti non possono nè debbono venire misconosciuti) far cenno di un gruppo di suoi scritti la cui prima radice è da ricercarsi nel suo insegnamento della geometria proiettiva, il quale corrisponde alla prima fase della sua carriera didattica. Uniformandosi alle idee del suo tempo, egli diede a questo insegnamento un indirizzo di assoluta purezza e per agevolare il còmpito dei suoi ascoltatori provocò la versione italiana della *Geometria di posizione* di STAUDT, che venne condotta felicemente a termine da M. PIERI, e vi premise un ottimo studio bio-bibliografico [39] relativo a colui a cui fu con ragione dato l'onorevole epiteto di « Euclide del Secolo XIX ». Avendo poi notata l'imperfezione causata nelle odierne esposizioni della geometria proiettiva per effetto dell'esclusione o dell'imperfetta trattazione degli elementi immaginari, escogitò [22] un procedimento elementare per stabilire la teoria delle « coppie » formate da tali elementi; a base di esso sta il

(1) Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino, 2ª Serie., T. XXXVI, 1884.

Digitized by Google

concetto di trasformazione di una proiettività binaria in altra mediante una proiettività ausiliare; quanto sia utile è luminosamente dimostrato dalle nuove dimostrazioni di teoremi sulle coniche a cui esso condusse il SEGRE. Proseguendo in quest'ordine di idee egli compose altro lavoro [23], ove il calcolo simbolico con trasformazioni geometriche è sfruttato per lo studio delle omografie binarie e, fra l'altro, conduce, per una via del tutto nuova, al teorema di PASCAL.

Questo genere di ricerche venne allora *solo apparentemente* abbandonato dal Nostro; ne è prova un gruppo originale di lavori [43] che egli diede alle stampe tre anni più tardi, i quali costituiscono un ulteriore sviluppo di idee di STAUDT. Invero tutti sanno che questo grande geometra definì una proiettività binaria come una corrispondenza univoca e continua fra due forme di prima specie, la quale goda della proprietà di mutare gruppi armonici, in gruppi armonici e ne dedusse l'eguaglianza di birapporti di due quaterne di punti corrispondenti; ora il SEGRE notò che, quando si considerano anche elementi complessi, si possono immaginare corrispondenze analoghe, ma in cui i birapporti di due quaterne corrispondenti siano numeri complessi, non eguali ma coniugati (1). Correttezza storica impone si rilevi che un giovane danese — C. JUEL — era stato condotto alla stessa conclusione poco prima del SEGRE, offrendo così un nuovo esempio di scoperte contemporanee, quasi fossero un inevitabile portato dei tempi. Ma è anche giustizia osservare che mentre il JUEL si arrestò alle prime conseguenze del suo trovato, il SEGRE ha completamente svolte le proprietà delle nuove corrispondenze e, collegando queste alle più elevate teorie dell'analisi matematica, creò un nuovo capitolo della nostra scienza, quello cioè che ha per tema gli enti iperalgebrici (2).

5. — Riprendendo l'analisi delle pubblicazioni che il SEGRE dedicò alla geometria degli iperspazi dopo di avere tratte mirabili conseguenze geometriche dal teorema di WEIERSTRASS sulle forme bilineari e quadratiche, ci si presenta un'estesa memoria ([34] di cui la nota [31] rappresenta una comunicazione preliminare) relativa alle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni, delle quali egli intraprese lo studio, non soltanto grazie alla loro importanza intrinseca, ma anche perchè, proiettandole sullo spazio ordinario, i loro contorni conducono ad una categoria di notevoli superficie. Fra quelle varietà se ne trovano molte generabili con

(1) A corrispondenza di tale specie si riferisce anche la nota [26].

(2) V. specialmente la seconda esposizione [50] dei suoi risultati da un punto di vista algebrico; la memoria [81] può considerarsi come un ulteriore svolgimento delle idee ivi esposte.

Digitized by Google

tre reti proiettive di spazi ordinari (chiamando « rete » la totalità degli S_3 di S_4 passanti per una retta); queste sono dotate di 6, 7.... o 10 punti doppi ordinari; ma vi sono altre delle varietà considerate che possiedono punti singolari di specie superiore o anche infiniti punti doppi: di tutte l'autore fece uno studio accurato. Va rilevato che da siffatte indagini egli fu indotto ad avvertire alcune insospettate prerogative dello spazio a quattro dimensioni, alla cui esposizione egli dedicò un lavoro speciale [36], l'importanza del quale è documentata da ulteriori ricerche che ne furono corollario (1).

6. — Ma, prima di occuparsi di queste particolari figure, il SEGRE aveva iniziate ricerche sulle superficie rigate algebriche, che lo occuparono parecchi anni e lo condussero a risultati della più alta importanza. Allo studio di tali figure egli fu indotto da un passo della citata memoria del VERONESE, ove questo egregio geometra considera la figura dello spazio S_{n+1} che è generata da n fasci proiettivi di S_n : è una rigata razionale; se non che, mentre egli asserì che tutte le figure così risultanti sono fra loro proiettivamente identiche, il SEGRE trovò [9] che esse si ripartiscono in $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ specie, secondo che n è pari o dispari, cosicchè due rigate razionali si possono trasformare per proiettività una in altra soltanto quando appartengano alla medesima specie: tale conclusione è in perfetto accordo con altra a cui giunse molto prima il CLEBSCH, ed il SEGRE ritrova, mediante opportune proiezioni e sezioni, la rappresentazione su di un piano di tutte le rigate razionali dello spazio ordinario assegnata per la prima volta da quell'eminente scienziato.

Da siffatto studio il Nostro fu condotto a due distinti ordini d'investigazioni. Considerando che una rigata è una serie di ∞^1 S_1 egli fu indotto a considerare gli analoghi sistemi di S_i, arrestandosi in particolare [20] al caso di $i = 2$. Considerando d'altra parte che il genere delle rigate di cui sopra è $p = 0$, egli volse il pensiero al caso di $p = 1$ [25] e poi all'ipotesi di p qualunque ([28] e [32]), slanciandosi poi a considerare [33] i fenomeni analoghi che avvengono nelle varietà costituite da una serie semplicemente infinita di spazi lineari.

I nuovi risultati ottenuti dal SEGRE sulle rigate algebriche si trovano organicamente coordinati in un'estesa memoria ([27] e [41]) a cui deve ricorrere chiunque voglia oggi occuparsi dell'importante argomento; si leggono poi anche in altro lavoro [57], frutto di lezioni svolte durante l'anno 1890-91, nel quale, con ragionamenti iperspaziali, sono gettate le

(1) P. H. SCHOUTE, *Considerations in reference to a configuration of Segre* (Proc. of the K. Acad. of Wetensch. to Amsterdam, 1901, pp. 203-214 e 251-264).

Digitized by Google

basi della geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito; lo studio di essa va utilmente accompagnato da quello dell'analogo lavoro (pubblicato nello stesso vol. di questi *Annali*) in cui E. BERTINI giunse agli stessi risultati con procedimenti algebrici.

7. — Fra le figure investigate in questa fondamentale scrittura [58], se ne incontrano di quelle che erano state assai prima considerate dai matematici, cioè le curve, ed anche queste figure furono scopo delle meditazioni del Nostro. Così in una nota [37] che reca la sua firma è stabilito in modo nuovo e sono tratte nuove conseguenze, dall'importante teorema di CLIFFORD, affermante che una curva di genere p e ordine $n > 2p - r$ non può appartenere ad un S_r, per $r > n - p$. Con altra [30] il SEGRE ha partecipato alla fioritura di lavori, verificatasi intorno al 1889, sui sistemi lineari di curve piane algebriche; in una terza ([21], cfr. [42]) egli presentò in forma organica un gruppo di teoremi relativi alle curve dei generi o e 1. Sorvolando su un articolo [50] dal modesto scopo di far conoscere alcune idee di E. CAPORALI, ricorderemo due note ([61] e [65]) relative ad alcuni speciali punti che si trovano nelle curve algebriche; e va esplicitamente rilevato che alla seconda di esse serve di complemento un ottimo lavoro postumo [102] del compianto geometra.

Finalmente alla teoria delle curve algebriche piane appartiene il riassunto [63] di alcune lezioni universitarie ove è trattata a fondo una questione che incontra chiunque intenda esporre rigorosamente quella teoria sino alle formule di PLÜCKER inclusivamente; cioè la questione di calcolare quante intersezioni di due linee dell'anzidetta specie sieno assorbite da un punto comune, di assegnata singolarità per ciascuna. E' un lavoro modesto, ma che ha tutte le doti per essere giudicato definitivo sull'argomento.

8. — Proseguendo nello svolgimento del vasto programma di lavoro che egli si era proposto, lo studio cioè di tutte le figure che si possono concepire in S_n, il SEGRE trovò [38] che i sistemi di ∞^{n-1} rette (figure analoghe alle congruenze dello spazio ordinario) sono costituiti ciascuno dalle rette tangenti $n - 1$ volte ad una varietà ad $n - 1$ dimensioni, la quale è la naturale estensione della notissima superficie focale. — Prima [17] egli aveva approfondita la rappresentazione delle ∞^5 coniche di un piano sugli elementi di un S_5 arrestandosi in particolare sulle varietà che corrispondono all' insieme delle coniche specializzate una o più volte e determinando qual valore e quale portata possegga la già proposta rappresentazione dei complessi lineari di rette sulle coniche di un piano. — A lui devesi anche un'accurata indagine [56] del contegno della varietà Hessiana di una data in un punto di assegnata singolarità per questa, la quale indagine, fra l'altro, guidò alla scoperta

Digitized by Google

del bizzarro comportamento di alcune curve degli ordini 25, 26, 28, 33, 50 dotate di certe singolarità. — Al nostro autore spetta pure la scoperta ed il primo studio [47] di una categoria importante di varietà, le quali con pieno diritto portano oggi il suo nome (1); giova ricordarne la definizione: Dati n spazi delle dimensioni p_1, p_2,... p_r, si chiamino $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{p_i}^{(i)}$ le coordinate omogenee di un punto qualunque dell'i^{mo} fra essi; se si pone

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_r} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_r}^{(r)}$$

e si riguardano le X come coordinate omogenee di un punto di uno spazio a $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \ldots (p_r + 1) - 1$ dimensioni, le formule precedenti rappresenteranno una varietà a $p_1 + p_2 \ldots + p_r$ dimensioni che appartiene appunto alla classe di cui è parola. — Applicando poi una formola ottenuta servendosi del calcolo ideato da H. SCHUBERT per trattare le questioni di geometria numerativa, egli ha risolto [67] un notevole gruppo di questioni pertinenti a questo ramo della geometria; di più, con l'insegnamento e con l'esempio. diede la spinta a buon numero di ricerche congeneri, fra cui spiccano tanto quelle dovute a G. GIAMBELLI, quanto quelle posteriori e di carattere più generale di F. SEVERI.

9. — Verso il tramonto della sua troppo breve carriera il SEGRE ha studiati i complessi lineari di S_2 in S_5 con metodi in gran parte modellati sopra quelli in uso per investigare la geometria della retta nello spazio ordinario. Inoltre in un manipolo di importanti lavori ([85], [88], [90]) ha iniziata e spinta notevolmente avanti la ricerca delle proprietà delle schiere rigate (o « regoli », secondo la nomenclatura da lui proposta), alternando le considerazioni sintetiche con opportuni sviluppi analitici, i quali, con la loro lucida semplicità destano meraviglia ed ammirazione, avendo l'intento di porre allo scoperto le più riposte qualità di enti geometrici complicatissimi: che tali ricerche non meritino di venire considerate oggetti di semplice curiosità è dimostrato dalle nuove proposizioni relative a figure dello spazio ordinario, a cui esse condussero e che trovansi registrate in uno scritto [84] che abbiamo già avuto occasione di citare.

A tali indagini si connette (quantunque siano ivi evitate le considerazioni iperspaziali) una memoria [92] avente per soggetto le corrispondenze rappresentabili mediante equazioni della forma $\Sigma c_{ik} p_i q_k = 0$ ($i, k = 1, 2, \ldots, 6$) con la condizione $c_{ik} + c_{ki} = 0$, ove p_i e q_k sono coordinate omogenee di due rette poste in relazione una con l'altra.

---

(1) SCORZA, *Sulle varietà di Segre* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, T. XLV, 1909-10).

Digitized by Google

Emerge da tutto ciò (e verrà confermato da altre cose che diremo) che alla fine dello scorso secolo il SEGRE aveva il primato fra i conoscitori ed i contributori della geometria pluridimensionale; in conseguenza, non appena formulato il piano di una grande enciclopedia matematica, senza discussione fu lui designato a redigere il riassunto relativo a quella materia; il non facile còmpito venne adempiuto con tanto scrupolo e tale profondità che l'articolo da lui scritto [89] fu giudicato meritevole di servire quale modello pei futuri congeneri lavori.

10. — Nel corso delle sue ricerche iperspaziali il SEGRE s'imbattè più volte in questioni concernenti le superficie algebriche, sulle quali le conoscenze, quando egli esordì, erano per molti riguardi monche e frammentarie: specialmente oscurità profonda avvolgeva la struttura dei punti singolari e quanto concerne l'estensione allo spazio della nozione di genere di una curva.

Riguardo alla prima categoria di problemi, come naturale estensione di una procedura che erasi manifestata fecondissima nel piano, si presentava la questione di ridurre le singolarità di una superficie a certi tipi fissi applicando opportune trasformazioni birazionali; a tale importante indagine si riferisce un'elaborata memoria del nostro [58], la quale ebbe la triste prerogativa di trascinarlo in una breve ma poco piacevole polemica ([59], [60]).

Invece agli studi sui generi di una superficie il SEGRE arrecò un notevole contributo [57] estendendo allo spazio una considerazione che erasi dimostrata assai giovevole nel piano; in tal modo giunse a provare che «su una qualunque superficie algebrica il numero δ dei punti doppi staccati di curve di un fascio, diminuito del numero σ dei punti base di questo fascio e del quadruplo del genere di questo, è indipendente dal fascio considerato», epperò costituisce un carattere P della superficie su cui ragionasi: tale numero può anche esprimersi sotto la forma $12p - p^{(1)} + 9$, ove p è il genere superficiale e $p^{(1)}$ il genere lineare della data superficie. Esso era stato incontrato prima, sotto altro punto di vista, dallo ZEUTHEN, ond'è pienamente giustificato il nome di «invariante di ZEUTHEN-SEGRE», con cui viene designato. Giova poi osservare, col nostro autore, che il ragionamento da lui usato nel piano e nello spazio ordinario, è applicabile anche agli spazi superiori; in particolare guida ad un carattere delle varietà a tre dimensioni, dianzi ignoto.

E' necessario osservare qui che, come da giovane, il SEGRE, con parecchi lavori sopra le superficie di quart'ordine aveva manifestato il proprio interesse per la superficie di ordine determinato, diede prova della persistenza di tale sentimento con un'elegante nota [71] sopra quelle del

Digitized by Google

terzo, la quale porge un notevole complemento alla famosa memoria del CREMONA sopra tali figure.

11. — Questa nostra rapida rassegna deve anche contenere almeno un cenno di un'acuta osservazione fatta dal SEGRE [67] la quale cagionò nel campo dei geometri una ben giustificata emozione (dovrei forse dire fu causa di un momentaneo scandalo); essa consiste nel rilievo che non è conclusivo il noto ragionamento congegnato dal NOETHER per dimostrare che ogni trasformazione piana birazionale può ottenersi quale prodotto di trasformazioni quadratiche, rilievo tanto più importante giacchè la stessa argomentazione era stata più volte applicata nello studio dei sistemi lineari di curve piane. Il timore di dovere in conseguenza abbattere edifici di notevole importanza fu, fortunatamente, di breve durata, perchè il CASTELNUOVO suggerì subito un'altra argomentazione conducente allo scopo ed al riparo da ogni critica. Tuttavia la sensata critica del SEGRE conserva intatto il proprio valore, come il NOETHER stesso ebbe onestamente a riconoscere.

12. — L'ultima categoria di lavori del nostro autore che ci rimane da considerare è dovuta all'influenza esercitata su di lui dal DARBOUX per mezzo delle sue notissime *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* sfruttate ampiamente dal SEGRE in alcuni corsi universitari. Le ricerche a cui alludiamo appartengono a quel capitolo della geometria infinitesimale che designasi oggi con l'epiteto di « differenziale-proiettiva » e di cui una delle prime pagine venne scritta da M. CHASLES quando scoperse la projettività che intercede fra la punteggiata avente per sede una generatrice di una superficie rigata ed il fascio costituito dai corrispondenti piani tangenti.

Siffatta dipendenza dal DARBOUX è riconosciuta dal Nostro in un'estesa memoria [75] ove l'autore, giovandosi dell'ammirabile disinvoltura con cui egli sapeva percorrere tutti gli spazi, generalizza una considerazione utilizzata dal citato geometra francese per le equazioni a derivate parziali di secondo ordine. Per raggiungere lo scopo che erasi prefisso egli premette una succinta ma luminosa esposizione delle principali proprietà infinitesimali di una superficie in S_4 nell'intorno di un suo punto, la quale possiede un valore indipendente dal fine a cui mirava l'autore. Le applicazioni da lui fattene hanno segnalata a geometri ed analisti una miniera ricca di nobile metallo, che sarebbe imprudente spensieratezza non approfondire ulteriormente. Egli stesso ha ulteriormente svolto l'argomento, almeno secondo una direzione, in una memoria ([98] e [99]) intesa a porre le basi della teoria di figure analoghe alle rigate, cioè alle varietà costituite da spazi lineari in S_4. A tale considerazione simultanea di considerazioni infinitesimali e di considerazioni iperspaziali deve la vita

Digitized by Google

un recente manipolo di bellissimi lavori del nostro ([96]...[99]) che siamo costretti a nominare di sfuggita, troppo spazio essendo necessario per esporne il variopinto contenuto.

Ad altro passo delle succitate *Leçons* debbono la vita alcune ricerche del SEGRE [97] sulle superficie di traslazione, considerate in quanto contengono due sistemi coniugati di curve tali che le corrispondenti sviluppabili circoscritte sono coni. Ed è estremamente notevole che a superficie algebriche di detta specie egli fu ricondotto in un lavoro [103] (l'ultimo recante la sua firma), ove esse si incontrano come caratterizzate dall'essere le sezioni stesse rappresentabili univocamente su un piano, per modo che alle loro sezioni piane corrispondano curve d'ordine n circoscritte ad un $(n+1)$ — latero completo, a sua volta, circoscritto ad una conica.

13. — In una memoria [78], che è pure di pertinenza della geometria infinitesimale, egli ha osservato che, come la considerazione dei punti di una superficie i quali sono, rispetto ad un punto O infinitamente vicini di primo ordine, condusse alla teoria delle tangenti coniugate, così a nuove configurazioni geometriche conduce la considerazione dei punti che stanno, rispetto a O, a distanze infinitesime di ordini superiori. Sviluppando tale concetto, egli stabilì una corrispondenza cremoniana di terzo grado fra i piani per O ed i punti del corrispondente piano tangente, la quale lo indusse a introdurre un nuovo sistema di linee sopra una superficie qualunque, analoghe a quelle che portano i nome di DARBOUX; l'importanza delle «linee di Segre» fu ben presto posta in meridiana luce da G. FUBINI, il quale ne stabilì l'equazione differenziale sotto varie forme.

Alla stessa grande branca della geometria appartengono alcune memorie del SEGRE concernenti le superficie rigate; una [74] venne da noi già ricordata; un'altra [82] (che è l'ultima di cui parleremo) ha per fondamento il seguente notevole teorema: «Se una curva gobba gode della proprietà che per ogni suo punto si possa condurre una retta situata nel corrispondente piano osculatore ed appartenente ad una congruenza lineare, tutte le sue tangenti staranno in un complesso di primo grado»; a stabilirne l'importanza bastano le applicazioni fattene dall'autore allo studio dei sistemi di rette tali che almeno una delle falde della corrispondente superficie focale sia rigata.

14. — Il numero e la varietà dei risultati ottenuti dal SEGRE ci ha vietato, non solo di enumerarli per intero, ma anche di entrare in particolari intorno alla forma in cui sono scritte le sue memorie. Ma, prima di chiudere questa troppo rapida rivista, ci corre l'obbligo di segnalare ai giovani geometri l'esemplare accuratezza da lui sempre usata nello scrivere e l'eleganza perfetta dei calcoli da lui eseguiti. Egli usò di preferenza il ragionamento puramente sintetico, anche nelle circostanze in cui l'in-

Digitized by Google

tuizione geometrica non poteva venire utilmente invocata; ma, quasi sempre, confermava le proprie conclusioni mediante opportune formule, la semplicità delle quali cela la profondità del pensiero. La sua tendenza e la sua propensione verso la geometria non gl'impedì di apprezzare a dovere la somma importanza e la irresistibile energia dell'analisi; ed invero, come nei primordi della sua carriera ne raccomandava caldamente lo studio ai propri discepoli (v. [46], [76]), così, in un'occasione solenne si compiacque (v. [69] e [72]) di porre in luce i legami cordiali e strettissimi delle due discipline sorelle. E chi ne legge i lavori ben si avvede come di quel paterno consiglio egli abbia fatto norma costante dei propri studi, giacchè si trovano ivi utilizzati i più importanti elementi della moderna letteratura analitica. Fu appunto tale vasta e profonda cultura che, alleandosi alla alata fantasia geometrica di cui natura avevalo dotato, gli permise, specialmente nei suoi ultimi anni di vita, di arricchire il patrimonio geometrico di ricerche sopra figure del tutto nuove e che, per la loro complicazione, avrebbero spaventato chi non fosse stato come lui animato da quel sereno coraggio in cui rispecchiasi la coscienza della propria forza.

15. — Benchè parecchi lavori del compianto geometra, per esplicita dichiarazione sua, siano frutto del suo insegnamento universitario (1), pure non possono in alcun modo servire da soli a porgere un'idea della cura da lui posta nel preparare le proprie lezioni, cura la cui efficacia è documentata dalla splendida collezione di lavori dei suoi discepoli (2). Fortunatamente di tanto lavoro è rimasto un residuo tangibile; chè, essendo stata sua costante abitudine lo scriverne riassunti lucidissimi, corredati da ampie indicazioni bibliografiche, egli ha lasciata una collezione preziosa e che, fortunatamente, si trova in mani sicure (3). E' voto generale che almeno i più cospicui elementi di tale raccolta (4) possano vedere la

(1) Anche alcuni suoi scritti storici (p. es. [68]) ripetono origine congenere.

(2) Ove, ripubblicando i lavori del SEGRE, venisse adottato il sistema seguito dagli editori delle *Opere* di GIACOMO BERNOULLI, i quali vi inserirono anche le Dissertazioni di laurea composte sotto la sua direzione, parecchi volumi non sarebbero a ciò sufficienti.

(3) Questi fascicoli avrebbero fornito buona parte dei materiali per quelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie* il cui annuncio si trovò per parecchi anni nei Cataloghi della Casa Teubner.

(4) Può interessare i lettori di conoscere i temi svolti dal SEGRE; perciò indichiamo i principali: Teoria delle curve e delle superficie algebriche - Geometria degli enti geometrici semplicemente infiniti. - Trasformazioni birazionali nel piano - Singolarità delle curve e delle superficie - Gruppi continui di trasformazioni - Curve algebriche dei varî spazi - Geometria numerativa - Sistemi lineari di curve piane e superficie razionali - Geo-

Digitized by Google

luce; così la voce, troppo presto spenta, dell'illustre maestro potrà essere ascoltata dalle generazioni future e si avrà una nuova manifestazione del consolante fenomeno generale, che il WEIERSTRASS espresse con concisione scultorea, scrivendo ad una sua alunna prediletta: *Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben.*

Genova, Ottobre 1924.

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI DI CORRADO SEGRE.

1. *Sur les différentes espèces de complexes du 2d degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2d ordre*; luglio 1883, Math. Ann., XXIII, pag. 213-234, (in collaborazione con G. LORIA).
2. *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; 27 aprile 1883, Mem. Acc. Torino. (2), XXXVI, pag. 3-86.
3. *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*; 27 aprile 1883, Mem. Acc. Torino. (2), XXXVI, pag. 87-157.
4. *Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2d degré double*; 22 settembre 1883, Math Ann., XXIII, pag. 235-243.
5. *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche inscritte in un tetraedro*; ottobre 1883, Giorn. di Mat., XXI, pag. 355-378.
6. *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie*; 18 dicembre 1883, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 159-186.
7. *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche*; 17 ottobre 1883, Giorn. di Matem., XXII, pag. 29-32.
8. *Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes*: 6 gennaio 1884, Journ. für Math., 97, pag. 95-110.
9. *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*; 31 gennaio 1884, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 355-372.
10. *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; aprile 1884, Mem. Acc. Lincei, (3) XIX, (1884) pag. 127-148.
11. *Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques*; 11 aprile 1884, Math. Ann., XXIV, pag. 152-156.

---

metria su una superficie algebrica - Geometria non euclidea - Applicazione degli integrali abeliani alla geometria - Forme delle curve algebriche - Classificazione delle curve algebriche - I gruppi in geometria - Geometria della retta - Concetti e metodi della geometria della retta - Superficie di terzo e curve di quarto ordine - Curve e superficie algebriche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali - Gruppi continui di trasformazioni - Sistemi lineari di coniche e quàdriche - Geometria degli iperspazi - Teoria degli invarianti applicati alla geometria - Geometria differenziale - Vedute superiori sulla geometria elementare - Complessi di rette di 1° e 2° grado - Gruppi d'ordine finito - Geometria delle equazioni differenziali - Capitoli di geometria algebrica - Circoli e sfere.

Digitized by Google

12. *Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions*; 8 aprile 1884, Math. Ann. XXIV, pag. 313-444.
13. *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque*; 18 maggio 1884, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 878-896.
14. *Sur un cas particulier de la surface de Kummer.* Lettre à M. K. Rohn; 9 agosto 1884, Leipziger Ber., XXXVI, pag. 132-135.
15. *Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità e su alcune questioni geometriche affini*; 20 agosto 1884, Mem. Soc. Ital. delle Sci. (dei XL), (3) VI, n. 3, pag. 1-35.
16. *Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer* (extrait d'une lettre adressée a M. Th. Reye); 24 ottobre 1884, Journ. für Math. 98, pag. 301-303.
17. *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette*; gennaio 1885, Atti Acc. Torino, XX, pag, 487-504.
18. *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta*; marzo 1885, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVII, pag. 395-425.
19. *Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires*; 15 maggio 1885, Journ. für Math., 99, pag. 169-172.
20. *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*; novembre 1885, Atti Acc. Torino, XXI, pag. 95-115.
21. *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles mêmes*; Gennaio 1886, Math. Ann. XXVIII, pag. 296-314.
22. *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica*; febbraio 1886, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVIII, pag. 3-24.
23. *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux*; 27 marzo 1886, Journ. für Math., 100, pag. 317-330.
24. *Sugli spazi fondamentali di una omografia*; maggio 1886, Rend. Acc. Lincei, (4) II, pag. 325-327.
25. *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*; maggio 1886, Atti Acc. Torino XXI. pag. 868-891.
26. *Su alcune proprietà metriche delle correlazioni*; 16 luglio 1886, Giorn. di Mat. XXV. pag. 20-24.
27. *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (I partie, courbes algébriques); gennaio 1887, Math. Ann., XXX, pag. 203-226.
28. *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque*; gennaio 1887, Atti Acc. Torino, XXII, pag. 362-363.
29. *Sur un théorème de la géométrie à* n *dimensions*; 17 marzo 1887 (extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein), Math. Ann., XXX, pag. 308.
30. *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere* p (estratto di lettera al dott. G. B. Guccia); 9 aprile 1887, Rend. Palermo, I, pag. 217-221.
31. *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*; 14 maggio 1887, Atti Acc. Torino, XXII, pag. 791-801.
32. *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*; luglio 1887, Rend. Acc. Lincei (4), III_2, pag. 3-6.

Digitized by Google

33. *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi*; ottobre 1887, Rend. Acc. Lincei, (4), III_2, pag. 149-153.
34. *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*; dicembre 1887, Mem. Acc. Torino, (2), XXXIX, pag. 3-48.
35. Recensioni in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, T. XVI, 1884.
36. *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*; febbraio 1888, Rend. Palermo II, pag. 45-52.
37. *Sulle curve normali di genere* p *dei vari spazi*; aprile 1888, Rend. Ist. Lomb., (2), XXI, pag. 523-528.
38. *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori*; luglio 1888, Rend., Palermo, II, p. 148-149.
39. *C. G. C. von Staudt e i suoi lavori*; luglio 1888 (prefazione alla trad. ital. della «Geometrie der Lage» di STAUDT), pag. V-XXI.
40. Recensioni in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, T. XVII, 1885.
41. *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (II partie, *Surfaces réglées algébriques*); gennaio 1889, Math. Ann., XXXIV, pag. 1-25.
42. *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*: giugno 1889, Atti Acc. Torino, XXIV, pag. 734-756.
43. *Un nuovo campo di ricerche geometriche*; 4 note, autunno 1889; I, Atti Acc. Torino, XXV, pag. 276-301; II, id., XXV, pag. 430-457; III, id., XXV, pag. 592-612; IV, id., XXVI, pag. 35-71.
44. Nota alla Memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*. Rend. Palermo, IV, pag. 86-88.
45. *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*; febbraio 1891, Riv. di Mat. I, pag. 42-66.
46. *Una dichiarazione* (risposta a G. Peano): aprile 1891, Riv. di Mat., I, pag. 154-156.
47. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*; aprile 1891, Rend. Palermo, V, pag. 192-204.
48. *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*; settembre 1891, Math. Ann., XL, pag. 413-467.
49. *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve*; Bibl. Math., (2), VI, pag. 33-47.
50. *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane*; agosto 1892, Annali di Matem., (2), 20, pag. 237-242.
51. *Riccardo De Paolis*; cenni biografici, settembre 1892, Rend. Palermo, VI, pag. 208-224.
52. *Giuseppe Bruno*; cenni biografici, settembre 1893, Annuario della R. Università di Torino, 1893-1894, pag. 155-166.
53. *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*; autunno 1893, Annali di Mat., (2), XXII, 41-42.
54. Nota sul lavoro di RICCARDO DE PAOLIS: *Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi sulle forme fondamentali a due dimensioni*; ottobre 1894, Rend. Acc. Lincei, (5), III_2, pag. 227-229.
55. *Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*, von A. BRILL und N. NOETHER; Cenni. 2 dicembre 1894, Atti Acc. Torino, XXX, pag. 109-111.
56. *Sulla forma Hessiana*; ottobre 1895, Rend. Acc. Lincei, (5), IV_2, pag. 143-148.

Digitized by Google

57. *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*; febbraio 1896, Atti Acc. Torino, pag. 485-501.
58. *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; ottobre 1896, Annali di Mat., (2), XXV, pag. 2-54.
59. Intorno ad una mia Memoria: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; maggio 1897, Atti Acc. Torino, XXXII, pag. 781-789.
60. *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie*; 27 giugno 1897, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 19-23.
61. *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*; settembre 1897, Rend. Acc. Lincei, (5), VI_2, pag. 168-175.
62. *Le molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve*; settembre 1897, Giorn. di Mat., XXXVI, pag. 1-50.
63. Recensione delle *Lezioni di geometria proiettiva* di F. ENRIQUES. Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche, T. I, 1898, pag. 11-15.
64. *Sophus Lie*: Cenni, 26 febbraio 1899, Atti Acc. Torino, XXXIV, pag. 363-366; e Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche, II, pag. 68-75.
65. *Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica*; Agosto 1899, Rend. Acc. Lincei, (5), $VIII_2$, pag. 89-91.
66. *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*; ottobre 1900, Rend. Acc. Lincei, (5), IX_2, pag. 253-260.
67. *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*; marzo 1901, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 645-651.
68. *Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-Euclidea*; aprile 1903, Atti Acc. Torino, XXXVIII, pag. 535-547.
69. *La geometria d'oggidì e i suoi legami con l'analisi*; 13 agosto 1904, Verhandlungen des 3en intern. Math.-Kongress in Heidelberg, pag. 109-120; e Rend. Palermo, XIX (1905), pag. 81-93.
70. *On some tendencies in geometric investigations*; Bull. Amer. Math. Society, (2) X, pag. 442-468 (traduz. del n. 45).
71. *Sur la génération projective des surfaces cubiques*; Extrait d'une lettre adressée à M. le prof. R. STURM; 25 marzo 1905, Archiv. der Math. u. Ph., (3) X (1906), pag. 209-215.
72. *Geometryia dzisiejsza i iy zwiazki z Analiza*, 1905, Abbitka z Wiadomosci matematycznich, T. IX, Warszawa, pag. 7-41, (traduzione del n. 70).
73. *Monge e le congruenze generali di rette*; Bibl. Math., (3) VII, pag. 321-324.
74. *Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate*; marzo 1907, Atti Acc. Torino, XLII, pag. 539-550.
75. *Su una classe di superficie degli iperspazi legata con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*; giugno 1907, Atti, Acc. Torino, XLII, pag. 1047-1079.
76. M. NOETHER, H. POINCARÉ, C. SEGRE, Relazione del concorso internazionale per la «Medaglia Guccia»; febbraio 1908, Atti del IV Congresso intern. dei Mat., I, pag. 209-216; e Rend. Palermo, XXVI, pag. 145-151.
77. *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti*; giugno 1908, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 985-997.
78. *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*; novembre 1908, Rend. Acc. Lincei, (5) $XVII_2$, pag. 456-412.
79. *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*; 22 marzo 1910, Rend. Palermo, XXX, pag. 87-121.

Digitized by Google

80. Aggiunta alla Memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*; 9 luglio 1910, Rend. Palermo, XXX, pag. 246-348.
81. *Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali*; gennaio 1912, Atti Acc. Torino, XLVII, Nota I, pag. 308-327, Nota II, pag. 384-405.
82. *Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate*: dicembre 1913, Atti Acc. Torino, XLIX, pag. 291-303.
83. Relazione sul concorso al Premio Reale per la Matematica del 1913; commissari: E. BERTINI, L. BIANCHI, S. PINCHERLE, V. VOLTERRA, C. SEGRE (relatore); 6 gennaio 1916, Atti Acc. Lincei, Rendiconti, Adunanze solenni, III pag. 23-33.
84. *Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini*; ottobre 1916, Rend. Palermo, XLII, pag. 85-93.
85. *Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli*; marzo 1917, Rend. Acc. Lincei, (5) $XXVI_1$, pag. 341-344.
86. *Commemorazione del socio nazionale Giuseppe Veronese*; 4 novembre 1917, Rend. Acc. (5) $XXVI_2$, pag. 249-256.
87. *Sui complessi lineari di piani nello spazio a 5 dimension.*; Annali di Mat., (3) XXVII, pag. 75-123.
88. *Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti*; Annali di Mat., (3) XXVII, pag. 161-181.
89. *Mehrdimensionale Räume*; Enzyklopädie der math. Wiss. IIIc, 7, pag. 769-972.
90. *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi inviluppi.* Scritti matematici offerti ad ENRICO D'OVIDIO. Torino, Bocca, pag. 1-21.
91. *Le previsioni*; Discorso inaugurale, novembre 1918, Annuario della R. Università di Torino, 1918-19, pag. 11-25.
92. *I connessi bilineari alternati di coppie di rette*; novembre 1919, Rend. Palermo, XLIV, pag. 139-146.
93. *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche*; novembre 1919, Rend. Acc. Lincei, (5) $XXVIII_2$, pag. 308-312.
94. *H. G. Zeuthen*; cenno commemorativo, 25 gennaio 1920, Atti Acc. Torino, LV, pag. 327-328.
95. *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali*; Annali di Mat., (3) XXIX, pag. 105-140.
96. *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti*; febbraio 1921, Rend. Acc. Lincei, (5) XXX_3, pag. 67-71.
97. *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*; Rend. Acc. Lincei, (5) XXX_1, Nota I, marzo 1921, pag. 200-203; Nota II, aprile 1921, pag. 227-231.
98. *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali*; giugno 1921, Atti Acc. Torino, LVI, pag. 143-157.
99. *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinita di curve piane o spaziali*; Nota II, giugno 1922, Atti Acc. Torino, LVII, pag. 575-585.
100. *Max Noether e Hermann Schwarz*; 8 gennaio 1922, Atti Acc. Torino LVII, pag. 161-163.
101. *Commemorazione del socio straniero Carlo Teodoro Reye*; 2 aprile 1922, Rend. Acc. Lincei, (5) XXX, pag. 269-72.
102. *Sugli elementi lineari che hanno comuni la tangente e il piano osculatore*; 13 aprile 1924; Rend. Acc. Lincei, (5) 33, pag, 325-329.
103. *Le curve piane d'ordine* n *circoscritte ad un* $(n+1)$*-latero completo di tangenti ad una conica e ad una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coniche circoscritte.* Atti Acc. Torino, LIX, pag. 303-320.

Digitized by Google

XXXIII.

P. TANNERY E LA SUA OPERA DI STORICO

Commemorazione tenuta a Parigi il 20 Maggio 1929 e pubblicata, nell'originale francese, nel Vol. XI (1929) dell'*Archeion*.

1. — Allorchè nel 1900 il Governo francese decise che, fra le molte riunioni scientifiche da tenersi in occasione dell'Esposizione Universale, vi fosse un Congresso di Storia comparata, PAUL TANNERY ottenne che una Sezione speciale fosse dedicata alla Storia delle scienze « dans le but de créer un centre de relations entre les personnes qui s'intéressent à l'Histoire des Sciences, de faire ressortir combien il importe de ne pas isoler les différentes branches de cette histoire, afin d'étudier les moyens d'accroître l'activitè des recherches fondées sur des documents originaux ». A queste frasi, che egli fece inserire nella Circolare d'invito, egli allegò un elenco di questioni da trattare, il quale è un vero programma di lavoro per la progettata riunione. Questa, che fu presieduta da TANNERY stesso, ebbe un indiscusso successo: ne è prova un bel volume che, sotto il titolo di *Annales internationales d'histoire,* offre un quadro completo dei lavori compiuti dal detto Congresso.

Era, a quanto so, la prima volta che in un Congresso internazionale di scienze storiche fosse accertato un posto alla Storia delle scienze. Il seme ha dato frutti; tre anni dopo, al successivo Congresso che fu tenuto a Roma, questo ramo di storia ottenne un posto distinto; PAUL TANNERY non mancò di partecipare ai suoi lavori; onorato come meritava dai suoi colleghi, egli vi rappresentò una parte eminente. In quest'occasione egli presentò alcune proposte, che riscossero la generale approvazione, aventi l'intento di rendere più vivace il progresso della storia delle scienze; fra esse si nota la creazione di una Società e di una Rivista generale per detta materia; d'altra parte egli accordò la sua cordiale adesione al voto, presentato da alcuni scienziati italiani (1), relativo all'introduzione della storia delle scienze nei programmi d'insegnamento delle scuole medie.

La riunione di Roma diede un numero così grande di risultati positivi che, al momento di chiudere i propri lavori, i membri della Sezione che c'interessa furono unanimi nel desiderio di trovare un mezzo sicuro

(1) D. BARDUZZI, P. GIACOSA e G. LORIA (*relatore*). *In quale modo ed in quale misura la storia delle scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche possa costituire oggetto di un corso universitario* in Atti del Cong. intern. di Scienze storiche, Roma 1902.

Digitized by Google

per assicurare all'opera compiuta una continuazione; a tale scopo si deliberò la creazione di una Commissione internazionale permanente avente il còmpito di organizzare nei futuri Congressi di scienze storiche, sezioni autonome di Storia delle scienze: come presidente fu scelto senza discussione PAUL TANNERY.

Sventuratamente, nemmeno un anno era trascorso da questa deliberazione, che egli non era già più fra i mortali; ma tutte le iniziative da lui prese gli hanno sopravvissuto. Infatti, i Congressi di scienze storiche che furono tenuti dopo quello di Roma, ebbero tutti una Sezione consacrata alle scienze. Nozioni sopra la storia delle scienze furono introdotte nei piani delle scuole secondarie di tutti i paesi; per quanto concerne la Francia, TANNERY, che dieci anni prima aveva con mano sicura tracciato il relativo programma, fornì ai professori una guida sicura, inserendo delle *Notions historiques* in un volume, ormai celebre, di suo fratello JULES, il matematico ben noto. Di più: riviste generali sopra la Storia delle scienze vennero fondate in Francia e in Italia, negli Stati Uniti e in Germania. Finalmente quella Società internazionale, riunente tutti coloro che coltivano la Storia delle scienze, da lui così vivamente desiderata, è stata creata dal recente Congresso di Oslo; e le persone che hanno oggi l'onore di dirigerla giudicarono essere un sacro dovere da parte loro l'iniziare i lavori della nuova Corporazione evocando la figura dell'uomo eminente che primo ne desiderò e propose la creazione. E' in nome loro che io prendo oggi la parola, con un'emozione che non riesco a dominare, misurando la gravità del còmpito che l'amicizia per l'illustre estinto mi vietò di rifiutare.

2. — Il successo che coronò le iniziative di cui ho testè tenuto parola si spiega indubbiamente considerandone l'indiscutibile ragionevolezza; ma esso ha anche la sua base nella grande autorità di cui godeva colui che la patrocinava. Giacchè, all'inizio del corrente secolo, erano già scorsi venticinque anni da che PAUL TANNERY dava, infaticabilmente, importanti contributi alle nostre cognizioni sull'evoluzione del pensiero scientifico. Infatti, gli è nel 1876 che egli esordì con un lavoro sopra un punto delicatissimo dell'astronomia greca, cioè il sistema astronomico di EUDOSSO; egli era allora

A mezzo del cammin di nostra vita.

Nato nel 1853, compì i propri studi secondari nella Classe di filosofia (cioè senza greco, circostanza da rilevare trattandosi di un giovane destinato a divenire uno dei maggiori ellenisti del secolo); entrato diciassettenne alla Scuola politecnica, egli ne uscí ingegnere delle Manifatture dello Stato, ove doveva rimanere durante l'intera sua vita. Io non lo seguirò nelle sue peregrinazioni, conseguenze del suo ufficio; ma non

Digitized by Google

posso tacere che prima i suoi gravi studi scientifici e poi il noviziato nella sua professione non assorbirono mai tutta la sua attività mentale; non soltanto egli si dilettava a coltivare le lingue classiche, ma dalla sua uscita della Scuola politecnica, e fors'anche prima, egli si pose a studiare l'ebraico, e suo fratello ha trovato fra le sue carte la traduzione di lunghi squarci della Bibbia.

Nulla di preciso noi conosciamo intorno alle occupazioni extra-ufficiali di TANNERY durante i primi dodici anni che tennero dietro alla sua uscita dalla Scuola Politecnica; soltanto si sa che egli si orientò verso la storia della scienza sotto l'influenza di AUGUSTO COMTE, di cui egli restò sino alla morte un ammiratore devoto. Come autore egli ci si presenta nel periodo di completa maturità di spirito e di corpo; ma da questo momento la sua produzione prosegue, con un *crescendo* ammirando.

Questa comparsa un po' tardiva e questa produzione sempre più abbondante non deve stupirci; è un fenomeno che si nota nella vita di tutti coloro che si consacrano alla storia delle scienze e di cui non è difficile dare una spiegazione attendibile. Infatti, per scrivere la storia di una scienza, bisogna anzitutto conoscere a fondo questa scienza, conoscerla, non già nelle modeste proporzioni offerte dai programmi scolastici, ma in tutta la sua ampiezza, nel passato come nello stato attuale: ora tutto ciò evidentemente non può essere che il risultato di lunghi sforzi individuali. D'altra parte, coloro che coltivano la storia politica o letteraria trovano libri e maestri che insegnano loro il metodo da seguire; al contrario, chiunque si dedica alla storia delle scienze deve fabbricarsi da sè gli utensili da usare, deve da solo imparare il modo in cui servirsene, deve con i soli propri mezzi scoprire le fonti a cui ricorrere.

A questo noviziato, così penoso e pesante, la cui necessità spiega il numero esiguo di storici della scienza, non si è certamente sottratto TANNERY, benchè egli non abbia fatto al riguardo alcuna pubblica confidenza; e siccome quando egli ha intrapreso la sua carriera d'autore, era già uno storico completo, non è neppur possibile sorprendere nei suoi lavori le fasi successive della sua iniziazione storica.

3. — Ai Greci, ai quali si riferiscono le sue prime pubblicazioni, egli è rimasto fedele tutta la vita; lo splendore e la profondità del pensiero ellenico giustifica pienamente siffatta persistenza. La relativa letteratura gli offerse i temi per parecchie decine d'articoli e di memorie destinati a commentare o chiarire passi oscuri di antichi testi o talvolta a ricostituire intere teorie aritmetiche, geometriche o astronomiche. Nell'impossibilità nella quale mi trovo di farne un'analisi completa, mi arresterò sopra tre volumi che lo fecero conoscere a coloro che non avevano avuto occasione di consultare i periodici di cui, da parecchi anni, egli era col-

Digitized by Google

laboratore costante e apprezzatissino; tre volumi ognuno dei quali possiede una sua propria fisonomia ed in cui, quindi, si riflettono qualità differenti dalla sua intelligenza.

Uno, che risulta da una lunga serie di articoli pubblicati nella *Revue philosophique,* ci offre un quadro completo del periodo della filosofia greca che precede la comparsa del grande medico IPPOCRATE; in questo volume TANNERY ebbe l'occasione di mostrare la profonda cognizione che egli aveva dell'antica filosofia e la sua familiarità con i metodi, ad un tempo delicati e potenti, della moderna filologia, per non parlare dell'acutissimo senso critico di cui egli diede prova nell'analisi e talora nella spiegazione di antichi testi. Dopo quarant'anni questo volume conserva tutta la sua importanza e la sua freschezza; siccome è ormai divenuta una ricercatissima rarità bibliografica, una nuova edizione si è imposta e uscirà fra non molto (1).

Un altro di questi volumi ha per tèma la storia della geometria elementare; esso risulta dalla riunione d'un buon numero di articoli apparsi nel *Bullettin des sciences mathématiques*; le fonti per la storia della geometria greca sono ivi sottoposte ad un esame microscopico in base a regole che sono classiche nella scienza del linguaggio, ma che non erano state ancora applicate a quell'importante argomento. Ne risultò la conoscenza più profonda che si possieda dal *Commento* di PROCLO agli *Elementi* di EUCLIDE. Questo volume, secondo le primitive intenzioni dell'autore, doveva avere un seguito dedicato alla geometria superiore degli antichi. Ma TANNERY vi rinunciò quando apparve il magistrale lavoro di ZEUTHEN sulla teoria delle coniche nell'antichità, giacchè (per usare le parole stesse di TANNERY) « cet ouvrage a comblé mieux qu' *il* ne reveit pouvoir le faire la lacune que présentait jusqu'alors l'histoire de cette branche de la géometrie ». Tuttavia, anche dopo lo scienziato danese, uno storico poteva trovare da spigolare nel campo che egli aveva mietuto; era questa l'opinione stessa di ZEUTHEN, il quale scrisse che TANNERY « aurait par exemple fixé autant que possible les époques et les personnes auxquelles on doit les différentes parties des *Collectiones* de PAPPUS comme il l'avait fait pour un PROCLUS ». In tale occasione dunque è per modestia che TANNERY ha peccato!... Auguriamo che il bel problema storico enunciato da ZEUTHEN non tardi a venire risolto.

Nel terzo dei volumi da me ricordati, TANNERY fece conoscere i risultati dei suoi lunghi studi sopra l'antica letteratura astronomica; è un tema al quale, come sappiamo, appartiene la pubblicazione con cui TANNERY ha esordito e sul quale DELAMBRE ha scritto un grosso volume tuttora an-

(1) Vide la luce nel 1930 (1935).

Digitized by Google

noverato fra i classici. Malgrado ciò PAUL TANNERY è riuscito a meglio chiarirlo mediante considerazioni originali, mostrandosi agli occhi nostri sotto una luce del tutto nuova, cioè come uno scienziato profondo, come un matematico pieno di finezza, in una parola come un autentico ex-alunno della Scuola politecnica. Affrettiamoci a constatare che le sue idee ottennero la più simpatica accoglienza; di modo che con sicura coscienza egli potè dichiarare in una nota autobiografica, che « désormais cet ouvrage fait autorité ».

4. — I volumi che ho testè discorsi non esauriscono la produzione storica di TANNERY nel primo periodo della sua attività letteraria; giacchè, quantunque i geometri e gli astronomi greci abbiano allora attratta di preferenza la sua attenzione, gli aritmetici non furono vittime d'una trascuranza che avrebbe costituito una vera ingiustizia. Senza arrestarmi alle sue ingegnose ricerche sopra la risoluzione dei problemi di secondo grado date dagli antichi e sopra l'aritmetica dei Greci in ERONE e PAPPO, debbo citare un'intera serie di articoli da lui scritti sopra DIOFANTO, non soltanto per il loro valore generalmente riconosciuto, ma perchè mostrarono che nessuno meglio di TANNERY era in grado di somministrare agli studiosi un'edizione critica, completamente soddisfacente, del principe degli antichi aritmologi. Gli è quanto pensò un grande editore tedesco, incaricandolo di questo importante lavoro. L'aspettativa non fu delusa; i due volumi di cui TANNERY arricchì la *Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana* furono giudicati, anche nei cenacoli letterari più rigorosi, come degnissimi di prendere posto *inter pares* fra quelli che ci permisero di giungere ad una conoscenza perfetta degli altri grandi matematici dell'antichità.

5. — Questa pubblicazione, anche a prescindere dal suo eccezionale valore, possiede un'importanza che sarei tentato a dire « biografica » giacchè impresse un nuovo orientamento ai lavori di TANNERY. Infatti chi vuol conoscere a fondo DIOFANTO deve avere sempre sott'occhio gli sviluppi che egli ha inspirato ad uno dei massimi pensatori francesi: PIERRE de FERMAT. Ciò indusse TANNERY a studiare l'epoca gloriosa durante la quale la Francia si trovò alla testa dell'esercito matematico, l'indimenticabile mezzo secolo nel quale vissero DESCARTES e FERMAT, PASCAL e DESARGUES. La conoscenza piena ed intera che egli acquistò allora dei matematici francesi del Secolo XVII ebbe una felice conseguenza: il Governo francese, avendo deciso di soddisfare l'antico voto relativo alla stampa delle *Opere complete* dell'immortale senatore tolosano, PAUL TANNERY venne incaricato di dirigere, in unione a CHARLES HENRY, questa importante pubblicazione. E' necessario dichiarare che fu trovata completamente soddisfacente? Essa abbraccia tutti i lavori superstiti del creatore della

Digitized by Google

moderna aritmetica superiore, non escluse le lettere, accompagnati da dotti commenti illustrativi e dalla traduzione in francese degli scritti latini, dovuta questa completamente alla penna di TANNERY medesimo.

Preparando questa edizione TANNERY ebbe occasione di studiare, dal punto di vista matematico, le lettere di DESCARTES esistenti fra gli « inedita » del Fondo Libri; una nuova pubblicazione ne fu (mi sia concesso di usare questo vocabolo di tipo industriale) un prodotto secondario; ma un prodotto il cui valore può paragonarsi a quello dei colori d'anilina rispetto al carbon fossile; giacchè nell'opuscolo di cui si tratta TANNERY giunse a dimostrare che l'autore degli strani libelli anonimi diretti contro DESCARTES, era JEAN DE BEAUGRAUD, il « géostacien » tanto maltrattato dal sommo filosofo.

Alla sua profonda conoscenza dal secolo di LUIGI XIV TANNERY è anche debitore dell'essere stato scelto come collaboratore di CHARLES ADAM nella preparazione della grande edizione delle *Opere* di DESCARTES, fatta sotto gli auspici del Ministro dell'Istruzione pubblica francese, in occasione del terzo centenario della nascita dell'autore del *Discours de la méthode*. Allorchè questa sontuosa pubblicazione fu terminata, PAUL TANNERY trovavasi già nella tomba; tuttavia, anche i volumi che seguono il VI, recano le traccie evidenti della sua dotta collaborazione.

6. — Tutti sanno che nella vita scientifica della prima metà del XVII Secolo il Padre MERSENNE recitò una parte, che si può giudicare in uno od altro modo, ma di cui non si può negare l'importanza. Un cospicuo numero di lettere inserite nelle *Opere* di DESCARTES portano la sua firma ovvero sono dirette a lui. Ora, nel corso delle sue ricerche storiche sul Secolo XVII, TANNERY ne raccolse un numero considerevole, sia in Francia che all'estero; non avendo relazione alcuna con FERMAT e DESCARTES, non poterono prendere posto colle citate edizioni. Benchè « la publication de cette correspondence est une oeuvre difficile à réaliser » (trascrivo queste parole da una lettera di TANNERY stessa) siccome presentava un vero interesse storico e scientifico, il nostro infaticabile erudito l'iscrisse nell'elenco dei suoi lavori futuri; alla sua morte si riconobbe che egli aveva già raccolta una massa enorme di elementi di quella corrispondenza; ora io sono felice di annunziare che questi materiali saranno utilizzati da un dotto conosciutissimo, C. DE WAASD, il quale ha assunto l'incarico, con l'ajuto prezioso e indispensabile della sig.ra TANNERY, di pubblicare la Corrispondenza (completa nei limiti del possibile) del Padre MERSENNE (1).

Non è l'unica buona notizia che io sono in grado di dare. Infatti nel

(1) Un volume fu già pubblicato (1935).

Digitized by Google

corso delle sue ricerche sui matematici bizantini, PAUL TANNERY aveva, non soltanto formulato il progetto di pubblicare l'opera di GIORGIO PACHYMERE *sopra le quattro scienze*, ma ne aveva preparata l'edizione critica in base ai manoscritti di Venezia e Parigi. Ora io non dubito che voi apprenderete con un ben giustificato piacere che questo lavoro del compianto ellenista sfuggirà il pericolo di restare inedito, giacchè un dotto giovane belga, l'abate ROME, si è incaricato di sorvegliarne la stampa e certamente egli adempirà in modo pienamente soddisfacente questo còmpito tanto delicato.

7. — Nel corso delle sue ricerche storiche — così estese da abbracciare, non soltanto i periodi più luminosi della storia della Grecia e della Francia, ma eziandio l'oscuro Medio-Evo — TANNERY ebbe occasione di stringere relazioni epistolari con un grande numero di scienziati, alcuni dei quali egli conobbe di persona in congressi, oppure durante le esplorazioni da lui compiute in parecchie grandi biblioteche europee; io ebbi in particolare occasione di constatare *de visu*, a Heidelberg, in occasione del III Congresso internazionale dei matematici, quanto amichevoli fossero le sue relazioni con MORITZ CANTOR, il dotto che, in principio del corrente secolo, veniva con ragione riguardato per il Nestore degli storici delle matematiche. Ai suoi giovani corrispondenti TANNERY era largo di consigli, agli anziani manifestava con franchezza le proprie opinioni, anche quando non erano d'accordo con le idee dominanti; e sopra i tesori che egli distribuiva da gran signore, egli non si riservava alcun diritto di proprietà. Se ne vuole una prova? Essa è offerta da una lettera, che risale ad un'epoca in cui la fama di TANNERY non era peranco stabilita; si tratta di una lettera diretta il 2 Gennaio 1884 a Friedrich HULTSCH, il dotto editore di PAPPO, nella quale si leggono le linee seguenti:

« Je vous remercie de ce que vous voulez bien dire de moi. Mais qu'il soit entendu, une fois pour toutes, que si vous voulez publier quelque chose emprunté à l'une des mes lettres, vous pouvez toujours le faire sans me demander aucune autorisation, et comme vous le voudrez: j'entends, soit en citant mon nom, soit en le taisant, soit en reproduisant le texte de ma lettre, soit en le traduisant, soit en le transformant à votre volonté. Votre temps est en tout cas trop précieux pour que vous le perdiez pour des soucis d'aussi peu d'importance à mes yeux ».

Ogni commento a queste nobili frasi ne diminuirebbe la grandezza, ne affievolirebbe lo splendore!

8. — PAUL TANNERY, essendo assorbito tutto il giorno dalle sue funzioni prima di Ingegnere e poi di Direttore di una grande Manifattura statale, non fu un « universitario » nello stretto senso della parola. Tuttavia negli anni 1884 e 1885 tenne un corso libero alla Sorbona sulla

Digitized by Google

Storia delle matematiche; più tardi, e precisamente a partire dal Novembre 1892, ne tenne uno al Collegio di Francia, in qualità di supplente di CHARLES LEVÈQUE sulla Storia della Filosofia greca. Perciò egli non poteva dirsi completamente un « homo novus » negli ambienti accademici; per ciò nessuna meraviglia che quando, venticinque anni or sono, per la morte di PIERRE LAFITTE si rese vacante nel Collegio di Francia la cattedra di Storia generale delle Scienze, l'assemblea dei professori e l'Accademia delle scienze proposero ad unanimità che ad occuparla fosse chiamato TANNERY. Questi, che aveva presentato la propria candidatura a quella cattedra, spiegò questa decisione mediante la considerazione seguente, che si legge in una lettera da lui diretta al suo amico ZEUTHEN: « A une époque où la tendance est plutôt déclarée pour l'étude isolée de l'histoire de chaque science en particulier, je crois être le seul en Europe qui soit capable de reprendre sérieusement le point de vue général du fondateur du positivisme, et en même temps de montrer qu' à côté des histoires spéciales, une histoire générale garde son intérêt, même au point de vue pratique du progrès historique ».

Nessuno ignora che il Ministro della Pubblica Istruzione del tempo non accolse questa designazione dei corpi competenti e nominò, invece di TANNERY, colui che era stato presentato come secondo candidato. Buon numero di coloro che mi fanno l'onore di ascoltarmi ricorderanno indubbiamente la sorpresa — per non servirmi della parola grossa di scandalo — che produsse tale decisione in tutti coloro cui era noto l'alto valore di PAUL TANNERY. Io non insisterò sopra questo episodio tanto doloroso della vita dell'illustre investigatore, giacchè si riferisce ad un passato ormai lontano e più ancora giacchè si tratta di una questione totalmente francese su cui TANNERY, da buon patriotta, non volle mai ammettere un'ingerenza straniera di qualunque forma. Ma mi sia concesso di esprimere il mio vivo rammarico per una decisione che rese impossibile la soluzione di parecchi problemi dottrinali e didattici che formano ancora il tormento degli investigatori. Permettetemi che, per enunciare chiaramente i principali, io colga quest'occasione, certamente unica nella mia vita, nella quale io ho l'onore di rivolgermi ai rappresentanti più eminenti della ricerca storica al servizio delle scienze.

9. — Che cosa è la storia generale della scienza? E anzitutto, che cosa è la scienza? E' questo un problema preliminare che TANNERY medesimo si è proposto e che ha risolto interpretando il vocabolo « scienza » nel senso abbastanza preciso che gli si attribuisce parlando di « Académie des Sciences »: è un'interpretazione nella quale tutti sono d'accordo con lui; ma questa concordia è turbata quando egli aggiunge « la médecine quoique elle soit un art »; infatti, AUGUSTE COMTE, il maestro

Digitized by Google

venerato del nostro storico, aveva un' opinione totalmente diversa.

Risolta tale questione, altre sorgono non meno spinose. Infatti la storia di un ramo dello scibile umano non può essere compresa e gustata che da coloro che conoscono questo ramo con sufficiente profondità; donde la questione: quale è la categoria di persone capaci di seguire un corso di storia generale della scienza?

E quest'altra: Una storia siffatta deve evidentemente essere la sintesi delle storie delle varie scienze; ora, è dovere di confessarlo francamente, gli è soltanto da un secolo a questa parte che le relative ricerche furono condotte con un metodo veramente rigoroso, fondato sopra l'erudizione e la cronologia, che costituiscono il fondo di garanzia della storia veramente seria, la quale condanna al bando le costruzioni fantastiche basate sopra ipotesi arbitrarie. Era questa l'opinione di TANNERY, che ebbe un giorno a dichiarare, che «un très grand nombre d'études de détail seront encore nécessaires avant que l'on puisse enseigner réellement l'histoire des mathématiques»; per parte mia aggiungo che riguardo alle altre scienze, le condizioni sono ancora peggiori. Così stando le cose, come si può pensare ad una sintesi i cui elementi sono così poco numerosi e poco solidi?

Un'altra questione altrettanto importante e non meno imbarazzante è: di dove devesi cominciare? Se si ha riguardo alle matematiche, gli scavi così fecondi eseguiti in Oriente, e che possono intendersi cominciati con la spedizione di NAPOLEONE in Egitto, ebbero per risultato la conclusione che i più antichi documenti relativi all'aritmetica ed alla geometria hanno all'incirca l'età di quaranta secoli. Invece per la fisica, se non si vuole arrestarsi sopra i sogni dei filosofi greci, si è autorizzati a cominciare da GALILEO e BACONE, perchè allora soltanto l'osservazione e l'esperienza furono riconosciute come gli unici utensili legittimi nelle ricerche di fisica. La cosa è ancora più difficile per la chimica; per molto tempo ci si è creduti in diritto di cominciarne la storia col Secolo XVIII, perchè si consideravano gli alchimisti medievali come indegni di essere ammessi nel santuario della storia. Ma questa opinione dovette essere radicalmente modificata quando MARCELIN BERTHELOT ed i suoi alunni ci appresero che almeno alcuni dei pretesi fabbricanti d'oro e d'acqua di gioventù erano dei pratici di somma abilità. Ecco dunque tre discipline fondamentali le cui origini risalgono ad epoche differenti; da dove, dunque, cominciare la storia generale di cui ragioniamo?

Difficoltà altrettanto gravi s'incontrano quando si hanno presenti i due elementi fondamentali della storia, gli uomini e le opere. Nella più remota antichità tutti i pensatori erano enciclopedici; analizzando le opere di PLATONE ed ARISTOTELE si può benissimo fare la storia del pensiero

Digitized by Google

greco nella sua prima fase di sviluppo; ma a cominciare dalla fondazione della Scuola d'Alessandria comincia la specializzazione e non tarda ad imporsi; essa scompare durante le tenebre medioevali, giacchè erano allora di moda le monumentali compilazioni, quali la *Margarita philosophica*; ma si tratta di enciclopedie, ove lo storico cerca indarno qualche idea originale. Ritornata la luce col Rinascimento la specializzazione si ripresenta, essa si accentua di secolo in secolo, sino a raggiungere gli estremi limiti a cui essa è arrivata oggi. Emerge da tutto ciò che quando si deve esporre la storia di un periodo veramente decisivo per la storia dell'intera scienza, si affaccia e s'impone la questione; quali sono gli uomini, quali le opere di cui ci si deve occupare? La cosa riuscirebbe certamente agevole se in ogni epoca esistesse un grande uomo esercitante un'influenza irresistibile e generale sopra tutti i pensatori, od almeno un'idea direttiva che abbia servito di bussola per gl'investigatori della verità; ma un tale personaggio eccezionale, una tale idea si sono presentati nel corso dei secoli a noi noti?

10. — I dubbi da me francamente manifestati e che mi rendono — lo confesso — un po' scettico sulla possibilità di un corso sulla storia generale delle scienze, si saranno certamente presentati anche a PAUL TANNERY il quale negli ultimi anni della sua vita ha pubblicati parecchi articoli destinati a divenire altrettanti capitoli d'un'opera speciale dal titolo *Discours sur l'histoire générale des sciences*. Però, io ritengo che, anche se egli l'avesse compiuta, non sarebbero scomparse tutte le difficoltà che ho segnalate; perchè si trattava del « programma » di un corso, non del « corso » stesso; ora io, vecchio professore, so benissimo quanti mutamenti subisce il piano di un gruppo ordinato di lezioni quando passa alla realizzazione; molte delle pagine da me citate stanno a provare che TANNERY stesso era tormentato da dubbi dell'indicata specie e si desume da esse che egli faceva assegnamento sul farsi della luce con l'esercizio dell'insegnamento, essendo convinto dalla verità dell'antica massima *docendo discimus*.

Tutto ciò spiega e giustifica il vivo mio rammarico che PAUL TANNERY non abbia ottenuto l'ufficio a cui aspirava. E' mia convinzione che, salito a questa cattedra, egli avrebbe lasciate in disparte le generalità un po' vaghe, per svelare ed insegnare il proprio metodo di lavoro, per farci conoscere gli apparecchi ed i procedimenti grazie a cui gli fu concesso di chiarire tanti punti oscuri che offre l'evoluzione del pensiero scientifico, evitando le sistematizzazioni immature che ritardano la scienza invece che farla progredire. Così egli avrebbe potuto divenire il vero capo di una scuola di storia, capace di continuare le nobili tradizioni di MICHELE CHASLES, MARCELIN BERTHELOT, PIERRE DUHEM.

Digitized by Google

11. — PAUL TANNERY ci ha lasciati prima di avere ottenute tutte le soddisfazioni e di avere conseguiti tutti gli onori che le Francia non ha mai negati ai migliori de'suoi figli.

Ma il Cielo gli concesse l'immensa felicità di avere durante la sua vita una compagna devota, una donna d'intelligenza e di cuore che riesce a farci udire, dopo la di lui deplorata morte, la voce possente dell'eminente storico. Gli è alle sue cure intelligenti e incessanti che siamo debitori di un'edizione completa di quanto egli scrisse, la quale prende il posto di quell'opera d'insieme che una morte prematura vietò di compiere a TANNERY. Antichi amici dell'eminente pensatore l'ajutarono con i loro consigli, ma fu essa che ha funzionato come un'inesauribile forza motrice; gli è grazie ad essa che la fama dell' infaticabile investigatore si diffonde attualmente ovunque il culto della verità annovera dei sacerdoti. L'impressione che produce l'insieme dei volumi di *Mémoires scientifiques* di PAUL TANNERY è talmente viva che sono certo che se in un giorno vicino o lontano, in un paese qualunque, sorgerà uno storico dotato di forza sufficiente per comprendere le grandi correnti del pensiero e per seguirle nei loro più minuti particolari, per usare nella ricerca storica con mano sicura, il telescopio ed il microscopio, per arricchire la letteratura storica d'una collezione importante di fatti sicuri e di nuovi punti di vista, in quel giorno, tutti concordemente diranno che quel personaggio è il PAUL TANNERY della sua terra.

Digitized by Google

Digitized by Google

DISCORSI E CONFERENZE

Digitized by Google

Digitized by Google

XXIV.

LE TRASFIGURAZIONI DI UNA SCIENZA

Discorso pronunziato addì 15 Novembre 1900 per la solenne inaugurazione dell'Anno Accademico 1900-1901 nell'aula Magna della R. Università di Genova.

1. — Il periodico convegno con cui la nostra grande famiglia, costituita da maestri e discepoli, riprende l'interrotto lavoro col gentile concorso della parte più eletta della cittadinanza, assume questa volta un significato, un'importanza, un valore di gran lunga superiori al significato, all'importanza, al valore consueti. Non è, infatti, come di regola, un nuovo anno accademico che qui veniamo ad inaugurare, ma è l'alba di un nuovo secolo di vita universitaria che in questo istante solennizziamo!

Il principio di un nuovo secolo! Qual tumulto di sentimenti e di idee suscita questo pensiero! La fredda ragione ci avverte che il pensiero umano si ride delle nostre artificiali divisioni cronologiche, che il suo moto in avanti non conosce alcun legame col tempo, che tutte le grandi opere le quali produssero qualche nuova orientazione nelle idee apparvero non prevedute nè attese, ad intervalli di tempo non soggetti ad alcuna norma fissa. Eppure sentiamo profondamente radicata in noi la convinzione che sia stata testè posta la parola « fine » ad un periodo storico e che si sia in procinto di scrivere le prime pagine degli annali scientifici e letterari di un'èra novella. Nè crediate, Signori, che questa opinione sia una prerogativa di noi, che assistiamo alla discesa nella tomba del Secolo XIX; al contrario, l'idea che il principio di ciascun secolo debba essere accompagnato da una *instauratio ab imis fundamentis* in ogni ramo dello scibile, come invade noi attualmente, era diffusissima cent'anni or sono fra i nostri proavi, i quali credevano che, ai rinnovamenti sociali prodotti dalla rivoluzione francese ed ai cambiamenti politici dovuti alla spada di Napoleone, dovessero fare presto riscontro mutazioni altrettanto radicali in ogni campo in cui si esplica l'umana attività.

Digitized by Google

2. — In un momento, quale è l'attuale, in cui abbiamo l'illusione che cominci per noi una nuova vita, la nostra mente, con insolito invincibile turbamento, si volge, curiosa ed impaziente, verso l'avvenire pretendendo od almeno tentando di scrutare quali sono le questioni che stanno per essere agitate o risolte.

Ma come mai diradare la fitta nebbia che le cela al nostro sguardo? Ad un mezzo fece allusione vagamente Cicerone asserendo essere « la storia maestra della vita »; dello stesso fecero cenno i moderni che sentenziarono essere « il passato il profeta dell'avvenire »; e però molti hanno fede che, dall'esame scrupoloso di quello che *fu jeri* e di ciò che *è oggi* una disciplina speciale, sia possibile giungere a scoprire le regole a cui obbedisce il suo svolgimento, e quindi a divinare quello che essa *sarà domani.*

L'investigazione di questa presunta legge di sviluppo può affrontarsi con qualche speranza di buon successo per « una disciplina così conservatrice, come è la Matematica, la quale non distrugge i lavori dei periodi precedenti, per costruire in loro luogo nuovi edifici (1)»; per una Scienza quattro volte millenaria, che presenta nella propria evoluzione storica arresti non deviazioni, migliorie non pentimenti, preparazioni non inverni.

Concedetemi, o Signori, che a tracciare le prime linee di siffatta ricerca io consacri la breve ora, durante la quale, per effetto dell'autocratica benevolenza dei miei Egregi Colleghi, ho l'onore altissimo, quanto non meritato nè ambito, di essere vessillifero della Facoltà di Scienze.

Mi si offre così un'occasione opportuna per rispondere ad una domanda che, in modo più o meno esplicito, viene assai spesso rivolta a coloro che furono non a torto equiparati a Vestali, alle quali è affidato il còmpito di tenere costantemente acceso il sacro fuoco della Scienza pura. Il gran pubblico che li contempla nell'austera alacrità della loro vita contemplativa; che trova le raccolte accademiche ogni anno più occupate da quelle formole sibilline, delizia di pochi eletti, terrore per la maggioranza; che nota meravigliato il moltiplicarsi sempre più rapido delle pubblicazioni matematiche, chiede « a che tanta fatica? quale ne è lo scopo? quanta la remunerazione? ». Non trovando adeguata risposta e giudicando che i quotidiani trionfi della Meccanica applicata e la perfetta concordanza dei fenomeni celesti con le predizioni degli astronomi mostrino come l'Aritmetica e la Geometria soddisfacciano già esuberantemente a tutte le esigenze della vita moderna, è incline a giudicare tanto lavoro superfluo e però sprecato, e propende ad ascrivere i mate-

(1) Parole di H. HANKEL.

Digitized by Google

matici alla categoria degli sterili sognatori. Si palesa in conseguenza allentato, se non infranto, il fraterno legame fra il mondo degli uomini di azione e quello degli uomini di scienza, che caratterizza le epoche di intensa produttività e che è quindi di sommo e generale interesse il ristabilire e fare diventare ancor più intimo e sempre più saldo.

3. — Questo stato di cose, che tutti riconoscono per deplorevole, rende manifesto che la matematica, mentre gode delle prerogative, soffre degli inconvenienti annessi all'olimpica posizione che si è conquistata. Si rispetta e si onora da lungi, ma se ne ignora il vero carattere; si fa consistere da taluno nell'assiderante « arte del due e due fanno quattro », si ritiene da altri come una semplice disciplina ausiliare, mentre è la più alta, autonoma ed indipendente di tutte le Scienze.

Io credo di non scostarmi dal vero congetturando che in tal modo di vedere sia da ravvisarsi un tardo riflesso delle antiche diffusissime leggende secondo cui l'Aritmetica sarebbe stata creata dai Fenici per sopperire ai bisogni del loro commercio mondiale e dai Babilonesi per sfruttarla nei loro studi sul corso degli astri, mentre la Geometria sarebbe invenzione degli Egiziani, i quali a crearla sarebbero stati spinti dalla necessità in cui si trovavano di conoscere la superficie dei loro campi, per ristabilirne i confini periodicamente cancellati dalle inondazioni del Nilo. Ora il concetto della Scienza matematica emergente da tale pretesa loro genesi, non soltanto non risponde affatto alla sua natura ed alle sue odierne tendenze, ma venne riconosciuto per inadeguato, non meno di venti secoli or sono, dai competenti in materia, i quali si affrettarono ad abbandonarlo per altro, secondo il quale quella disciplina dall'umile livello di strumento pel commercio, per le arti, per le scienze di osservazione, assurse al grado di dottrina individuale, avente un nobilissimo scopo in sè medesima.

A chi debbasi attribuire codesto radicale mutamento è ignoto; la storia, interrogata più volte a questo proposito (1), fino ad ora si è rifiutata di rispondere; è forse vano sperare che in avvenire acqueti la nostra legittima curiosità, poichè la trasformazione di un ammasso di regole pratiche in un tutto sapientemente organizzato è piuttosto il portato complesso, a poco a poco evidente, di un continuo svolgimento, che opera di un solo. Tuttavia è opinione generale che quella memorabile trasfigurazione in Grecia abbia maturato e che Pitagora abbia per primo avuto la chiara cognizione delle condizioni a cui deve soddisfare ua gruppo di verità per essere solido nelle sue basi, omogeneo nella sua strut-

(1) Ciò venne fatto anche nell'intento di ricavare qualche dato relativo all'importante questione psicologica di determinare l'origine delle nozioni matematiche.

Digitized by Google

tura e sicuro nel suo procedere a nuovi acquisti. Egli poi, con la scoperta dei canoni numerici da cui sono retti certi fenomeni, fece aprire il cuore alla speranza che la Matematica fosse capace di porgere la chiave del grande enigma affacciantesi a chi contempla il creato; e poichè «la mente si illumina e si rassicura allorchè trova ordine e regola, ove non crede sia che confusione e ruina (1)», egli non faticò a raccogliere intorno a sè uno stuolo di ammiratori ferventi, di discepoli devoti, che non tardarono a divenire suoi collaboratori efficaci.

Fra di essi spetta il posto d'onore a Platone. Il divino filosofo, il quale — al pari di Pitagora — professava essere tutti i fenomeni, tanto celesti quanto umani, sottoposti alla legge del numero, il quale decretava «nessuno ignaro di Geometria entri sotto il mio tetto», considerava la Matematica come fonte di tutti i beni e cardine di tutte le Scienze; ed avendo avvertita una celestiale differenza fra quelli che vi attesero e coloro che la trascurarono, propugnò con tutte le sue forze l'istruzione matematica della gioventù. E siccome egli altamente biasimava quelli che le scienze esatte coltivano esclusivamente in vista delle applicazioni di cui sono suscettibili o con la speranza di guadagno, così non è forse evidente che, sin dal V Secolo precedente l'èra volgare, si era in possesso del concetto di Scienza matematica pura ed astratta, di quella Scienza da cui spira un fascino quasi divino ed a cui tante menti superiori dovevano poi dedicare il nerbo ed il fiore delle loro energie intellettuali?

4. — Le molteplici esortazioni allo studio della Matematica, di cui la parola eloquente di Platone fece echeggiare i giardini dell'Accademia, infiammarono di nobile ardore la schiera de' suoi ascoltatori; i quali, spargendosi poi per tutta la Grecia, propagarono le vibrazioni della sua voce sino ai più remoti confini del mondo civile: così, mentre ovunque nasceva spontanea l'ammirazione pel grande Maestro, sorgeva irrefrenabile il desiderio di svolgere il programma che egli aveva delineato.

Per procacciarsi la forza a ciò necessaria, un mezzo possente venne poco appresso somministrato da Aristotele, coll'adunare i fondamenti della logica in un'opera, che non tardò a divenir classica e tale rimase per secoli e secoli.

Ora, quando la brama di agire va appajata al potere di operare, risultati decisivi e permanenti non possono farsi attendere a lungo; quindi non deve recare meraviglia se, dopo la discesa nella tomba di quei due sommi filosofi, la Geometria ebbe un periodo di tale lussureggiante floridezza, che venne forse altre volte raggiunta, ma superata mai. Al

(1) Osservazione del LEOPARDI.

Digitized by Google

modo istesso che la Filosofia greca, nel tempo di suo massimo splendore ebbe Socrate, Platone ed Aristotele quali suoi più eminenti rappresentanti, così nel periodo aureo della Geometria greca spicca giganteggiando la triade costituita da Euclide, Archimede ed Apollonio. Per opera del primo l'umanità arrivò in possesso di una raccolta logicamente ordinata delle proprietà più essenziali dell'estensione figurata, che fu, è e rimarrà lume e guida di intere generazioni; il secondo si palesò di fecondità così meravigliosa nell'immaginare geniali artifici, capaci di condurre alla soluzione di questioni difficili ed importanti, che lo studio di essi riempie ancora oggi di stupore, ed induce a domandarsi se l'invenzione di metodi generali, onore e vanto degli scienzati moderni, non abbia per avventura disseccata la fonte degli espedienti ingegnosi; meno atto a suscitare l'entusiasmo è Apollonio da Perga; eppure qual gloria può dirsi più grande e pura di quella che constella la fronte di chi aperse e lastricò la strada, che doveva più tardi guidare Keplero a gettare i fondamenti della Meccanica celeste?

Gli sforzi di questi tre robusti pionieri e dei loro seguaci assicurano basi incrollabili a tutto l'edificio geometrico, prepararono da lungi il calcolo infinitesimale ed accrebbero a dismisura la ricchezza e la sfera d'influenza della Geometria.

Ma, sgraziatamente, nel popolo ellèno andò poi grado a grado, ma senza posa, estinguendosi l'aspirazione a magnanime imprese od il vigore intellettuale per condurle a termine; sicchè alla valorosa coorte composta di coloro che, spigolando ne' campi già mietuti da Euclide, Archimede, Apollonio, mostrarono la fecondità dei semi che questi avevano gettati, tien dietro un pallido drappello di investigatori sfiaccolati ed anemici, i quali non avendo la forza di alzare le vele verso nuovi continenti, continuarono a percorrere in tutti i sensi le terre già note, descrivendole ed illustrandole.

E' vano, a mio credere, lo spiegare con una causa unica perchè ad un'aurora tanto promettente, ad un meriggio sì rigoglioso e fecondo, abbiano tenuto dietro un tramonto tanto precipitato, una notte così squallida e tenebrosa. Ed invero l'albero, che era stato coltivato con intelletto d'amore durante l'estate della Geometria greca, era ben lungi dal trovarsi in istato d'esaurimento; giacchè quando, molti secoli appresso, si pensò di riprenderne la coltura, con dolce sorpresa si vide l'antica pianta ripullulare da profonde radici. D'altronde i metodi d'investigazione, di cui allora disponevasi, non erano certamente impari alle questioni a cui si sarebbe dovuti applicarli, perchè, risorti più tardi il desiderio di progredire e l'energia a ciò necessaria, ad essi si ricorse e non indarno. Nè le condizioni politiche della Grecia bastano a dare ragione della deca-

Digitized by Google

denza e caduta di una scienza, che aveva ivi così felicemente prosperato, dal momento che la storia insegna come popoli schiavi o divisi e dispersi abbiano manifestato, appunto nelle discipline più astratte, la loro persistente vitalità, la loro perenne unità spirituale.

5. — Nell'incertezza di quali siano le cagioni dell'arresto nella produzione matematica dei Greci, ci è forza abbandonare questi uomini privilegiati dalla natura, nei quali riverentemente salutiamo i nostri progenitori scientifici. E notiamo come sia stata immane sciagura che la gente la quale al popolo ellèno succedette, sulla scena del mondo nella parte di protagonista, invece di seguirne l'esempio, abbia proceduto in una direzione diametralmente opposta a quella che Platone aveva additata ai suoi conterranei e che questi eransi affrettati a seguire. Il rozzo e brutale legionario che, durante il tumulto seguente la resa di Siracusa, spegne Archimede assorto nello studio di un problema geometrico, incarna nel modo più espressivo e fedele l'attitudine di Roma verso la scienza pura. Se durante il dominio dei Latini la Matematica non fu soffocata dall'indifferenza e dal disprezzo generali, gli è soltanto grazie ai servigî che essa era in grado di prestare a sacerdoti e legislatori. Tuttavia, la riforma del calendario, promossa da Giulio Cesare, e la misura dell'impero, effettuata sotto Augusto, le quali sono i capolavori della matematica romana, che cosa appajono se paragonate alle opere geometriche, geodetiche ed astronomiche che ebbero come culla il Museo d'Alessandria? Ai conquistatori e legislatori del mondo decretiamo pertanto gli allori riserbati ai maestri nell'Arte della guerra e nella Scienza del diritto, ma neghiamo loro quelli destinati a chi apre nuovi orizzonti dinnanzi agli occhi del geometra.

Nè dopo che le aquile latine ebbero appreso il volo della fuga, venne riposto in onore lo studio delle Matematiche; forse a ciò si opposero le condizioni dell'ambiente; chè le invasioni di barbari, le trasmigrazioni di popoli, le guerre di religione, che riempirono tanta parte del Medio Evo, vietarono il raggiungimento delle condizioni di vita pacifica e tranquilla che sono indispensabili al geometra per dedicarsi ad un fruttifero lavoro; quindi nell'immenso deserto sabbioso rappresentato dalla Matematica romana i nuovi tempi non seppero scoprire oasi alcuna. Ciò non ostante, tendendo intensamente l'orecchio, riusciremo a sorprendere qualche fioca voce che, di quando in quando, squarcia l'alto silenzio incombente sopra quel desolato campo di morte, quasi ad attestare che l'eterna scintilla del pensiero nemmeno allora era totalmente spenta: similmente una poetica leggenda che di padre in figlio si è trasmessa sulle rive della Bretagna narra che al tempo dei tempi il mare inghiottì una città; ma quando la quiete del meriggio è perfetta, quando è profonda la calma della notte,

Digitized by Google

i pescatori odono sorgere dall'acqua dei suoni di campane, quasi indizio che la vita non sia interamente scomparsa in quella città sepolta.

Cessate le perturbazioni che scossero la più considerevole porzione dell'Età di mezzo, tramontato il regno violento della forza brutale, si risvegliò, specialmente nei chiostri, l'assopito spirito d'indagine della verità; il marasma di prima venne sostituito da una stasi incerta ed irresoluta, alle tenebre perfette succedette un bagliore antelucano. Ma per le Scienze esatte, anche quella parte del Medio Evo che è più prossima all'Età Moderna, è in massima parte un periodo stazionario; e ciò perchè, durante quel tempo, tennero successivamente lo scettro: lo spirito commentatorio, il quale non diede mai vita ad alcuna idea originale; il dogmatismo, destinato ad inceppare sempre qualunque volo verso nuovi veri; ed il misticismo, che trasformò la Fisica in Magia, l'Astronomia in Astrologia e la Matematica nella infeconda contemplazione di sognati rapporti fra numeri e cose.

6. — Per quanto concerne le Matematiche, può ritenersi che questa triste èra di preparazione senza guida abbia termine nel bel mezzo dell'età dei comuni. E' ad un umile mercantuzzo di Pisa che si suole attribuire il merito di averne provocata la risurrezione; e non a torto; giacchè non è forse LEONARDO FIBONACCI colui che, col trasportare in Europa i germi dell'Algebra, da lui raccolti nel corso dei suoi lunghi viaggi, fece subire all'Aritmetica una delle più radicali trasformazioni che ricordi la storia delle rivoluzioni scientifiche, e quindi risvegliò l'interesse per l'investigazione matematica?

L'esotica disciplina, trasferita nella penisola da un Italiano, in Italia venne per non breve tempo coltivata di preferenza, onde allora nella patria nostra visse l'intelletto di tutta l'Europa matematica. Oltrepassato lo stadio d'infanzia e sterile giovinezza, che anche le idee sembrano destinate ad attraversare, i nuovi metodi diedero frutti tanto dolci e succulenti che persino gli spregianti ed incuriosi furono astretti a riconoscerne lo straordinario valore, l'inaudita potenza. Migliaja di problemi speciali poterono venire condensati in un unico enunciato e quindi ricevere un'unica soluzione; innumerevoli questioni, che sino a quell'istante erano state ribelli, furono finalmente obbligate ad arrendersi; e, con la scoperta di affinità profonde fra proposizioni apparentemente eterogenee, si giunse, per una via misteriosa, ma sicura, a conseguenze generali graditamente inattese. Ma se così tutti furono in grado di toccare con mano e misurare l'immensa utilità pratica dell'Algebra, rimase per lungo tempo celata la grande importanza dottrinale, che possiede l'ammissione di essa fra le Scienze esatte; oggi però possiamo rendercene perfettamente conto, riconoscere cioè come con la sostituzione metodica al numero con-

Digitized by Google

creto del simbolo astratto, del simbolo di significato chiaro determinato invariabile, del simbolo dotato di qualità e tendenze rigorosamente delineate dalle corrispondenti definizioni, la Matematica da crisalide sia divenuta farfalla ed abbia potuto abbandonare per sempre le minuzie della pratica e spiccare il volo verso le ragioni alte e serene ove è regina l'Idea.

7. — Constatata che fu la modificazione, profonda quanto benefica, esercitata dall'Algebra su tutti quei domini in cui dianzi imperava l'Aritmetica, sorse spontanea l'aspirazione di accrescerne il potere, estendendolo alla seconda delle due grandi branche della Matematica, cioè la Geometria (1). E' gloria imperitura di DESCARTES e FERMAT di avere pienamente soddisfatto quel desiderio, insegnando un geniale procedimento per utilizzare la Scienza dei numeri nella ricerca delle proprietà dell'estensione figurata; in siffatto procedimento si trova la prima radice della nostra Geometria analitica, nuova scienza, la quale sin dai primordi apparve tanto promettente che uno dei fondatori di essa (2), inebbriato dal clamoroso successo conseguito, superbamente asseriva di avere « abolito il diritto di inventare in una scienza ormai ridotta ad un semplice sistema di formole ». L'avvenire ha smentito CARTESIO; quel prezioso diritto continuò a sussistere anche dopo il 1637 ed intere biblioteche stanno a dimostrare quanto opportunamente ne sia stato fatto larghissimo uso. Ma ciò non prova che errasse il grande filosofo francese nell'attribuire uno smisurato potere al nuovo metodo d'investigazione. Applicandolo, qualunque curva o superficie descritta con una determinata legge si rappresenta mediante un'equazione, che compendia tutte le prerogative di cui essa è dotata, in tutti gli svariati aspetti che essa può assumere; d'altra parte, la considerazione delle aride tavole di valori, quali s'incontrano nella Statistica o nella Meteorologia, può venire surrogata da quella di curve o superficie convenienti, le quali, con la loro forma, mettono in evidenza l'andamento dei fenomeni a cui si riferiscono. Qualunque fatto suscettibile di misura si presenta per conseguenza sotto due differenti parvenze; e — adoperando le parole di una valente cultrice delle Scienze esatte (3) — si può affermare che « l'Algebra altro non è che Geometria scritta, mentre la Geometria non è che Algebra figurata ».

Non è mio còmpito il narrare le gesta della nobile prosapia che scaturì dal ben auspicato connubio fra l'Algebra e la Geometria; ma quello

---

(1) Era questo un desiderio tanto più giustificato inquantochè era presumibile si giungesse così a correggere questa scienza, quale si presenta negli *Elementi* di EUCLIDE e nelle *Coniche* di APOLLONIO, del suo più grave difetto, quello, cioè, che consiste nella necessità di distinguere in ogni proposizione un grande numero di casi.

(2) DESCARTES.

(3) SOFIA GERMAIN.

Digitized by Google

che giova rilevare si è che, dal giorno memorabile in cui venne celebrato, due discipline dianzi procedenti estranee l'una all'altra si allearono per sempre, due grandi fiumi si confusero, per formarne uno ben più maestoso, il quale, coll'energia latente nelle proprie acque, anima e feconda tutte le diramazioni della Matematica pura ed applicata. Nè va taciuto che la sostituzione di una figura con una formola rese possibile l'investigazione di enti geometrici tanto complicati e strani, quali nessuna mano di artista, per quanto abile, sarebbe capace di delineare, e nessuna fantasia di poeta, per quanto possente, sarebbe giunta a concepire. Perciò, con la creazione della Geometria analitica venne mosso un nuovo passo verso il distacco della Matematica dal mondo reale e si ebbe una manifestazione evidente di una tendenza, di cui già notammo un primo accenno e di cui altri aspetti, ancor più chiari, stanno per palesarcisi.

8. — La fusione della Scienza del numero con la Scienza dell'estensione rappresenta un progresso tanto considerevole, che era presumibile venisse seguita da un periodo destinato al riposo od occupato a dare alla nuove idee un assetto definitivo. Ma il Secolo XVII fu un'èra di febbrile attività intellettuale; sembra quasi che all'umanità, rinvigorita da un sonno più che millenario, fosse allora ignota la stanchezza, sicchè procedette di scoperta in scoperta con velocità vertiginosa ammiranda. Ed è appunto sul cadere di quel secolo glorioso che venne vittoriosamente combattuta una lotta contro difficoltà, che si poteva credere sfidassero le forze dell'uomo; si giunse per tal modo a sottoporre a leggi esatte un concetto che sembrava trascendere le nostre facoltà intellettuali, cioè l'idea di infinito.

Tutto quello che noi percepiamo essendo limitato, un senso d'inespicabile, ma invincibile terrore c'invade ogniqualvolta il nostro pensiero si sforza di penetrare nell'intima natura di un fatto implicante in qualche modo l'idea d'infinito nello spazio o nel tempo, sicchè par quasi che quel concetto sia un'ultima Tule a cui ci è vietato di giungere. Eppure, le continue scoperte di nuovi mondi, oltre quelli che credevansi esaurire l'universo, inducono a ritenere che questo non abbia confini, sia infinitamente grande; per compenso, la divisione e suddivisione della materia, spinta ogni giorno più innanzi, grazie al perfezionarsi dei nostri mezzi meccanici, porta a indurre che quell'operazione ripetuta indefinitivamente guidi a corpuscoli infinitamente piccoli: si acquistano così le nozioni di « infinito » ed « infinitesimo » nello spazio. Se, inoltre, si riflette che gli studi dei geologi fanno retrocedere verso un passato sempre più remoto le origini del mondo, mentre quelli degli astronomi non ne additano alcun termine probabile, si arriva al concetto di infinito nel tempo; al quale

Digitized by Google

fa riscontro quello di tempuscolo infinitesimo, che è il portato delle più delicate misurazioni eseguite dalla Fisica.

Ora, queste nozioni di infinito ed infinitesimo si presentano nelle circostanze testè indicate ed in moltissime altre somiglianti, sotto un'apparenza così inesatta e trascendente che per lungo tempo si reputò impossibile servirsene come strumenti di un lavoro matematico. Ciò spiega perchè ad una famosa scuola di filosofi greci — gli atomisti — professanti dottrine, il cui cardine è il corpuscolo infinitesimo, faccia stridente contrasto ARCHIMEDE, il quale spese la miglior parte della sua laboriosa esistenza a stabilire, evitando con cura scrupolosa il concetto d'infinito, un grande numero di verità che, in ultima analisi, sono corollari di esso. Quantunque altrettanto abbiano fatto i numerosi pensatori che elessero a modello il famoso geometra Siracusano, pure sorse ed andò gradatamente diffondendosi e rafforzandosi il convincimento che sarebbe tornato immensamente utile l'avere a propria disposizione un mezzo sicuro per decomporre qualsivoglia questione nelle sue parti elementari e per risalire dalle parti al tutto. Siffatta convinzione si rispecchia nei molti tentativi, più o meno felici, fatti per entrare in possesso di tali sperati nuovi ordigni; la storia li ha accuratamente registrati per metterne in luce il nesso logico e per determinare in quale maniera ed in quale misura essi abbiano preparato o promosso il conseguimento del fine a cui miravano, raggiungimento che è destinato a rimanere eternamente collegato ai nomi di NEWTON e LEIBNIZ. Questi sommi investigatori, col surrogare la considerazione di quantità attualmente infinite od infinitesime, con quella di quantità capaci di divenire maggiori o minori di qualunque quantità omogenea, per quanto grande o piccola sia, gettarono le basi del Calcolo infinitesimale (1). Gli è specialmente LEIBNIZ — questo insuperabile seminatore di idee, dalla natura fornito di larghezza e profondità di vedute sufficienti per fargli abbracciare d'un colpo tutte le conseguenze di una medesima premessa — che concepì e presentò l'essenza di questa nuova disciplina con i lineamenti che era destinata a serbare. Benchè nei primordi essa fosse ancora piena di oscurità e misteri, e, dal lato del rigore, lasciasse qualche cosa a desiderare, pure le brillantissime applicazioni che ne vennero subito fatte acquetarono le apprensioni dei più timidi, incoraggiarono i titubanti e mostrarono ai più scettici di essere giunti in possesso di uno di quei grandi principii generali capaci di sciogliere

(1) Più minuti particolari al riguardo trovansi nei due articoli dell'autore *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici dell'Antichità* e *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici anteriori al Secolo XVIII*, inseriti nei volumi XVIII e XIX (1915-16) della rivista *Scientia* (1935).

Digitized by Google

i nodi più intricati, di innondare di luce le questioni più profonde. Anzi, nei tripudi accompagnanti l'ambita conquista, si arrivò a credere che i nuovi calcoli estendessero il loro potere sopra l'intero creato, che tutto quello che succede — vuoi nel mondo fisico, vuoi nel mondo morale — fosse governato da leggi, alla cui investigazione bastassero gli strumenti matematici fabbricati da NEWTON e LEIBNIZ..... Ne volete una prova, o Signori?..... Si sognò persino che la più capricciosa e sbrigliata delle passioni — l'amore — soggiacesse a norme infrangibili; e l'ALGAROTTI, il noto popolarizzatore della filosofia newtoniana, coraggiosamente enunciò la seguente proposizione: « l'amore di un amante decresce in ragione del cubo della distanza dalla sua bella e del quadrato della durata della sua assenza ».

9. — Io non mi proverò a dimostrare la verità o falsità di codesto preteso teorema; lo citai come un curioso segno dei tempi, come attestazione dell'essere stata la Matematica in principio del Secolo XVIII una scienza di moda, di cui le dame stesse erano chiamate ad occuparsi. Ed attrarrò invece l'attenzione dei miei cortesi ascoltatori sopra due circostanze importanti.

La prima è che, coll'introdurre nel proprio seno il concetto di infinito, la Matematica subì un'ulteriore trasfigurazione, la quale, mentre ne centuplicò il campo di applicabilità, segnò un ulteriore considerevole allontanamento da quello che essa era nelle sue origini.

La seconda è che miriadi di fondamentali lavori, derivanti dall'applicazione del Calcolo differenziale e del Calcolo integrale all'Analisi ed alla Geometria, alla Fisica ed alla Meccanica, stanno a dimostrare come non fossero ingannatrici le rosee speranze che accompagnarono l'avvento delle nuove idee. Un secolo intero, un secolo che vide all'opera i BERNOULLI ed i RICCATI, FAGNANO ed i MANFREDI, un EULERO ed un LAGRANGE, non bastò perchè si toccasse la sommità dell'imponente edificio, per costruire il quale LEIBNIZ e NEWTON avevano delineato il piano e somministrati i migliori materiali.

È un secolo, il XVIII, fertile di risultati parziali, di perfezionamenti nei particolari, di coordinamenti geniali, ma che, nel campo delle Scienze esatte, non produsse alcuna di quelle grandi idee rinnovatrici, destinate ad attraversare le età future, portando seco il nome del proprio autore. Consapevole di questa condizione di cose, sin dai primi lustri di quel secolo, il MONTESQUIEU melanconicamente osservava: «Noi siamo quasi ridotti a piangere, al pari di ALESSANDRO MAGNO, che i nostri padri abbiano fatto tutto e nulla ci abbiano lasciato da compiere per le nostre glorie »; parole alle quali faceva eco alcun tempo appresso LAGRANGE, il quale, dopo una rapida rassegna della scienza, a cui aveva consacrata la vita,

Digitized by Google

con senile tristezza esclamava; « la miniera è ormai esausta, cosicché, se non si scopre qualche nuovo filone aurifero, saremo forzati, presto o tardi, di abbandonarla! ».

10. — Questo periodo di scoramento e depressione morale non ebbe fortunatamente lunga durata. Dal campo che, in seguito ad una lunga ed esauriente coltura, sembrava trasformato in una sterile landa, nuove e robuste forme di vita stavano per sprigionarsi, sotto l'influenza altamente benefica di un elemento, sino allora giudicato estraneo alla natura stessa della Matematica, cioè l'elemento critico (1); non alludo già alla critica infeconda, che tutto turba e nulla rinnova, ma sibbene allo spirito di libero esame, di cui gli Enciclopedisti fecero una fiaccola perenne, compagna indispensabile per chiunque intenda analizzare, senza preconcetti di alcun genere, tutto il retaggio delle età passate, per poi accrescere il patrimonio da esse adunato.

Questa nuova tendenza, che guidò a sfrondare i troppi allori che erano stati dagli antichi decretati ad ARISTOTELE, a TOLOMEO, a GALENO, preparava anche al patriarca della Geometria, ad EUCLIDE, la sgradita sorpresa di appunti pienamente giustificati, rivolti da persone di alto intelletto in cui l'ammirazione pei maggiori non offuscava la serenità di giudizio. Fu l'umile teoria delle parallele che venne ravvisata come la meno soddisfacente, fra quelle che costituiscono gli *Elementi*, e quindi scelta come bersaglio per gli strali della critica. L'improvviso attacco giunto da più parti, abilmente preparato e gagliardamente condotto, recò una perturbazione profonda nel pacifico mondo matematico; i geometri ortodossi, rappresentanti della scienza ufficiale, allibirono di spavento, sentendo tremare le colonne del tempio, in cui essi adoravano EUCLIDE; le anime timorate gridarono allo scandalo; e gli spettatori più sereni ed imparziali dovettero riconoscere essere sorta l'alba di un « 14 Luglio » anche per la monarchia assoluta retta dall'autore degli *Elementi*, avere questa trovato in GIOVANNI BOLYAI un MARAT, in LOBATSCHEFSKIJ un DANTON, in GAUSS un ROBESPIERRE.

Ma poiché « è ben più facile insegnare una verità, che stabilirla sulle rovine di un errore (2) », intere coorti di matematici e filosofi valorosi si organizzarono e poi scesero in campo per salvaguardare l'intangibilità di EUCLIDE; non riuscendo desse a ridurre al silenzio gli avversari

(1) Non deve recare meraviglia il non trovare qui fatto cenno della risurrezione della Geometria pura, accaduta in principio del Sec. XIX, dal momento che essa provenne piuttosto dal richiamo in attività di servizio di concetti e metodi caduti in disuso, che dall'introduzione di idee tanto originali quanto sono quelle che, causa la brevità dell'ora, dovetti limitarmi a citare nel testo.

(2) Parole del LEOPARDI.

Digitized by Google

altre schiere vennero a rafforzarle ed altre ancora; ma sempre invano; sicchè venne un giorno in cui i più intrepidi guerrieri furono costretti ad innalzare bandiera bianca e riconoscere stolta la causa per la quale avevano sino allora armeggiato a colpi di sillogismo.

Calmati gli animi, non si tardò a constatare che, anche per la Geometria, la critica aveva agito, non come spada che uccide, ma come vomero che scava solchi profondi; ed invero la maestosa costruzione architettata dai matematici Greci stava tuttora ferma sopra le sue basi granitiche; ma accanto ad essa se ne ammirarono altre, non meno sontuose ed artistiche, ma di estensione maggiore e di solidità ancor meno discutibile, nelle quali si specchia la struttura di spazi differenti dal piccolo ambiente, in cui si svolge la nostra esistenza. Da quell'istante la pace è tornata nuovamente fra i geometri ed un soffio di vitalità sino allora ignota circola nelle aule, in cui dianzi insegnanti e discenti pigramente sonnecchiavano sopra le eterne pagine euclidee. Da quell'istante i matematici, vedendo di avere più che triplicato il campo della Geometria, poterono appendere un nuovo splendido trofeo nel museo delle loro glorie, e con giusta alterezza ravvisarono di avere in sè stessi la forza per istudiare le proprietà, non solo di un mondo quale è attestato dagli organi dei sensi, ma di altri ancora, la cui possibilità ed i cui caratteri sono rivelati dalla ragione scortata dalla Logica.

Ben è vero che la gioja del trionfo è loro talvolta offuscata dalla voce di qualcuno, la cui anima «è da viltate offesa», che nega il diritto di accogliere teorie diverse da quelle insegnate da EUCLIDE, che giudica i nuovi concetti portare l'anarchia ove dianzi esisteva un buon governo, che giunge persino ad irridere chi ammette la possibilità di triangoli, i cui angoli siano in somma differenti da due angoli retti.

Ma di siffatte obbiezioni non è difficile dimostrare la mancanza di un serio fondamento. Notisi, infatti, che, supposto l'universo retto da una Geometria non-euclidea, ad una porzione infinitesima di esso sarebbero integralmente applicabili i teoremi che leggonsi negli *Elementi*. Ora il dominio delle nostre esperienze geometriche può dirsi limitato da una superficie sferica concentrica alla terra e passante pel sole; e se si riflette che la luce solare impiega circa *otto minuti* per giungere al nostro occhio, mentre non meno di *ventiquattro mila anni* sono necessari perché al nostro pianeta arrivi la luce emanata dalle stelle di sedicesima grandezza (1), si vedrà che il nostro campo sperimentale può ben dirsi infinitesimo rispetto a tutto il creato: quindi i risultati delle nostre esperienze nulla possono insegnare riguardo ai fatti geometrici che accadono

(1) V. p. es. *Il Sole* e *Le Stelle* del PADRE SECCHI.

Digitized by Google

oltre ai confini a cui essi giungono. È pertanto palese che il negare la possibilità di una Geometria non-euclidea, per ciò solo che nessun fenomeno ce ne rivelò sinora l'esistenza reale, è un frutto di quel preconcetto tanto dannoso quanto seducente per l'uomo, secondo cui gli organi di cui egli dispone bastano a somministrargli, anzi gli hanno già fornita, un'immagine perfetta di quello che avviene in tutto l'universo. Da tale pregiudizio è urgente emanciparsi; invece di ritenere già noto tutto il conoscibile, lo scienziato degno dell'alta missione affidatagli, deve tenere costantemente dinnanzi ai propri occhi come modello da imitare NEWTON, il quale un giorno pittorescamente e modestissimamente caratterizzava la propria opera scientifica con queste parole; « Io somiglio ad un fanciullo che raccoglie sulla riva del mare i sassolini piu vaghi, le conchiglie più appariscenti; ma l'oceano della verità si stende, a me dinnanzi, inesplorato e senza confini! ».

11. — La creazione di sistemi geometrici differenti dall'euclideo segna una nuova fase nello sviluppo storico della Matematica; il progresso in conseguenza compiuto è tanto grande, gli effetti di esso hanno un tale permanente valore, che esso rimarrà scolpito nella storia del pensiero umano, a gloria imperitura del secolo ora agonizzante; esso è intimamente connesso all'ultimo ordine di riforme che ancora mi resta da segnalare prima o Signori, di togliere commiato da Voi.

Tutti i corpi di cui noi abbiamo cognizione si estendono in tre direzioni: lunghezza, larghezza, profondità. Tre sorta di movimenti noi siamo capaci di compiere: progressivi, laterali, verticali; con una terna di misure, opportunamente condotte, può venire determinata la posizione di qualunque punto dello spazio. In base a cotesti fatti sperimentali ed altri analoghi, si riteneva un tempo che lo spazio in cui viviamo avesse tre e tre sole dimensioni; ma non tardarono a sorgere e venire espressi non pochi dubbî a tale proposito, a dissipare i quali s'industriarono parecchi valentuomini (1). Se non che, i ragionamenti all'uopo congegnati essendo stati riconosciuti privi di rigore e quindi impari allo scopo, i matematici — valendosi dell'antico privilegio del quale godono, di introdurre per definizione nuovi concetti, purchè non implichino contraddizioni — credettero conveniente di lasciare provvisoriamente indeterminato il numero delle dimensioni dello spazio ambiente, ammettendo anzi, sino a prova in contrario, l'esistenza di spazi a quante si vogliano dimensioni. In conseguenza la prospettiva che si apriva dinnanzi ai loro occhî maestosamente si allargò; dalle uova deposte sin dai primordi dell'Alge-

(1) Ricordo fra questi soltanto CLAUDIO TOLOMEO e GALILEO GALILEI.

Digitized by Google

bra (1), al sole cocente del Secolo XIX, sgusciò una teoria che, più di cent'anni prima, EMANUELE KANT, col divino intuito del genio precorrente i tempi, presagiva sarebbe stata « la Geometria più elevata a cui possa giungere la mente limitata dell'uomo » ; una teoria che, mentre fornì al matematico le tanto sospirate interpretazioni geometriche di fatti analitici connessi alla teoria delle funzioni contenenti più di tre variabili, permise di fare cadere qualche raggio di luce sopra alcuni fenomeni fisici e chimici prima avvolti in una completa oscurità. Quale altra teoria, o Signori, si è presentata sin dal suo sorgere più bella, più robusta, più ricca di lusinghiere promesse di questa ultima nata fra le discipline geometriche? Quale, quindi, era più degna di venire festosamente accolta ed altamente onorata?

Eppure buona parte del pubblico, invasa dallo sfibrante dubbio sistematico o imbevuta da gretto misoneismo, chiudendo gli occhi dinnanzi agli incontrastabili successi ottenuti, fece, nè cessa ancora di fare, il viso dell'armi ai concetti ai quali essa s'informa, adducendo a sostegno di tale attitudine ostile l'assenza di fatti, di evidenza tangibile, comprovanti l'esistenza di spazi con più di tre dimensioni. E', sotto altra forma, il medesimo argomento che era stato adoperato per vituperare od abbattere la Geometria non-euclidea. Ad esso il matematico replica che per lui gli spazi a quattro o più dimensioni non sono meno possibili di qaanto lo siano le figure ideali considerate dall'ordinaria Geometria, e che egli è in grado di studiarli con altrettanta sicurezza, sicchè quell'obbiezione non lo tange. Inoltre se, riguardo alla loro esistenza palpabile, siamo forzati a ripetere con EMILIO DU BOIS-REYMOND *Ignoramus!* nulla autorizza a soggiungere *Ignorabimus!*

E questa attitudine riservata e modesta deve venire assunta da chiunque tenga dietro alle incessanti modificazioni esercitate sul quadro delle nostre idee dal progresso continuo delle nostre cognizioni positive. Chi, ad esempio, un secolo fa non avrebbe tacciato di sognatore colui che avesse predetta l'invenzione di un metodo per determinare la costituzione intima di astri situati a miliardi di chilometri da noi? Eppure l'Analisi spettrale ha operato il miracolo! E chi avrebbe creduto che l'Alchimia, prodigiosamente trasformata nella Chimica, si sarebbe così rapidamente perfezionata da potere accertare la presenza e stabilire le qualità essenziali di elementi non ancora isolati? (2). E chi avrebbe creduto che nello spettro solare, oltre ai raggi luminosi ed ai raggi calorifici, altri se ne

(1) Mi esprimo così perchè lo STIFEL (1486-1567) scrisse alcune frasi, che lo fanno ascrivere fra i primi che concepirono gli spazi comunque estesi.

(2) E' noto che in tale condizione fu per lungo tempo il Fluore.

Digitized by Google

trovassero, che nessun organo nostro ha la virtù di segnalare? E la possibilità di vedere a traverso a diaframmi opachi o di comunicare a distanza, senza il sussidio di alcun veicolo visibile o palpabile, non sono forse cose omai registrate fra le più certe conquiste della scienza contemporanea, mentre, non è molto, venivano considerate quali fantasticherie di menti ammalate, come è tuttora ritenuta da taluni chimerica la considerazione di spazi comunque estesi?

Tutto ciò prova che nessuno ha il diritto di scartare una nuova idea, per quanto di apparenza strana, la quale prometta di riuscire di qualche ajuto nella tanto ardua investigazione della verità; che tutti coloro, i quali aspirano ad imprimere un'orma nel cammino che guida dall'ignoranza alla scienza, devono avere ognora presente la seguente saggia ammonizione del matematico eminente, di cui l'Italia piange la recente irreparabile perdita (1): « Quando questi tentativi (di rinnovamento radicale dei principii) si presentano come frutto di investigazioni coscienziose e di convinzioni sincere, quando essi trovano il patrocinio di un'autorità imponente e fin qui indisputata, il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo ».

Ad onta dell'opposizione sorda o palese che incontrò, la teoria degli spazi a più dimensioni riuscì a penetrare trionfalmente in tutti i rami della Matematica. Ma lunga, erta e cosparsa di triboli e spine è la via che essa deve ancora percorrere, prima di giungere all'apice della perfezione. A voi, o giovani, che avete l'animo sempre pronto e disposto ad accogliere le idee più rivoluzionarie, è riserbato il còmpito di assodare i fondamenti delle nuove dottrine, di estenderne le applicazioni e di far sì che ottengano un posto onorevole e stabile nello scibile matematico. Per incorarvi a seguire animosamente la strada che si apre a voi dinnanzi, con la profonda convinzione di un apostolo sincero, io applico a questo ordine di idee le fatidiche parole con cui Dante del *Convito* annunziava, araldo egli stesso della sua gloria, il cominciamento della poesia e della letteratura italiana: « Questo sarà luce nuova, sole nuovo il quale sorgerà ove l'usato tramonterà, e darà luce a coloro che sono in tenebre e in oscurità per lo usato sole che a loro non luce ».

12. — Intanto, nell'attesa che l'avvenire coroni l'opera di cui testè vedemmo gli inizi, col fervido voto che le reclute oggi arruolate si mutino in provetti guerrieri raggianti di trionfo, se noi volgiamo, una volta ancora, lo sguardo sopra il cammino percorso dalla disciplina, di cui

(1) E' necessario che io aggiunga qualche parola per dichiarare che alludo ad EUGENIO BELTRAMI?

Digitized by Google

segnalammo le tappe principali, la vedremo passare, quasi miracolosamente, da una congerie di regole empiriche, non tutte indiscutibili, ad essere una Scienza nel senso più elevato della parola; amorosamente cullata, nutrita ed allevata dai più eminenti pensatori nati sotto il cielo dell'Ellade, la contempleremo mentre cresce rigogliosa e diviene feconda. Negletta e dimenticata durante l'impero della forza bruta ed assopita durante il dominio dell'erudizione, essa risorge e ricomincia ad essere a molti caramente diletta; così le è dato di riprendere il proprio posto nel consesso delle scienze e mostrarsi pronta a nuove battaglie, a nuove vittorie. Rinvigorita, poi, in virtù dell'assimilazione dei metodi simbolici, essa subisce una decisiva trasfigurazione quando apprende a sostituire ogni figura con una formola, ed una seconda, non meno radicale, quando giunge a dedurre dai concetti di infinitamente grande ed infinitamente piccolo due strumenti scientifici comparabili per natura, sicurezza e potenza al telescopio ed al microscopio.

In ciascuno di siffatti decisivi cambiamenti si manifesta, ognor più chiaramente, la perenne tendenza della nostra Scienza a passare dal concreto all'astratto, ad abbandonare il reale per l'ideale, tendenza nella quale si ravvisa la legge governatrice del suo sviluppo nelle età passate (1). Ma questa stessa legge ha presieduto eziandio alla fase — ultima in ordine di tempo — che essa attraversò quando, subendo l'irresistibile influenza dell'invadente spirito di libero pensiero, si sentì profondamente scossa e tutta animata da un alito di vita nuova. Allora, con la scorta immancabile di una Logica rigorosa e con la fede inconcussa nella sicurezza del proprio procedere, essa trovò in sè stessa la forza per estendere il proprio dominio sopra nuovi mondi, governati da leggi che l'intelletto afferma, malgrado che i sensi, essendo incapaci di abbracciarle, si sforzino con ogni possa di negare.

Così la Matematica andò a poco a poco assumendo un carattere ed un'attitudine che nella sua infanzia sarebbe stato impossibile di prevedere. Chiamata non indarno in ajuto dalle discipline sorelle, di cui mai ebbe ad implorare il soccorso; scelta a modello da esse, invidiose del suo rigore di metodo, della scultoria precisione del suo linguaggio, della facoltà di accendere in chi la coltiva un entusiasmo quasi ascetico; essa quasi contro sua voglia, sotto l'impero di una necessità fatale, di giorno in giorno si allontana dagli altri rami dello scibile, essendo animata da

(1) Altre attestazioni moderne di siffatta tendenza della Matematica, alle quali l'esiguità del tempo mi vietò di accennare, sono offerte dalla generalizzazione successiva del concetto di numero, dall'evoluzione che subì l'idea di funzione e dalla teoria dei numeri transfiniti.

Digitized by Google

aspirazioni essenzialmente diverse e discordi dal fine supremo che questi si propongono. Mentre le Scienze naturali si studiano di eliminare dal proprio seno tutto ciò che non sia frutto di osservazioni sicure; mentre la Psicologia fa ogni sforzo per divorziare dalla Metafisica e divenire una Scienza positiva; mentre nelle discipline storiche e sociali non si ammettono più che lavori aventi per cardini documenti autentici e statistiche ufficiali; mentre persino nelle Arti rappresentative, nel Romanzo, nella Commedia si tende a porre, in luogo dei prodotti della libera fantasia, le fedeli pitture di ambienti, di popoli, di epoche; alle manifestazioni del pensiero matematico non è posto oggi alcun freno(1); non soltanto lo si ritene capace di idealizzare il sensibile, ma gli si riconosce la facoltà di raggiungere il soprasensibile.

Pare pertanto che — all'opposto di quanto da molti si crede — nel tempo nostro alla Matematica sia stato affidato il nobilissimo còmpito, già adempiuto esclusivamente dalla Poesia, di soddisfare quel bisogno mai appagato di idealità, che sembra nell'uomo una seconda natura; quell'inestinguibile aspirazione ad elevarsi al disopra delle meschinità della vita quotidiana; quell'intensa brama di vivere, almeno per qualche istante, in un'atmosfera ove siano ignoti i dolori, ove non giunga neppure l'eco delle nostre lotte.

Lieta e superba di quest'ufficio, che essa si sente in grado di disimpegnare, la Matematica dalle glorie del passato deriva gli auspici per l'avvenire; e, sospinta da tutte le nazioni civili, affratellate dalla comunanza di ideali, con balda serenità quotidianamente si avanza lungo una brillante trajettoria che, mentre sembra allontanarla sempre più dalla terra, le permette di spiegare e spesso la guida a prevedere fenomeni naturali complessi ed ascosi.

A memoria e testimonianza di ciò che è, al tramonto del Secolo XIX, la Scienza che io qui indegnamente rappresento, ad indizio augurale di quanto essa è chiamata a compiere nel Secolo che sorge, rimanga incisa nella Vostra mente, o Signori, la frase, profondamente vera nella paradossale sua veste, colla quale uno scienziato illustre — LEOPOLDO KRONECKER — sintetizzava il carattere proprio dell'opera a cui egli aveva tanto efficacemente contribuito. Egli volgendosi un giorno a chi(2) con lui aveva diviso le gioje del produttivo lavoro e gli allori del meritato trionfo, con giustificata alterezza esclamava: « *Amico, i poeti siamo noi!* » (3).

---

(1) « Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit », nota a ragione G. CANTOR.

(2) Il SYLVESTER.

(3) Merita di essere notato come un concetto analogo sia stato espresso dal WEIERSRTASS; il quale, in una lettera diretta a SOFIA KOWALEWSKI il 27 Agosto 1883, scrisse:

Digitized by Google

XXV.

DONNE MATEMATICHE

Lettura tenuta nella R. Accademia Virgiliana di Mantova il 28 dicembre 1901; tradotta in francese nella Revue Scientifique 1904.

1. — Dell'immenso impero fondato da ALESSANDRO MAGNO persino le ultime vestigia erano omai scomparse. Le aquile latine, vittoriose in tutto il mondo, avevano ridotto a servitù, non soltanto la Grecia di PERICLE, ma anche quella nuova Grecia, giunta a floridezza insperata nell'antica terra de' Faraoni; anche quella plaga, la quale, sotto l'illuminato governo dei Lagidi, erasi prodigiosamente mutata in una culla di civiltà novella, in un asilo pacifico e tranquillo pei principi dell'intelletto, in un fecondo vivaio di scienziati, era ormai una provincia romana. Ma romano non era il pensiero che animava gli scarsi investigatori ancora adunati attorno alle ceneri fumanti del Museo d'Alessandria: non soltanto i matematici del periodo aureo della geometria greca erano venerati come maestri, ma PLATONE, il filosofo divino, ispirava un valoroso drappello di pensatori, i quali facevano del suo gran nome uno scudo e delle sue massime altrettante armi per difendere, durante l'autocrazia della forza brutale, i diritti — sacrosanti, eppur misconosciuti! — dell'investigazione spassionata dal vero.

Ed è appunto la setta dei Neoplatonici che, nel momento in cui più aspra ferveva la lotta tra il culto degli antichi Dèi ed il Cristianesimo sorgente, offre il meraviglioso spettacolo di una donna riassumente in sè stessa tutta la scienza pagana, almeno per quanto concerne le discipline matematiche e filosofiche: IPAZIA ALESSANDRINA. Avvolta nel severo manto dei filosofi, essa aggiravasi per le vie di Alessandria e, predicando le dottrine di PLATONE ed ARISTOTELE, suscitava un consenso di entusiasmo non meno vivo di quello che accendeva nel circolo di dotti, del quale essa era centro ed ispiratrice. A nessuna donna il destino concesse tanta e così varia rinomanza: si vantava la sua irresistibile eloquenza e si riteneva senza confini la sua cultura, divina si reputava la sua voce ed i lineamenti soavi ed austeri del suo volto erano proverbiali sino nelle regioni più remote del mondo civile.

« ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein ». Vedi *Compte Rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens* (Paris 1902) p. 149.

Digitized by Google

Quanto elemento sentimentale o leggendario abbia influito sopra il lusinghiero giudizio, pronunciato intorno all'altezza dell'ingegno della leggiadra figliuola di TEONE ALESSANDRINO, non ci è dato misurare, chè il tempo, che pure fu rispettoso e clemente verso molte produzioni coeve, non ha lasciati intatti nemmeno i titoli delle opere da essa composte. Fu dessa da natura creata per inghirlandare di fiori eterni la vittoria dell'ingegno femminile? Fu dessa realmente un astro splendente di luce sua propria, o non piuttosto simile al fosforo, che soltanto nelle tenebre è capace di gittare qualche bagliore? A siffatte interrogazioni è impossibile dare oggi attendibile risposta. Tuttavia, l'inestinguibile vitalità, di cui sembrano forniti i grandi concetti scuotenti e poi rinnovanti qualche ramo dello scibile, fanno dubitare che IPAZIA siasi elevata come cima superba sulla bassa schiera de' suoi contemporanei, ed induce piuttosto a ritenere che gli inni cantati in sua lode abbiano avuti quali precipui moventi la bellezza e la grazia della sua persona, non meno che la sua lacrimevole fine..... Chè, accusata, se a torto od a ragione non è ben chiaro, di essere il più grave ostacolo all'invocata riconciliazione fra coloro che in Alessandria ufficialmente rappresentavano la Chiesa e lo Stato, fra il vescovo CIRILLO ed il prefetto ORESTE, venne tratta al tempio ed uccisa ed il suo bel corpo, fatto a brani, fu a ludibrio trascinato per le vie della città.

Così l'intolleranza religiosa e politica si macchiava di un duplice imperdonabile delitto; non solo troncava nel suo fiore una vita preziosa e promettente, ma spegneva l'unica facella tuttora viva dell'antico sapere, cancellava l'ultima traccia dell'istituto glorioso fondato dai Tolomei.

2. — L'aureola del martirio — non meno, al certo, delle eminenti doti intellettuali e della tanto decantata venustà — indusse romanzieri e poeti (1) a scegliere IPAZIA come loro eroina; gli scienziati s'inchinano riverenti dinnanzi alla maestà della morte, ma riserbano a miglior tempo il definitivo giudizio sopra la pensatrice, lamentando vivamente di non possedere più alcuno degli affermati contributi da essa recati alle scienze positive.

Anzi, tale rimpianto è assai più generale; giacchè IPAZIA offre uno dei più brillanti e forse il più vetusto documento umano (2) per risolvere

---

(1) Ricordo il poema di DIODATA SALUZZO-ROERO ed il romanzo del KINGSLEY, che appunto da *Ipazia* s'intitolano, nonchè uno dei *Poèmes antiques* del LECONTE DE LISLE.

(2) Mi esprimo così troppo vaghe essendo le notizie su una etèra, della quale fu scritto: « Nicarete, nata da parenti onorevoli che le diedero una bella educazione, fu appassionata pei problemi della geometria, nè rifiutò i suoi favori a chiunque le insegnasse qualche cosa » (LOMBROSO e FERRERO, *La donna delinquente, la prostituta e la donna normale*, Torino 1893, p. 548).

Digitized by Google

la questione — che l'odierno movimento femminista ripose sul tappeto — se la donna, nel campo scientifico, sia chiamata a raggiungere le vette eccelse; se in un corpo femminile possa albergare una di quelle grandi anime, destinate a parlare all'umanità attraverso ai secoli; se, quindi, debbansi accordare incoraggiamenti o porre freni alla tendenza, sempre maggiormente diffondentesi fra le componenti la più gentile metà del genere umano, di arruolarsi come soldati nell'esercito dei ricercatori della verità, con la segreta speranza di conquistarvi il bastone di maresciallo.

E' questo un problema, che è parte integrante di quello, più vasto e complesso, proponentesi di determinare la funzione sociale della donna. E' un problema che (come di regola tutti quelli relativi al femminismo) venne trattato con procedimenti diversi, ma altrettanto deplorevoli; infatti o fu bruscamente risolto applicando sedicenti leggi generali, che, mentre sono presentate come risultanze di una scienza omai certa, offrono una mirabile somiglianza con vieti pregiudizi: oppure venne attaccato con un' irruente vivacità, che, essendo il prodotto di aspirazioni impazienti, rende impossibile ogni indagine obbiettiva. Invece, per lumeggiarla almeno, se non risolverla, qual mezzo migliore del ricorrere alla statistica, questa investigatrice fredda ed implacabile dei principii governatori delle infinitiformi azioni umane? In altre parole, quale via più sicura di quella che ha come cardini e sostegni i risultati delle molteplici esperienze già fatte?

Mi è lecito di così esprimermi perchè le donne, che già si dedicarono alla scienza in genere ed in particolare a quella in cui io mi sento meno incompetente, sono omai legione. Se un tempo una signora intellettuale come M.me DE SÉVIGNÉ, candidamente confessava: « Io non posso fissare lo sguardo sopra una pagina d'algebra, senz'essere invasa dal terrore di vedere apparire il diavolo », quante donne in questi ultimi decenni, aspirando ad essere

Ben d'altro ornate che di perle ed ostro,

seppero familiarizzarsi con quelle discipline che, malgrado il loro aspetto strano e terribile, il MICHELET riguardava come immagini della purezza immacolata (1). Da tempo le aule delle scuole di ogni specie sono frequentate da giovinette animose ed intelligenti le quali avvertirono come il còmpito della donna dei tempi nostri sia ben più alto di quello assegnatole nell'epoca romana, di *guardare la casa e filare la lana*. Anzi buon numero di esse, compiuti gli studi, si sparsero diggià

(1) « Le pur entre le pur, l'algébre et la géomètrie ».

Digitized by Google

per il mondo, diffondendo i frutti adunati della loro attività e del loro ingegno. In conseguenza qualche mediocrità in calzoni, trovando che qualche eminenza in gonnella gli intralciava la strada, sulla quale riteneva di avere un esclusivo diritto di passaggio, gettò alte grida e formulò clamorose proteste. Che più? Circa un secolo fa ad un originale venne in mente di redigere e patrocinare un « Progetto di legge inteso a proibire alle donne di imparare a leggere e scrivere » (1), ed ai giorni nostri assistemmo al costituirsi e prosperare in America di una « Società di odiatori delle donne », avente per programma la lotta ad oltranza contro l'invasione dell'elemento femminile nelle università (2).

Questi fatti non devono recare meraviglia alcuna, perchè nessuna classe sociale votò mai spontaneamente la propria decadenza. Così — per non scostarmi dal mio tema — non credete forse che RE SACRIPANTE, quando venne tolto violentemente d'arcione dall'inclita donzella cantata da MESSER LODOVICO, sarebbe stato propenso assai più a promuovere una legge vietante alle donne di indossare corazza e montare in sella, che a sciogliere un inno in lode del fulgido sguardo e del braccio potente della bella BRADAMANTE?

Consideriamo pertanto quel rinnovato movimento antifemminista con la placida serenità con cui si contempla un fenomeno curioso, ma inevitabile; guardiamoci però dall'associarci ad un'impresa, che deve risolutamente giudicarsi inutile od insensata; inutile se la donna è, per la natura sua, incapace di fare, nel campo scientifico, una concorrenza vittoriosa all'uomo; insensata se lo fatale andare delle cose deve produrre uno spostamento nel centro di gravità del sistema sociale.

E ripetiamo piuttosto la domanda: le nozioni di psicologia femminile che possediamo inducono esse a ritenere probabile, od anche soltanto possibile, che la donna sia destinata a portare in avvenire alla scienza contributi paragonabili a quelli che tramanderanno alla posterità più remota i nomi gloriosi di PITAGORA e NEWTON, di ARCHIMEDE e LEIBNIZ, di CARTESIO e LAGRANGE?

3. — Il mezzo migliore per porgere adeguata risposta a codesta interrogazione sembra offerto dalla storia, che, secondo la geniale espressione di un poeta pari ai grandissimi (3), è ad un tempo « un'eco del passato nell'avvenire e un riflesso dell'avvenire sul passato ». L'interrogare la gran *maestra della vita*, l'ascoltare la voce, che si sprigiona dalle sue pa-

---

(1) Le prime linee di tale progetto (di SYLVAIN MARÉCHAL) sono riferite dal REBIÈRE, *Les femmes dans la science* (II éd., Paris 1897) p. 329.

(2) « Society of women haters », di cui rende conto la rivista *Minerva*, 1901, p. 66.

(3) VICTOR HUGO.

Digitized by Google

gine eterne, è tanto più indicato nel caso attuale giacchè sta a nostra disposizione un volume, nel quale un diligente compilatore francese — il REBIÈRE — con pazienza da benedettino, adunò le più essenziali notizie intorno a la vita e le opere delle donne, il cui nome s'incontra negli annali delle scienze e delle lettere. Con quanta coscienza egli abbia proceduto emerge dal fatto che non meno di *seicentocinquanta* nomi compaiono nel catalogo da lui redatto: bel numero invero, capace di fare sussultare di gioia qualunque femminista! Se non che, esaminando un po' dappresso il metodo di selezione adottato dal REBIÈRE, l'impressione che produce quel numero si smorza, perchè non si tarda a riconoscere che quel metodo, ove venisse applicato al sesso forte, condurrebbe ad un analogo elenco abbracciante parecchi milioni di uomini. Gli è che il REBIÈRE non seppe evitare una confusione assai deplorevole e diffusa; accordò, cioè, il nome di scienziata ad ogni donna capace di intendere qualche ricerca scientifica o anche soltanto di interessarvisi; nel suo elenco compaiono quindi CATERINA DE' MEDICI, a cui vuolsi LUCA GAURICO insegnasse l'astronomia, e la PRINCIPESSA di ROHAN, che fu scolara di VIÈTE, ELISABETTA DI BOEMIA, nota corrispondente di CARTESIO, e la Signora DE CLARRIÈRE, che in gioventù studiò con passione le sezioni coniche (1); con patente ingiustizia egli collocò così sullo stesso piedestallo, al medesimo livello maestri e discepoli, attori e spettatori, originali e copie; cedendo forse ad un sentimento cavalleresco, egli commise una disparità di trattamento contro cui primi dovrebbero protestare gli apostoli dell'eguaglianza fra i due sessi. Che cosa dire poi del REBIÈRE quando accorda un posto nel suo elenco alla madre di KEPLERO, perchè accusata di magia, ed alla moglie del sommo astronomo, perchè, col suo umore gioviale, ne rallegrò la tribolata esistenza? uno a CRISTINA DI SVEZIA, come fervente ammiratrice di DESCARTES, ed uno alla marchesa di LAPLACE, per un premio da essa istituito? o quando s'indugia a far menzione di una M.me GACON-DUFOUR, di cui fu detto: «essa possiede segreti mirabili; è capace di fare vino senza uva, conserve senza zucchero e libri senza criterio, senza spirito, senza stile e senza buon senso» (2).

4. — Non lasciamoci adunque abbagliare dalla vantata onnipossente virtù persuasiva delle cifre, nel caso attuale manifestamente traditrice, e piuttosto, per cernere la biada dal loglio, armiamoci della lente della critica e della bilancia della giustizia: ci porremo così in grado di pesare

(1) V. l'interessante articolo di P. GODET, *Une jeune fille du XVIII Siècle d'après une correspondance inédite* (Revue des deux Mondes, 1 giugno 1891).

(2) REBIÈRE. op. cit. p. 109.

Digitized by Google

e discutere i titoli che raccomandano all'attenzione nostra le più cospicue cultrici delle scienze esatte.

Orbene, un'indagine un po' accurata rende manifesto che, dalla tragica morte di IPAZIA, molti secoli scesero nella tomba innanzi che il mondo assistesse al rinnovarsi del sorprendente fenomeno, di cui essa porge l'esempio più antico. E' il « secolo galante » che ce ne offre la prima ripetizione. Quell'epoca, frivola per eccellenza, somministra una riprova della sua fama nella meravigliosa disinvoltura con cui le donne d'allora affrontavano le più gravi quistioni di morale e di fisica, di filosofia e di matematica; pur trattandole quasi fossero semplici passatempi, esse cullavansi nella seducente illusione di poter giungere, anzi di essere arrivate, a risolverle.

Come prototipo delle « femmes savantes », che pullulavano allora nei salotti parigini, ci si presenta EMILIA DI CHÂTELET. Sedotta e bentosto abbandonata dal DUCA DI RICHELIEU — il fatuo nipote del celebre Cardinale — nell'amicizia di VOLTAIRE essa cercò conforto pel disinganno subito; e, per sottrarsi agli scherni ingiuriosi, di cui la sua scandalosa condotta era fatta segno nella corte di LUIGI XV, si rifugiò nella sontuosa villa, donde deriva il suo nome. Ivi, a momenti persi, sotto l'oculata direzione dell'amico filosofo, si diede a commentare NEWTON e studiare LEIBNIZ, nella speranza che la scienza, con indulgenza colpevole, aderisse a coprire con le sue grandi ali le dissolutezze di colei che poteva vantarsi di tenere corrispondenza epistolare con MAUPERTUIS e CLAIRAUT. Ma la scienza rispose con un diniego sdegnoso; come altrettanto fece la poesia, allorquando la bella EMILIA, omai sazia del romito di Ferney, le richiese analoghi servigi per coonestare le sue illecite relazioni col SAINT-LAMBERT.

Concedetemi che io non mi dilunghi sopra la vita e le opere di questa donna, di cui tenni parola soltanto in ossequio ad un'abitudine invalsa. VOLTAIRE compensò colei che gli aveva concessi i propri favori con una munificenza più che da re, da nume, perchè le assicurò l'immortalità; ma una di lei intima amica (1) non esitò a valutarla meno di zero. Il REBIÈRE è padrone di affermare che le opere della MARCHESA DI CHÂTELET ne difendono la memoria; per noi essa appare poco più di una donna astuta, che la scienza pura volle trasformare in una compiacente bandiera, che coprisse la merce avariata della sua vita intima. ARAGO può benissimo proclamare, con frase iperbolica, che « in geometria essa fu un genio »; ma che cosa avrebbe risposto a chi gli avesse chie-

(1) M.me DU DEFFAND.

Digitized by Google

sti gli enunciati delle questioni matematiche debitrici alla bella EMILIA della loro soluzione?

La polvere silenziosamente si accumula sopra i volumi scritti dalla MARCHESA DI CHÂTELET, dormenti indisturbati nelle gelide sale di antiche biblioteche; non cerchiamo di scuoterla! non sforziamoci di ottenere la cassazione di una sentenza, omai passata in giudicato!

5. — Quasi a rendere più ripugnante la fisonomia morale dell'allegra marchesa amica di VOLTAIRE, la storia ci presenta, circa nello stesso tempo, il profilo casto ed ascetico di una dotta giovinetta milanese: MARIA GAETANA AGNESI. Nata e cresciuta in un ambiente, nel quale alla cultura ed all'ingegno venivano tributati sommi onori, essa resistette alle lusinghe dell'arte e consacrò tutta sè stessa agli studi più astrusi, facendo convergere il meglio del suo non volgare intelletto a penetrare sino al midollo di quelle discipline la cui epidermide arida e rugosa tanti atterrisce ed allontana. In tal maniera, non soltanto potè rendersi familiare con le idee ed i metodi a cui LEIBNIZ e NEWTON posero il marchio di fabbrica, ma le fu dato di concepire e condurre a termine un'impresa audace e magnanima che, quasi nello stesso tempo, EULERO architettava e compiva; cioè di redigere un'opera in cui fossero diligentemente raccolte e sapientemente coordinate le cognizioni di analisi infinitesimale allora possedute. I due volumi che, coll'assistenza di eminenti scienziati (1), essa pubblicò, un secolo e mezzo fa, si leggono oggi ancora non senza utilità e diletto. Essi le fecero d'un tratto raggiungere i pinnacoli della fama; non solo l'Italia, ma l'Europa intera plaudì all'opera virile della gentildonna Lombarda e con desiderio, non scevro da trepidanza, attese che essa, dopo essersi dimostrata ottima istitutrice della gioventù studiosa, applicasse a nuovi problemi le teorie che aveva dimostrato di avere pienamente assimilate. Ma, nell'ora appunto in cui gli elogi e gli incoraggiamenti, prodigati a larga mano, dovevano spronarla a percorrere la strada che essa stessa aveva spianata, con dolorosa sorpresa la si vide porre in disparte gli studi già caramente diletti e consacrare tutto il suo tempo e tutta la sua attività a pratiche religiose ed opere di carità.

A quale cagione deve ascriversi tale improvvisa ed inattesa mutazione di *rotta* subìta dalla navicella dell'ingegno di GAETANA AGNESI? E' inammissibile che le nuove occupazioni, a cui erasi consacrata, non permettessero contemporanei studi scientifici. A provarlo valga l'esempio di un mio antico maestro — che io ricordo qui con affettuosa venerazione — FRANCESCO FAÀ DI BRUNO, il quale, nel mentre spendeva tempo e fatica

(1) Il P. RAMPINELLI e JACOPO RICCATI.

Digitized by Google

a fondare e dirigere quel Conservatorio di Nostra Signora del Suffragio che tante giovani inesperte salvò dalla perdizione, nel mentre porgeva uno dei modelli più commoventi della fede che sublima e della carità che santifica (1), con giovanile entusiasmo ed ammirabile energia, occupava gli ultimi anni della sua esistenza a redigere un monumentale trattato sulle funzioni ellittiche, che intendeva rappresentasse il suo testamento intellettuale.

Esclusa tacitamente tale causa dell'abbandono delle matematiche da parte di GAETANA AGNESI, i molti e coscenziosi biografi che questa ebbe (2) s'industriarono a far giungere qualche sprazzo di luce sopra questo momento decisivo della sua esistenza, ma sempre indarno; chi credette scoprirne la prima radice in un amore non corrisposto, chi nell'opposizione al matrimonio fattale dal padre suo. Senza perdere tempo a discutere quale di siffatte spiegazioni possieda un più alto grado di verosimiglianza, a noi importa notare come sia meraviglioso che una donna abbia trovato in sè stessa forza sufficiente per sottrarsi all'invincibile potere, esercitato dalle scienze esatte su chi una volta prese a coltivarle. Il celebre geometra tedesco JACOBI, in una lettera ad ALESSANDRO HUMBOLDT (3), ha genialmente paragonati i matematici ai lotofagi; come chi ha sentita la dolcezza del loto sdegna qualunque altro frutto, così chi ha gustato le investigazioni matematiche mai più riesce a staccarsene. Or come adunque alla regola generale potè sottrarsi GAETANA AGNESI? Forse che le elevate soddisfazioni ad essa concesse e promesse dalla scienza non erano sufficienti a colmare il vuoto che nella sua esistenza produceva la forzata inazione del cuore? O forse le ali omai stanche del suo intelletto non bastavano ai voli d'aquila che da essa aspettavansi? Non affrettiamoci a rispondere a tali domande: indugiamo almeno finchè sia dimostrata fallace la speranza che le biografie di altre donne eminenti ci somministrino efficaci argomenti per deliberare. Osserviamo soltanto come, qualunque sia la risposta, la sorte di GAETANA AGNESI appaia simile al destino dell'alpinista disgraziato che giunto tutto intriso di sangue, estenuato, palpitante al termine di una pericolosa ascensione, crede di avere raggiunta la sospirata mèta; ma, girando attorno ansiosamente lo sguardo, se ne trova invece separato da un abisso profondo, che gli fa perdere la speranza dell'altezza; e rico-

(1) BERTEA, *Vita dell'Abate Francesco Faà di Bruno fondatore del Conservatorio di N. S. del Suffragio in Torino* (Torino 1898).

(2) Ricordo specialmente LUISA ANZOLETTI pel suo bel volume *Maria Gaetana Agnesi* (Milano 1900).

(3) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, T. CI. p. 133.

Digitized by Google

nosce, con tardivo e sterile rimpianto, come un'altra strada più comoda, più breve e scevra di pericoli avrebbe potuto guidarlo sicuramente a raggiungerla.

6. — L'inflessibilità dell'ordine cronologico guida ora dinnanzi a noi una delle figure di donna che, per le doti del cuore e della mente, sono più atte a destare la simpatia e suscitare l'ammirazione: alludo a CAROLINA sorella del celebre GUGLIELMO HERSCHEL (1).

Tutti sanno che la rinomanza di questo, considerato come astronomo, è inferiore forse soltanto a quella di NEWTON; con i portentosi telescopi, di cui insegnò la costruzione e l'uso, egli scandagliò l'immensità del firmamento e sospinse ad una distanza fantastica i limiti del mondo visibile. Ma ciò che forse pochi sanno è qual parte della sua gloria appartenga a sua sorella; dal giorno in cui la chiamò al proprio fianco sino al momento in cui egli scese nel sepolcro, cioè per quaranta lunghi anni, CAROLINA fu per lui un angelo consolatore e custode. Fu dessa che eseguì i calcoli immensi e complicati necessari per trasformare le sue osservazioni in altrettante memorabili scoperte; fu dessa che aggiunse ai rapidi appunti da lui presi, mentre ansiosamente seguiva il corso degli astri in cielo, quanto era necessario affinchè divenissero memorie scientifiche pronte per la stampa; sì considerevole è la somma di lavoro che essa compì sotto la veste oscura di collaboratrice, che coloro i quali erano a parte del segreto si sentivano compresi di commozione e meraviglia e contemplavano quella donna straordinaria «con le ginocchia della mente inchine».

Ma CAROLINA HERSCHEL rappresenta anche una parte brillante di autrice, avendo al proprio attivo la scoperta di otto comete e la compilazione di due preziosi cataloghi, comprendente uno ottocentosessanta stelle osservate dal FLAMSTEED, relativo l'altro ai gruppi di stelle e di nebulose osservate dal fratello: la Società Astronomica di Londra, con l'assegnare solennemente nel 1828 la grande medaglia d'oro al complesso de' suoi lavori, porgeva la più esplicita ed alta constatazione ufficiale alle sue indiscutibili benemerenze scientifiche.

Ora la carriera di CAROLINA HERSCHEL presenta essa pure lo strano, sorprendente fenomeno di un improvviso punto di arresto. Quando, nel 1822, venne a morire GUGLIELMO essa. quantunque disponesse tuttora di vista abbastanza robusta per osservare e di mente sufficientemente lu-

---

(1) La principale fonte di notizie sopra questa egregia donna è il volume *Memoirs and correspondance of Caroline Herschel by Mrs.* JOHN HERSCHEL; ne ho sott'occhio la II ed. stampata a Londra nel 1879.

Digitized by Google

cida per calcolare, malgrado le insistenti esortazioni che le piovevano da ogni parte, abbandonò per sempre l'Osservatorio, teatro delle sue vittorie, diede persino un addio all'Inghilterra, sua patria di adozione, per ritornare in Hannover, ove aveva vista la luce. Ivi, per ventisei anni, durò a riordinare il più recente bottino delle sue peregrinazioni celesti, seguendo con indomabile irritazione e mal dissimulata amarezza gl'incessanti progressi dell'astronomia, che essa considerava come altrettanti postumi furti a danno dell'adorato fratello.

Quest'ultima e meno ammiranda fase dell'esistenza di CAROLINA HERSCHEL non corrisponde per fermo al tipo che noi tutti ci siamo formati per la vita dell'appassionato investigatore, il quale segue con cura amorosa l'incessante perfezionarsi del vasto edificio della scienza, che s'innalza con i secoli a maggior gloria dell'umanità; ma essa fa apparire sotto la sua vera luce l'intimo movente che ebbero tutte le azioni dell'illustre astronoma. CAROLINA HERSCHEL probabilmente non amò mai la scienza per la scienza, ma consacrò ad essa le sue notti insonni, soltanto perchè in tal modo poteva riuscir giovevole al suo amato GUGLIELMO: musicista, quando questi era seguace di Euterpe, divenne astronoma, quando egli rispose all'appello imperioso, che gli veniva da Urania. La vita di essa offre, pertanto, l'esempio di una di quelle forme di sublime e completa abnegazione, di cui soltanto una donna è capace, meglio che una prova di donne nate ad investigare la struttura del cosmo. A differenza di GAETANA AGNESI, per un lungo periodo di tempo essa trovò la maniera di soddisfare nello stesso tempo le esigenze della mente e quelle del cuore. Ma il giorno in cui si spense l'oggetto delle sue cure, scomparve in essa all'improvviso quell'ansia di sapere, che LEONARDO DA VINCI paragonava all'onda che, pure respinta, continua a cozzare negli scogli; il giorno in cui non potè più prosternarsi dinnanzi al nume, a cui aveva elevato un altare, il cielo improvvisamente cessò di esercitare sopra questa povera anima dolente quell'attrazione irresistibile, che esso fa sentire sopra chiunque comprende quale imponente enigma abbia ivi la propria sede.

7. — Simili in ciò a CAROLINA HERSCHEL, TERESA e MADDALENA MANFREDI prestarono ajuti preziosi al loro fratello EUSTACHIO, il distinto direttore della Specola di Bologna. Tutte servirono di eccitamento ed esempio a quelle donne di alti sensi, che si fecero collaboratrici dei loro mariti nell'investigare il corso degli astri; fra le quali mi piace di qui ricordare, a titolo d'onore, le signore LALANDE e FLAMMARION, LADY HUGGINS e la signora PIAZZI SMITH; e come potrei passare sotto silenzio il nome della moglie di YVON VILLARCEAU, i cui meriti scientifici

Digitized by Google

furono dichiarati, con le frasi più lusinghiere (1), in una delle migliori memorie di questo egregio indagatore?

Va ancora notato non essere questi gli unici allori di origine astronomica, che siano stati deposti sopra fronti femminili, « Al tempo di FILIPPO DE LA HIRE — scrive, infatti, GIACOMO LEOPARDI nella sua *Storia dell'Astronomia* (2) — visse la celeberrima MARIA CUNITZ, la quale si applicò con tanto ardore a perfezionare la scienza degli astri, che passava la maggior parte della notte in fare dei calcoli e delle osservazioni, riserbandosi a dormire durante il giorno ». — Poco dopo la Francia stessa produsse ORTENSIA LEPAUTE, abile calcolatrice, che prestò servizi preziosi a CLAIRAUT nel determinare l'orbita della cometa di HALLEY. Nel secolo scorso poi le cultrici dell'astronomia, specie in Inghilterra ed in America, si moltiplicarono a dismisura, anzi alcune raggiunsero una perizia che più di un uomo potrebbe invidiare. Basti ricordare MARIA MITCHELL, della quale fu detto che « seguiva il movimento degli astri, nel meraviglioso simbolismo della formola matematica », e JANET TAYLOR, soprannominata la « MARIA SOMMERVILLE del mondo marino » a cui, nel 1859, un'annua pensione venne accordata dall' illuminata generosità di VITTORIA, Regina d'Inghilterra.

Le osservazioni ed i calcoli, che la scienza del cielo deve alla più gentile metà dell'uman genere, sono omai così numerosi ed importanti, che, scambio di precludere ad essa l'ingresso negli Osservatori astronomici, sarebbe da assicurarle festosa accoglienza; molte misurazioni, che esigono delicatezza e perseveranza, potrebbero venire egregiamente effettuate da donne, con la pazienza ed il tatto che le distingue. Nel secolo attuale, in cui le produzioni individuali si direbbero chiamate a cedere il posto a lavori collettivi, in cui, specialmente nelle scienze sperimentali, le pugne per la conquista della verità sembrano destinate a venire combattute, non da lottatori isolati, ma da coorti disciplinate e concordi, tutti possono arrecare un prezioso contributo di esperienze personali, ed

(1) « Les formules sur lesquelle repose ma méthode ont été l'objet de plusieurs applications numériques qui ont été exécutées par M.me Yvon-Villarceau, après qu'elle en avait elle-même vérifié l'exactitude analytique: la plupart de nos confrères de France et de l'étranger ont pu apprécier le dévouement aux intérêts généraux, et à ceux de la science en particulier, dont elle n'a cessé de donner des preuves; ils comprendront le sentiment qui m'a dicté la dédicace placée en tête de ce mémoire. Il est utile d'augmenter la liste encore peu nombreuse des femmes qui, par leur collaboration active et dévouée, ont contribué aux progrès de la science. Aux noms de M.me Lepaute, de Caroline Herschel et de miss Mitchell, les astronomes ajoutent celui de M.me Yvon-Villarceau ». *Méthode pour calculer les orbites des étoiles doubles, déduite de considérations géométriques* in *Connaissance des temps pour 1877*.

(2) *Opere inedite di Giacomo Leopardi*, T. II (Halle a. S. 1880).

Digitized by Google

alla donna si schiude un vasto e promettente campo di azione. Specialmente in Italia — ove gli studi di astronomia, per ragioni che sarebbe malagevole e qui fuor di luogo di enumerare, non sono oggi coltivati con lo zelo e l'attività presumibili nella patria di GALILEO, dei CASSINI e dello SCHIAPARELLI — un movimento in questo senso andrebbe promosso ed incoraggiato: per l'onore del nostro paese è da augurarsi che qualcuno, dotato di sufficiente autorità e competenza, se ne faccia iniziatore; egli potrebbe far sin d'ora indubbio assegnamento sopra il plauso e la riconoscenza universali.

8. — Narra PLUTARCO, nella sua *Vita di Marcello*, che quando, nel corso della seconda guerra punica, Siracusa, dopo lunga resistenza, cadde nelle mani dei Romani, il duce latino aveva, con ammiranda cortesia, dati ordini severissimi a che fosse rispettata la vita di ARCHIMEDE, il suo nemico più genialmente ed efficacemente pugnace. Ma questi, assorto nelle proprie meditazioni, non si accorse nemmeno della resa della sua patria, ed al legionario, che gli chiedeva l'esser suo, seccamente rispose non turbasse le sue figure; ed il rozzo soldato, ritenendo che il suo interlocutore non fosse colui, la cui esistenza doveva essergli sacra, brutalmente lo spense. Questo aneddoto, ripetuto dal MONTUCLA nella sua *Storia delle Matematiche*, fece un'impressione profonda, indelebile, decisiva sopra una fanciulla francese, che lo lesse, tredicenne, nel momento in cui la rivoluzione, che scoppiava da ogni parte, faceva presentire non lontana l'epoca del terrore. Per SOFIA GERMAIN (1) quella lettura segnò una data dell'esistenza, chè da quell'istante essa fu tocca dalla fiamma destinata ad arderla sino alla morte; da quel giorno essa fece proponimento di dedicarsi tutta alla geometria, a questa scienza da cui nulla può distrarre, nemmeno una minaccia di morte, a questa scienza che sembrava assicurare la pace, anche nelle epoche più agitate.

L'impegno che SOFIA GERMAIN prese con sè stessa, venne puntualmente mantenuto; alla matematica essa consacrò le sue lunghe veglie e non tardò a divenirvi eccellente. La corrispondenza pseudonima da essa tenuta con GAUSS, il « princeps mathematicorum » dei Tedeschi, la pongono alla testa di coloro che seppero misurare l'inestimabile valore e familiarizzarsi col maneggio dei metodi delicati e potenti, con cui quell'immortale analista collocò sopra nuove e solide basi l'aritmetica superiore. E gli sforzi ripetuti da essa fatti per risolvere un'importante questione che, dietro consiglio di NAPOLEONE I, era stata posta a concorso

(1) Cfr. *Oeuvres philosophiques de* SOPHIE GERMAIN suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une *Notice sur sa vie et ses oeuvres* par H. STUPUY (Paris 1879).

Digitized by Google

dall'Istituto di Francia, dimostrano una straordinaria perseveranza, una singolare tenacia, piuttosto che un'eccezionale abilità analitica, giacchè l'intento proposto, di assidere sopra fondamenti scientifici la teoria delle superficie elastiche, sembra forse avvicinato, ma non ancora raggiunto.

Timida e modesta, atterrita quasi dal rumore che erasi fatto intorno al suo nome, SOFIA GERMAIN vietò a sguardi indiscreti di penetrare nel santuario dei suoi affetti, nell'intimità della sua vita; è noto soltanto che nella matematica e nella filosofia essa trovò sollievo e conforto ad un morbo che ne minava l'esistenza e che la trasse immatura alla tomba. Se i matematici sono tuttora riluttanti ad assegnarle un posto fra i Corifei delle scienze esatte nel Secolo XIX, molti filosofi non esistano a collocarla fra i precursori di AUGUSTO COMTE (1); quale onore per una donna! quale gloria di avere un posto nei fasti di quella scienza ove Mantova, con orgoglio di madre, vede campeggiare il nome venerato e caro di ROBERTO ARDIGÒ.

9. — Con la figura un po' scialba di SOFIA GERMAIN forma uno stridente contrasto quella rutilante dell'altra donna emergente dalla numerosa schiera di matematiche, che produsse il secolo passato; la vita tranquilla della pensatrice francese sembra ancora più scolorita se paragonata al romanzo di cui fu protagonista SOFIA KOVALEWSKI, l'illustre professoressa di Analisi superiore dell'Università di Stoccolma (1).

Appartenente alla nobile famigia KROUKOWSKI, in conseguenza tarda discendente di MATTIA CORVINO, l'eroe dell'Ungheria, la sua adolescenza cadde nel periodo in cui il soffio liberale, che scuoteva dalle fondamenta l'impero degli czar, faceva andare in effervescenza tutta la gioventù e rendeva, si può dire in tutte le famiglie, fredde ed estremamente tese le relazioni fra genitori e figli; la profonda scissione esistente fra giovani e vecchi era anzi, intorno al 1870, la grande questione che agitava gli strati più intelligenti della società russa. I figli, anelando a misurarsi coi loro coetanei di altri paesi, a gettarsi nell'arringo letterario e scientifico, o almeno a procacciarsi quell'istruzione elevata e moderna, che i pallidi autocrati prudentemente negavano agli ardenti loro sudditi, si appigliarono al partito di emigrare in massa. Tale movimento dei giovani russi non tardò a destare l'emulazione delle loro sorelle, le quali, non riuscendo a strappare ai loro parenti un « passaporto per l'estero », pur di raggiungere il loro scopo, escogitarono un sistema che,

(1) M. SIMON, *Sophie Germain* (Mathem. Abhandl. H. A. Schwarz gewidmet; Berlin 1914) (1935).

(2) Ho attinto specialmente ai *Souvenirs d'enfance de* SOPHIE KOVALEWSKY, *écrits par elle même et suivis de sa Biographie par* M.me A. CH. LEFFER (Nouvelle èdition, Paris, 1895).

Digitized by Google

comunque venga giudicato dalla morale, deve ritenersi per originalità a nessuno secondo, vale a dire il sistema dei « matrimoni fittizi ». Quando, cioé, una signorina di buona famiglia desiderava, contro la volontà dei propri genitori, di continuare i propri studi in qualche università straniera, cercava un giovane suo compagno di fede, il quale fosse disposto ad impalmarla, coll'esplicita intesa che, compiuta la cerimonia nuziale, i due sposi avrebbero riacquistata intera la loro libertà ed eventualmente avrebbero passata tutta la loro vita estranei l'uno all'altra.

A questo curioso procedimento, anzi ad uno ancora più raffinato, ricorse la figlia minore del generale KROUKOWSKY per poter uscire dall' avito castello di Palibino. Alcuni fogli di un vecchio trattato di calcolo dell'OSTROGRADSKI, con cui erano tappezzate le pareti della sua stanza di bimba, avevano vivamente impressionata la sua fantasia col loro aspetto strano ed avevano eccitata la sua curiosità col fascino di un enigma; l'impronta, che la contemplazione di essi lasciò nella sua mente giovinetta, mai più si cancellò e fece sorgere, sviluppare e manifestare una vocazione, che parve irresistibile. Appunto per seguirne i dettami, SOFIA KROUKOWSKY decise di sfondare la porta che le sbarrava la strada. E trovato in VLADIMIRO KOVALEWSKI un collaboratore di buona volontà, potè, appena diciottenne, dare un addio a parenti ed amici e recarsi ad Heidelberg, unica università tedesca in cui allora avevano accesso le donne. Ivi, durante il semestre estivo dell'anno 1869-70, essa seguì assiduamente le lezioni di matematica, mentre il marito frequentava quelle di paleontologia; ma nei semestri successivi troviamo VLADIMIRO successivamente a Jena ed a Monaco e SOFIA, a partire dal 1870, a Berlino. Qui essa riuscì a interessare tanto il capo della scuola analitica tedesca — CARLO WEIERSTRASS — da indurlo ad impartirle privatamente quelle lezioni, che i rigidi e compassati regolamenti universitari prussiani vietavangli di darle in pubblico. Da questo momento SOFIA KOVALEWSKI acquista l'invidiabile posizione di allieva favorita del WEIERSTRASS; ad essa egli comunica confidenzialmente le proprie idee, tuttora in gestazione; ad essa egli affida il còmpito di pubblicare, di svolgere, di applicare a nuove questioni i metodi che egli andava maturando. Sicchè la giovane matematica divenne allora, e tale rimase, l'espositrice più degna di fede, la commentatrice per eccellenza del sommo maestro di Berlino. A provarlo basti dire che esistono alcuni cospicui ritrovati del WEIERSTRASS, per conoscere i quali fa mestieri ricorrere per informazioni agli scritti della KOVALEWSKI.

10. — Tale fatto — che rende tanto difficile il valutare con esattezza l'originalità e la forza intellettuale della pensatrice di cui stiamo delineando il profilo — è simile ad altri che offre la carriera scientifica

Digitized by Google

di tutte le donne matematiche a noi note. Come, presumibilmente, IPAZIA ebbe per guida il proprio padre che fu uno dei più distinti geometri dell'età sua; come EMILIA DE CHÂTELET subì successivamente l'influenza di VOLTAIRE, di CLAIRAUT e di MAUPERTUIS; così alle *Instituzioni analitiche* della AGNESI collaborarono il P. RAMPINELLI e JACOPO RICCATI, e SOFIA GERMAIN fu sorretta ne' suoi studi aritmetici da GAUSS ed in quelli fisico-matematici da LEGENDRE e POISSON; da ultimo, quale e quanta parte non ebbe GUGLIELMO HERSCHEL nell'opera scientifica della sorella CAROLINA?... Mentre, pertanto, per i matematici il periodo del noviziato è transitorio, tanto che in molti giovani è visibile l'impazienza di emanciparsi da ogni scolastica soggezione, di liberarsi da tutto che possa menomare la completa libertà, si direbbe che la donna, negli studi più ardui, mai cessi di essere scolara; che da larva possa bensì raggiungere lo stato di crisalide, ma le siano vietati i liberi voli della farfalla.

Questa osservazione, benchè da nuovi fatti attenda la promozione da congettura a legge, non andava taciuta, perchè sembra projettare qualche sprazzo di luce negli abissi inesplorati della psiche femminile. Essa ne fece abbandonare la nostra eroina, alla quale ci affrettiamo a fare ritorno, per rilevare come nel 1874 essa conseguisse a Gottinga la laurea dottorale, dietro presentazione di tre memorie di tal valore da ottenerle la dispensa della regolamentare prova orale. Dopo un breve periodo — durante il quale fu compagna fedele e consigliera illuminata del proprio marito, divenuto frattanto professore a Mosca — essa riprende bentosto la vita randagia, quando egli, subendo un influsso malefico, si abbandonò a speculazioni pazze, che lo trassero alla rovina economica ed al suicidio. Allora, grazie al potente ajuto prestatole dal MITTAG LEFFLER, essa riuscì a vincere un'opposizione sistematica ed ottenere nell'Università di Stoccolma prima la carica di docente libera e poi il posto più eccelso nella gerarchia scolastica.

Ma ben altri trionfi stavano per esserle decretati!

Il 24 Dicembre 1888 l'Istituto di Francia solennemente accordava il premio BORDIN alla memoria da essa presentata per rispondere ad un quesito di alta meccanica (1), proposto da quell'eccelso sodalizio. Benchè ci sia impossibile determinare l'entità dei contributi dati a quel lavoro dal WEIERSTRASS, che ne aveva fatta una previa revisione (2), nè quanto abbia contribuito alla vittoria l'essere noto ai giudici da qual penna uscisse il lavoro anonimo ad essi sottoposto (3), pure è indiscutibile

(1) « Perfezionare in qualche punto importante la teoria del movimento di un solido».
(2) *Souvenirs* citati p. 295.
(3) Id. p. 297.

Digitized by Google

che in quel giorno memorabile la fronte di SOFIA KOVALEWSKI fu baciata dalla gloria; essa si assise allora all'ideal banchetto degli eletti e venne annoverata fra i miliardari dell'intelligenza. La giovane che, molti anni prima, a Londra, nel salotto di GEORGE ELLIOT, con logica serrata aveva sostenuto, contro ERBERTO SPENCER, l'attitudine della donna alla ricerca scientifica (1), aveva ben il diritto di ritenere di avere offerto in sè stessa un argomento irrefragabile a sostegno della propria tesi.

Se non che la trionfatrice di quell'ora, nel momento stesso in cui veniva esaltata, scriveva ad un'amico: «Da ogni parte mi giungono lettere di congratulazione, e, per una strana ironia della sorte, mai io mi sono sentita altrettanto infelice. Infelice come un cane. No, io spero pei cani che essi non sieno mai così infelici come possono esserlo gli uomini, e sopratutto la donne» (2). Gli è che in quell'ora di creduto tripudio, SOFIA KOVALEWSKI ebbe la lucida percezione dell'essere la sua gloria non altro che il lutto abbagliante della sua felicità. Come per CORINNA, l'eroina di M.me DE STAËL, l'opera della mente frapponevasi, ostacolo insuperabile, fra essa e l'uomo che avrebbe voluto farla tutta sua; sicchè essa malinconicamente esclamava: «Nel gran banchetto della vita il servizio dev'essere fatto assai male, dal momento che ciascun convitato sembra ricevere la porzione destinata ad un altro» (3).

A giudicare con severità così amara il proprio destino SOFIA KOVALEWSKI fu indotta probabilmente, non soltanto dalle mancate soddisfazioni sentimentali, ma anche da un'altra cagione, tacendo la quale si verrebbe a trascurare un elemento prezioso per chiarire la questione che ci siamo proposti.

Chiunque abbia letto il *Giornale* di MICHELET ricorderà quella pagina in cui il sommo storico-poeta commosso scriveva: « Jeri, risolvendo il mio primo problema d'algebra, ho sentito intensamente quel piacere, di cui parla FONTENELLE, che fa *sorridere l'anima* » E tutti quelli, che si sono occupati con amore di matematica, ben sanno come in queste parole non vi sia esagerazione alcuna, nessuna gioia essendo maggiore di quella che produce la scoperta di una verità certa, indiscutibile, eterna: è quella gioia che inebriava di santo entusiasmo KEPLERO, quando licenziava la sua opera immortale, con parole suonanti come un inno all'Architetto dell'Universo ed a sè stesso che ne aveva compreso il disegno; è quella gioia, il cui ricordo indelebile guidava la mano di GIU-

(1) A. C. LEFFLER, *Sonia Kovalewski* (Annali di Matematica, II Serie, T. XIX 1891).
(2) *Souvenirs* p. 301.
(3) Ivi p. 298.

Digitized by Google

STO BELLAVITIS, quando, ottantenne, dettava la propria epigrafe, nella quale, dopo di avere con modesta alterezza rammentata la più cospicua delle proprie scoperte, aggiungeva *visse felice*. Orbene, questa soddisfazione sublime — dalla quale in massima parte proviene il fascino esercitato dalle scienze esatte sopra i loro cultori — sembra sia rimasta totalmente ignota a SOFIA KOVALEWSKI. «Questa assenza di gioia», assicura una delle sue più intime amiche, «fu per SOFIA una sofferenza annessa al suo lavoro scientifico (1)». Persino nel periodo eroico della sua vita matematica, quando cioè componeva la memoria destinata a ricevere poi il premio BORDIN, confessava di lavorare «senza piacere e senza entusiasmo» (2). Con foga giovanile essa infilò al galoppo la strada che guida alla scienza, ma la sua sete di sapere fu tosto soddisfatta (3); essa, che ebbe tutte le velleità ribelli della giovinezza più audace, nell'età matura dichiarava, mortificata e compunta, che «una donna insegnante matematica è una mostruosità inutile e ripugnante (4)»; e giungeva al punto di scagliare l'anatema contro i lavori scientifici, che, bestemmiando, asseriva non far progredire di un passo l'umanità!

L'accorante spettacolo offerto da questa donna, che natura aveva colmata de' suoi favori e che un lavoro, forse disadatto e certamente eccessivo, rese irritabile e disgraziata; di questa donna che a trent'un anno trovava la vita già troppo lunga e che, trentasettenne, esaurita si spense, può e deve servire di salutare ammonimento per le giovani inesperte che, seguendo i suggerimenti di una vocazione reale od apparente, sono propense ad eleggere la matematica come propria occupazione professionale e scientifica; misurino esse più e più volte, prima di prendere una deliberazione così importante, se dispongono di vigoria sufficiente per sopportare durante la loro vita le gravi fatiche che aspettano coloro che aspirano a seguire le orme gloriose di EUCLIDE.

Il paragone di un'esistenza profondamente agitata e cosparsa di speranze infrante, quale è quella di SOFIA KOVALEWSKI, con la vita di tante donne benedette e adorate, le quali nel seno della famiglia, o percorrendo strade meno ardue e pericolose, conseguirono quella pace che ad essa venne perennemente negata e che con tanta parsimonia fu concessa alle donne illustri di cui tratteggiai la biografia, induce a doman-

(1) *Souvenirs* p. 197.
(2) Ivi p. 291.
(3) Ivi p. 207.
(4) Ivi p. 239.

Digitized by Google

darsi se la riga, il compasso e le tavole dei logaritmi non siano per avventura strumenti troppo gravi per braccia femminili. Quel paragone rievoca il ricordo della graziosa leggenda che GABRIELE D'ANNUNZIO fa narrare alla Sirenetta nella sua *Gioconda*. La ricordate, Signore? . . . C'erano una volta sette sorelle:

La prima per filare
e voleva i fusi d'oro;
la seconda per tramare
e voleva le spole d'oro;
la terza per cucire
e voleva gli aghi d'oro;
la quarta per imbandire
e voleva le coppe d'oro;
la quinta per dormire
e voleva le coltri d'oro;
la sesta per sognare
e voleva i sogni d'oro;
l'ultima per cantare
per cantare solamente
e non voleva niente.

Ora
. . . la prima filò
torcendo il suo fuso e il suo cuore,
e la seconda tramò
una tela di dolore,
e la terza cucì
una camicia attossicata,
e la quarta imbandì
una mensa affatturata,
e la quinta dormì
nella coltre della morte,
e la sesta sognò
nelle braccia della morte.
. . . . . .
Ma l'ultima che cantò
per cantare per cantare
per cantare solamente
ebbe la sorte bella.

12. — Giunto ormai al termine di questa pur che sia rassegna di medaglioni muliebri, io, che ebbi l'onore altissimo, quanto immeritato, di servirvi da cicerone, sento imperioso più assai il bisogno di chiedervi l'obolo dell' indulgenza Vostra, se non mi mostrai all'altezza del còmpito assunto, che di fare esplicite dichiarazioni riguardo a ciò che io ritengo si possa ragionevolmente attendere dalle donne, che imprendono

Digitized by Google

a coltivare le matematiche, troppi essendo i dubbi a piú riprese manifestati sulle legittimità di rosee speranze.

E come, infatti, è possibile non ne nutra chi osserva come le donne le quali pur lasciarono un'impronta nella storia della geometria, dopo di avere abbracciata tale carriera con irrefrenabile ardore e con piena fiducia nelle proprie forze, abbiano poi sentito costantemente la necessità di essere sorrette e guidate da un padre, da un fratello, o da un maestro (1), e, dopo di avere accresciuto il patrimonio intellettuale dell'umanità con lavori di discutibile originalità, abbiano lasciati gli studi disgustate o stanche, sfiduciate od esauste?... Io ho seguito, nella storia e nella vita, con curiosità pensosa lo svolgersi di certe fioriture, che sembravano indizio di stupende facoltà latenti; ma l'esame spassionato dei frutti che ne seguirono non valse a trasfondere in me la certezza che alla donna fossero aperte tutte le vie; al contrario fece sorgere nell'animo mio il convincimento che essa deve guardare la matematica con la devota, quasi religiosa ammirazione con cui si contempla una cima irraggiungibile.

In conseguenza, mentre per indole, per principii, per convinzione io sono in generale propenso ad aprire a due battenti le porte del santuario delle scienze esatte a chiunque intenda oltrepassarne la soglia, con rammarico sono astretto ad essere assai riserbato nell'incoraggiare ad accedervi chi la provvida Natura sembra chiamare ad altri destini. Perciò io ora mi trovo in quel penoso stato, pieno di dolorose contraddizioni di chi abborre le conseguenze inevitabili delle premesse da cui non riesce ad emanciparsi. Ciò non ostante, se le mie parole avranno la virtù di indurre qualcuno a ritrarre il piede da un cammino irto di triboli e spine ed incapace di guidare all'agognata felicità, avrò ragione per rallegrarmi di non avere saputo resistere all'invito lusinghiero e gentile che dal diletto loco natio mi giunse per bocca del nostro Illustre Presidente. Che se poi qualche diligente archeologo delle età venture, frugando negli *Atti* di questa nostra Accademia e paragonando le mie riservate previsioni con i progressi compiuti dalle matematiche per mano di donna ne' secoli seguenti il XIX, troverà buoni argomenti per accusarmi di essere stato uomo di poca fede e falso profeta, le mie ossa, da tempo giacenti nel sepolcro, fremeranno di gioia, quasi per aderire e partecipare a questi nuovi augurati trionfi dell'« eterno femminino »(2).

---

(1) A ulteriore conferma di quest'asserzione riporto il seguente passo della già citata biografia di S. KOVALEWSKY: « aussi ce qu'elle produit en mathématiques, le fait elle sous l'influence d'une autre personnalité; même pour ses cours il ne sont vraiement bons, que lorsque Gustave [Mittag-Leffler] est présent » (*Souvenirs* cit. pagina 275).

(2) Molti mesi dopo che la presente lettura era stata pensata, scritta, pronunziata

Digitized by Google

stampata, io ebbi occasione di conoscere e studiare l'interessante opera *Ueber die Anlage zur Mathematik* (Leipzig, 1900) di un medico — P. I. MÖBIUS — il cui nonno fu un celebre matematico a tutti noto. Delle donne cultrici delle scienze esatte è ivi parlato soltanto di sfuggita; ma il giudizio su di esse pronunziato concorda sostanzialmente col nostro, come emerge dal brano di cui diamo qui la traduzione, ad ulteriore conferma della tesi da noi sostenuta:

« Si può dunque dire, che una donna matematica sia contro natura, in certo senso sia un ermafrodito. Accade una cosa analoga a ciò che notasi per altre attitudini. Donne dotte ed artiste sono prodotti di degenerazione. Soltanto in forza di deviazione dalla specie, in forza di variazioni patologiche la donna può acquistare qualità diverse da quelle che la rendono amante e madre. Bisogna dunque aspettarsi che nelle donne d'ingegno esistano ancora altre deviazioni. E' noto che le così dette donne intellettuali sembrano di solito uomini travestiti. Si pensi ad es. a Rosa Bonheur, il cui ritratto venne in questi ultimi tempi tanto spesso riprodotto. Delle donne matematiche, specialmente Sofia Germain, ha l'aspetto maschile. La Kovalewsky prova che nella donna difficilmente possano accoppiarsi ingegno e salute. Essa era nervosa in sommo grado e le indisposizioni di cui soffriva la resero precocemente vecchia ed ammalata. La Germain era un'originale di buona specie. La Châtelet, nella sua spudoratezza, rappresenta il più brutto tipo di degenerata. Quella di cui si può dire il maggior bene è forse Carolina Herschel; essa era di natura femminile, sana e virtuosa, e raggiunse un'età assai avanzata. Ma in generale sulla vita delle donne matematiche si conosce troppo poco per poter giudicare quanto vi fosse in esse di patologico.

E' un'esagerazione il parlare di genio matematico nella donna. Nessuno dubiterà che la matematica si sarebbe svolta altrettanto felicemente anche se non fossero vissute le donne matematiche, che enumerammo. Nessuna ha somministrato qualche cosa di essenziale, nessuna ha concepiti nuovi metodi. Furono buone scolare, nulla più. La biografia della Kovalewsky lo dimostra chiaramente, giacchè tutto il suo lavoro si ridusse a svolgere idee di Weierstrass. Carolina Herschel fu il fido assistente del proprio fratello; morto lui, abbandonò la scienza. La più originale sembra sia stata la Germain » (p. 85-86).

XXXI.

LE TRADIZIONI MATEMATICHE DELL'ITALIA

Discorso inaugurale della Sezione storica del IV Congresso internazionale dei matematici (Roma, 1908).

1. — Solevano i nostri proavi nei giorni di maggiore letizia, in tutte le ricorrenze per qualche ragione memorabili, negli anniversari di date gloriose radunarsi a ricordare i nomi e i fatti più famosi della loro storia, non mossi da un sentimento di « misero orgoglio di un tempo che fu », ma col nobile scopo di tributare una giusta riconoscenza a chi aveva illustrata la patria. In tali circostanze gli elmi e le corazze che già protessero gli eroi più illustri, le lancie e le spade che essi maneggiarono

Digitized by Google

da valorosi, tutti i preziosi cimeli religiosamente conservati, solevano venir tolti dei reliquari ed esposti alla venerazione universale, con la ferma fede che lo spettacolo del culto generale tributato a gloriosi defunti avesse il magico potere di far risorgere l'antica virtù in giovani petti.

A tale costumanza, inspirata da sensi elevati di filiale gratitudine, sia concesso a me d'uniformarmi in questo giorno che l'Italia segna « albo lapillo », in cui per la prima volta Roma accoglie e festeggia i matematici di tutto il mondo, qui convenuti per dare una novella conferma dell'essere la scienza UNA come la verità. E, nel mentre porgo il più cordiale « benvenuto » a tutti coloro che ebbero il volere ed il potere di accettare il nostro invito, mentre volgo un affettuoso pensiero al Nestore degli storici della matematica (1), che non osò affrontare i disagi di un lungo viaggio, mentre con memore cuore penso ad un altro nostro illustre compagno di lavoro (2), cui il gelido tocco dell'ala della morte vietò di venir qui ad aiutarci col suo autorevole consiglio; chiedo siami permesso di presentare alla Sezione un primo saggio degli studi da me istituiti da molto tempo nell'intento di proseguire l'opera magistrale di GUGLIELMO LIBRI, evocando il ricordo delle persone e delle opere grazie a cui la mia patria, malgrado condizioni politiche incessantemente variabili, ma sempre tristissime, riuscì a serbar sempre accesa e risplendente la face della ricerca della matematica.

2. — Non crediate però, Signori, che io, lasciandomi trascinare dall'entusiasmo pel mio tema o da vanagloria nazionale, faccia risalire le origini della matematica italiana ad ARCHITA TARANTINO e ARCHIMEDE SIRACUSANO; non lo farò — malgrado l'esempio datomi da un illustre storico della nostra letteratura (3) — perchè l'Italia meridionale e la Sicilia, non solo furono sedi di fiorenti colonie ellèniche, ma erano abitate da popolazioni la cui intima affinità con i Greci è, a tacer d'altro, dimostrata dalla lingua che esse parlavano, la quale si accosta assai più al sacro idioma dell'Ellade che ai dialetti usati nel resto d'Italia.

D'altronde chi ignora la nessuna parentela intellettuale fra il popolo greco e quello di cui l'itala gente è la continuatrice diretta? Se in filosofia la Grecia divenne ad un tempo suddita e maestra di Roma, in matematica dominatori e schiavi rimasero totalmente estranei gli uni agli altri; sicchè i Romani, paghi di avere al loro servizio agrimensori capaci di misurare le terre conquistate ed architetti in grado di eternare nel

(1) M. CANTOR.
(2) P. TANNERY.
(3) Alludesi qui al TIRABOSCHI.

Digitized by Google

marmo la gloria delle loro armi, superbi di aver saputo compiere la riforma del calendario, limitavansi a dichiarare per bocca di CASSIODORO «tolle saeculo computum; et omnia ignorantia caeca complectitur» (1), ma riguardavano come sterili fantasticherie le opere immortali dei grandi geometri della Grecia. Lungi dall'adoperarsi a prolungare od almeno spianare le vie aperte da ARCHIMEDE ed APOLLONIO, sembra che essi siansi proposti il non nobile còmpito di stendere il velo dell'oblio su quanto questi avevano prodotto, elevando un argine granitico contro il quale l'onda fresca e limpida dell'antico sapere matematico dovette fatalmente frangersi; e gli è soltanto quando, sotto la pressione e gli urti ripetuti delle nuove generazioni, quell'argine malaugurato crollò, che gli *Elementi* di EUCLIDE cessarono di essere, come erano stati durante la dominazione romana, il libro dei sette suggelli.

Ecco perchè noi Italiani andiamo bensì superbi di proclamarci discepoli di ARCHIMEDE, ma non ci sentiamo di accampare diritti ad esserne considerati gli eredi legittimi, gli unici continuatori, riconoscendo onestamente che come tali possono, al pari di noi, riguardarsi tutti i popoli presso cui la Geometria è tenuta nel debito onore.

3. — Escluso che la grande famiglia dei matematici italiani abbia avute le proprie origini a Taranto, a Siracusa o qui in Roma, ne consegue la necessità di farla cominciare in quel periodo di seconda giovinezza dell'umanità, in cui, al diradarsi della caligine medioevale, tramontava per sempre l'impero della forza e dell'ignoranza. Del resto sette secoli di storia sempre onorevole e spesso gloriosa non son forse sufficienti a rendere illustre una famiglia, anche se come capo-stipite di essa sta, non un guerriero onusto di allori conquistati alle Crociate, ma un modesto mercante, il quale, essendosi convinto nel corso de' suoi viaggi in Oriente, che «l'aritmetica pitagorica a confronto dell'Indiana è un delirio», giudicò suo dovere di recare in patria, non solo stoffe variopinte ed inebbrianti profumi, ma una cosa ben più preziosa, l'arte del conteggio?...

Col *Liber Abaci*, pubblicato nel 1202 dal Pisano LEONARDO FIBONACCI comincia la letteratura matematica italiana. Esso riuscì a diffondere in tutta Europa, non soltanto l'Aritmetica decimale, ma anche i fondamenti dell'Algebra; sicchè la mia patria — come, verso il 1000, per merito di GUIDO d'Arezzo aveva cominciato a divenir maestra nell'arte del canto; come con PLATONE Tiburtino traduttore d'ALBATEGNO, aveva additato all'Europa quale doviziosa fonte di sapere fossero le opere arabe; come con GHERARDO CREMONESE, traduttore dell'*Almagesto*, aveva comin-

(1) *De artibus ac disciplinis lib. litt.* (ed. Garettii, p. 578).

Digitized by Google

ciato a richiamare l'attenzione degli studiosi sulla scienza greca — con LEONARDO PISANO somministrava un ausilio di inesauribile potenza tanto alla ricerca matematica quanto alle transazioni commerciali.

Né a ciò si limitano le benemerenze di LEONARDO PISANO; chè con la sua *Practica geometriae* egli ha dato l'esempio di una ripresa della ricerca geometrica e con il suo *Liber quadratorum* « scoprì » (per dirla con le parole immaginose di un Orientale (1)) « nuovi porti e terre nuove nel pelago immenso diofanteo ». Venute, grazie alla illuminata munificenza di BALDASSARE BONCOMPAGNI, le opere del FIBONACCI in dominio di tutti, i moderni vi ravvisarono i germi della teoria delle frazioni continue ascendenti, misurarono i pregi della serie numerica che oggi porta appunto il nome dell'illustre PISANO e vi trovarono occasione e stimolo ad importanti investigazioni di aritmetica superiore (2).

Chi ha presente la rapidità con cui ai dì nostri tutte le idee vengono conosciute, accolte, assimilate e svolte, sarà indotto a supporre che LEONARDO sia stato capo di una schiera d'investigatori intenti ad applicare e diffondere le nuove idee di cui egli erasi fatto messaggiero. Ma chi considera le condizioni politiche ed intellettuali dell'epoca di LEONARDO, non si stupirà se non meno di tre secoli abbiano dovuto trascorrere prima che l'Italia vedesse nascere chi fosse degno di raccoglierne e sapientemente amministrare la pingue eredità; tre secoli — il Trecento, il Quattrocento, il Cinquecento — che occupano un posto cospicuo nella storia generale della cultura, ma in cui l'umanità fu assorbita da cure ben diverse dalla ricerca matematica.

4. — Ed invero la gloriosa epoca dei Comuni fu un periodo in cui l'arte occupò tutte le menti e infiammò tutti i cuori; appunto allora DANTE, PETRARCA e BOCCACCIO elevarono il volgare eloquio alla dignità di lingua, facendogli raggiungere una purezza ed una perfezione che i posteri cercarono indarno di accrescere. D'altra parte, gli è nella seconda metà del Trecento che GIOTTO iniziava la fulgida serie di pittori ed architetti a cui l'Italia è debitrice del suo incontrastabile primato in quelle che SETTEMBRINI chiamava « arti mute », serie che doveva poco dopo annoverare il BRUNELLESCHI, MICHELANGELO e RAFFAELLO, LEON BATTISTA ALBERTI e LEONARDO DA VINCI ognuno dei quali, non solo vergò sulla tela o nel marmo una nuova strofe dell'eterno inno ispirato all'umanità dalla contemplazione del Bello, ma collaborò alla

(1) ABULFARAGIO, citato da G. B. GUGLIELMINI nel suo *Elogio di Leonardo Pisano.* (Bologna 1813).

(2) Cfr. le *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure* pubblicate da E. LUCAS nel t. X (1877) del Bullettino di bibliogr. e storia ecc.

Digitized by Google

redazione delle leggi razionali della prospettiva, per apprendere le quali ALBERTO DURERO intraprese uno dei suoi viaggi in Italia.

A tale periodo d'intensa produzione artistica originale segue un non breve lasso di tempo in cui l'Italia, travagliata da guerre sanguinose e da discordie intestine, quasi sentisse orrore e ribrezzo pel mondo presente, si volse allo studio del passato. « Lo scoprimento di un libro » (osserva uno storico reputatissimo) (1) « per poco non si rimirò come la conquista di un regno. I viaggi a tal fine intrapresi, le liti e le inimicizie nate per occasione de' codici, ci fan vedere fin dove possa giungere l'amor della gloria, e un'emulazione ch'è lodevole, finchè si contiene entro giusti confini e non passa a divenir fanatismo . . . Quasi tutti gli autori classici ritrovati furono in Italia, o, se altrove, dagl'Italiani; quasi tutti furono col confronto di vari codici dagli Italiani emendati come allor poteasi meglio; quasi tutti furono per la prima volta pubblicati in Italia; e in Italia, prima che altrove, si videro quelle copiose e splendide biblioteche che sono anche al presente oggetto di meraviglia a chi le rimira ».

A questo movimento generale degli spiriti, che nella storia va notoriamente sotto il nome di Umanesimo, non rimasero spettatori indifferenti coloro che s'interessavano alle scienze esatte. A convincersene basta ricordare le traduzioni di antichi matematici greci compiute presso di noi nel Cinquecento: EUCLIDE edito dallo ZAMBERTI, PROCLO da FRANCESCO BAROZZI, ERONE da BERNARDINO BALDI. Ma coloro che riuscirono sopra tutti eccellenti in siffatti lavori, sono FRANCESCO MAUROLICO e FEDERICO COMMANDINO, i quali, col riporre in circolazione idee e metodi ingiustamente dimenticati, col facilitarne l'intelligenza mediante geniali commenti e nuove applicazioni, fecero scorrere nuovi torrenti di sangue caldo per le membra intorpidite della Geometria.

A tali brillanti prove di ben intesa attività intellettuale vanno aggiunte quelle somministrate dal moltiplicarsi e fiorire delle nostre Università, la cui rinomanza fu tale che, dopo il Rinascimento, l'Italia divenne l'agognata mèta dei pellegrinaggi delle personalità più cospicue. Già fin da prima che nascesse LEONARDO FIBONACCI, IRNERIO aveva gettato basi indistruttibili alla fama dell'Archiginnasio bolognese e le autorità successivamente preposte a quel grande istituto si adoperarono e riuscirono a continuarne ininterrottamente le tradizioni gloriose; e quale altra scuola può competere con una che vide fra i propri discepoli NICOLÒ COPERNICO, che, appunto mentre era scolaro a Bologna,

(1) TIRABOSCHI, *Storia della letteratura italiana*, t. VI, (Venezia, 1795) p. 108.

Digitized by Google

con l'amica e fedele scorta di DOMENICO MARIA NOVARA, iniziò quegli studi sul corso degli astri che dovevano determinare la rovina del sistema tolemaico (1) e dall'insegnamento del celebre ellenista ANTONIO URCEO trasse quella familiarità col greco che gli permise di penetrare nell'intimo del concetto che gli antichi si erano formati della struttura del cosmo? . . .

Con Bologna dividono la gloria di avere annoverato fra i propri alunni il padre della moderna astronomia, gli « Studi » di Ferrara e Padova; quello destinato a condurre una vita stentata e tribolata fra due vicini ultrapotenti, questo (2) che, dopo avere contato fra i propri maestri personalità eminenti quali PIETRO D'ABANO, BIAGIO PELACANI e PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, accolse nel collegio dei propri insegnanti stranieri illustri quali GIORGIO PEURBACH ed il Regiomontano (GIOVANNI MÜLLER); coll'ammetterveli i Riformatori di quel celebre studio precorsero i loro tempi, giacché affermarono, sotto la forma più solenne, come la scienza non conosca confini politici o distinzioni di nazionalità.

5. — Al pari di certi corsi d'acqua che, ad un tratto, diffondendosi in un vasto terreno paludoso, sembrano, a chi li contempla da lungi, aver perduto per sempre aspetto e dignità di fiume, mentre poi, più innanzi, radunate le acque disperse riprendono il loro corso vivace e giocondo; così delle dottrine aritmetiche e geometriche di cui LEONARDO PISANO si fece e fu apostolo, per circa tre secoli si perdono traccie sicure. La storia ha bensì scritti nelle sue pagine i nomi di PAOLO DAGOMARI (3) (la cui singolare perizia nell'arte del calcolo, anche se non fosse stata eternata dal BOCCACCIO, risulterebbe dal sopranome « dell'abaco » conferitogli dai contemporanei), di BIAGIO DA PARMA, di RAFFAELE CANACCI, e di altri minori; ma l'esatta determinazione dell'opera da essi compiuta, nonchè l'eventuale scoperta di altri che ebber sino ad oggi la sorte nemica, è un problema tuttora insoluto, a cui gli studiosi dovrebbero affrettarsi a dedicare le loro fatiche. La storia ricorda invece come, dopo la metà del secolo XV, il *Liber abaci,* minacciato di venir sepolto in un eterno oblio, sia stato surrogato da un'altra opera egregia, dovuta ad un monaco che scrisse circa nel momento in

(1) Cfr. alcune significanti parole del RETICO riferite dal TIRABOSCHI, op. cit., T. VI, p. 367.

(2) A. FAVARO, *Le matematiche nello studio di Padova dal principio del secolo XI alla fine del XVI* (Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova t. IX, Parte I, 1880, pp. 1-91); *Galileo Galilei e lo studio di Padova* (t. I, Firenze, 1883, Cap. IV); *Die Hochschule Padua zur Zeit des Coppernicus* (Thorn, 1881); Bullettino Boncompagni, T. XI, 1878, p. 319, e T. XII, 1878, p. 1.

(3) Cfr. Bullettino Boncompagni t. XVI, p. 679.

Digitized by Google

cui la scoperta d'America inaugurava una nuova èra della storia universale. La *Summa* di Fra LUCA PACIOLI — forse libro di testo per le lezioni di chi, con eleganza moderna, direbbesi fosse titolare d'una cattedra ambulante di matematica — e le altre opere dello stesso matematico, scritte in lingua volgare, valsero a democratizzare una scienza che fino allora era rimasta privilegio, quasi monopolio di pochi eletti.

Con la pubblicazione della *Summa* (e forse per effetto di essa) l'Algebra italiana inizia il suo splendido cammino ascendente e lo prosegue poi con tale gloria e sì grande velocità da vincere il « record » su tutte le altre nazioni, onde LEIBNIZ non esitò a dichiarare « essere l'algebra quasi totalmente parto degli Italiani ». E con pieno fondamento lo disse; chè gli è nella prima metà del secolo XVI che, per opera di SCIPIONE FERRO, NICOLÒ TARTAGLIA, GEROLAMO CARDANO e LUDOVICO FERRARI, con la risoluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche, la teoria delle equazioni letterali toccava l'ultima Tule a cui, per quanto concerne le formole di risoluzione, può giungere senza invadere il campo trascendente. Le pubbliche disfide, che ebbero appunto per tema preferito questioni risolubili mediante equazioni del terzo grado o del quarto; le vive ed ostinate dispute, che esse provocarono fra i geometri del tempo, le clamorose avventure romanzesche di cui questi furono protagonisti, attrassero l'attenzione del gran pubblico sopra le scienze esatte, sicchè si può dire esser questa un'epoca (l'unica forse che ricordi la storia) in cui l'Algebra sia stata la scienza di moda.

Con RAFFAELE BOMBELLI e PIETRO ANTONIO CATALDI, il primo dei quali giustamente famoso per la prima teoria dei numeri immaginari (1) e il secondo per la scoperta delle ordinarie frazioni continue, l'Algebra italiana manda ancora due lampi di fulgida luce e poi, per più di un secolo, spossata ed esausta, con un sonno riparatore si appresta a nuove battaglie, a nuove vittorie.

Ma, appunto nel corso di questo fecondo secolo XVI, alcuni matematici italiani, con alla testa GIAMBATTISTA BENEDETTI e FEDERICO COMMANDINO, stringevano con gli artisti una sorta di società in accomandita per dare un assetto definitivo alla prospettiva, che un nostro esimio pittore, PIER DELLA FRANCESCA, aveva prima tentato di erigere sopra basi razionali; l'immortale scoperta del « punto di concorso » fatta da GUIDOBALDO DEL MONTE sullo scorcio del secolo XVI, chiude ben degnamente il primo periodo della storia della prospettiva ed inaugura

(1) Cfr. gli articoli *L'enigma dei numeri immaginari attraverso i secoli* e *Lo spettro dell'immaginario in geometria*, inseriti nei Volumi XXI e XXII (1917) della rivista *Scientia* (1935).

Digitized by Google

quello che non a torto venne considerato per il periodo aureo di siffatta disciplina; e i sei libri che ad essa dedicò il grande matematico pesarese, costituiscono una delle gemme più preziose della nostra letteratura scientifica e formarono un coronamento degno del secolo di TARTAGLIA e CARDANO (1).

6. — Nel secolo successivo, come notò un nostro sommo letterato (2), la scienza fu il grande affare dell'Italia. Addì 17 agosto 1603 vennero gettate le basi dell'Accademia dei Lincei e meno di cinquant'anni dopo vide la luce l'Accademia del Cimento, l'una e l'altra sostanzialmente diverse da quelle che allor fiorivano in ogni angolo d'Italia, giacchè mentre queste avevano per unico scopo di promuovere la poesia, quelle posero come loro programma le investigazioni di matematica e di fisica (3). In quel secolo il bastone di maresciallo dei cultori delle scienze esatte venne, per ispontaneo universale consenso, conferito a GALILEO GALILEI, il quale, ispirandosi ai liberi sensi che prepararono il carcere, la tortura ed il rogo a GIORDANO BRUNO, TOMMASO CAMPANELLA e GIULIO CESARE VANINI, spiegò il vessillo della rivolta contro l'autocratica dominazione di ARISTOTILE. Grazie a lui la Meccanica, nelle sue varie diramazioni, trovò la via che doveva guidarla a glorioso porto e l'Astronomia, arricchita di fatti nuovi dianzi insospettati, potè aspirare alla promozione da semplice scienza sperimentale a disciplina fisico-matematica, che KEPLERO e NEWTON dovevano poco dopo accordarle.

E' inutile che io qui mi dilunghi a descrivere le migliorie di sostanza, d'indirizzo, di forma di cui tutte le scienze positive gioirono per opera del metodo sperimentale consigliato da GALILEO con la grazia suaditrice della parola e con la forza irresistibile dell'esempio; nè, data l'immensa diffusione delle sue opere, fa mestieri che io faccia risaltare lo splendore del suo sistema di esposizione: basti dire che, per effetto di esse, l'Italia acquistò quello che dianzi le mancava, uno stile scientifico, elegante e preciso ad un tempo. Ciò che va eziandio esplicitamente ricordato è la straordinaria influenza che il grande fiorentino esercitò con la voce e con gli scritti, la quale fu tale che durante il secolo XVII

---

(1) Credo opportuno aggiungere qui come in quest'epoca abbia vissuto BERNARDINO BALDI, autore d'un grande numero di buone biografie di matematici (alcune delle quali vennero ai dì nostri pubblicate dal BONCOMPAGNI nel suo Bullettino) e di una *Cronica dei matematici*, che viene tuttora consultata con profitto e citata con onore.

(2) G. CARDUCCI, *Opere*, T. XVI, p. 82.

(3) E' noto che il nome di Accademia venne in Italia usato per la prima volta quando, per volere di COSIMO DE' MEDICI, MARSILIO FICINO fondò una società intesa a rinnovare la filosofia di PLATONE.

Digitized by Google

tutto il movimento scientifico italiano fu governato da uomini di alto intelletto che si proclamavano ed erano discepoli di GALILEO.

Fra questi emergono: BONAVENTURA CAVALIERI, EVANGELISTA TORRICELLI e GIOVANNI ALFONSO BORELLI.

Il primo conseguì i pinnacoli della fama per avere inventato quel « metodo degli indivisibili » che gli guadagnò da GALILEO il nome di « secondo Archimede » (1) e che anche oggi viene fruttuosamente invocato ogniqualvolta si vogliano risolvere elementarmente questioni relative a quadrature di aree piane e cubature di solidi limitati da superficie non tutte piane; che la rinomanza del CAVALIERI non abbia tardato a varcare i confini d'Italia, è indiscutibilmente dimostrato dall'esser egli stato scelto come arbitro in una controversia scientifica insorta tra due stranieri, il LONGOMONTANO ed il PELL (2). Il secondo, sommo tanto quale fisico quanto come matematico, fu a ragione proclamato dal MERSENNE « primus observator vacui » e precedette il ROBERVAL nella scoperta di quell'utilissimo « metodo delle tangenti » che di consueto viene attribuito a quest'ultimo (3); la sua fama, già grande in vita, si accrebbe per la postuma pubblicazione di alcune sue ricerche e conseguirà indubbiamente le proporzioni che merita con l'edizione delle sue opere complete che Faenza deliberò per commemorare degnamente il prossimo quarto centenario della nascita del più illustre de' suoi figli. Il terzo, infine, oltreché essere stato geometra egregio ed erudito coscienzioso, ispirandosi forse alle osservazioni fatte da LEONARDO DA VINCI sul volo degli uccelli, affrontò l'arduo ma bellissimo problema di stabilire le leggi della meccanica del corpo umano; e con tal successo ne venne a capo, che la teoria da lui proposta fu subito giudicata così utile ai medici che nell'Università di Montpellier fu fondata una cattedra da cui essa doveva venir insegnata (4); nè è da credere che la teoria borelliana debba collocarsi fra le inutili anticaglie, ché appunto da esse prese le mosse il prof. FISCHER, il quale, come è noto, ai dì nostri si dedicò con tanto impegno e tanta genialità al medesimo soggetto (5).

E come potrei, parlando della scuola galileiana, non consacrare una parola di lode a VINCENZO VIVIANI, sommo nell'arte, omai tramontata,

---

(1) V. una lettera scritta da GALILEO a FULGENZIO MICANZIO in data: Arcetri, 26 luglio 1636.

(2) JACOLI, *Notizia sconosciuta relativa a B. Cavalieri*, nel T. II (1868) del Bullettino Boncompagni.

(3) JACOLI, *E. Torricelli ed il metodo delle tangenti detto Metodo di Roberval*, nel T. VII (1874) del Bullettino Boncompagni, p. 256 e seg.

(4) TIRABOSCHI, op. cit. VIII (Venezia 1796), p. 198.

(5) Cfr. il T. IV dell'*Encyklopädie der math. Wissenschaften.*

Digitized by Google

forse per sempre, di divinare le antiche opere perdute, la cui mondiale rinomanza valse a lui in vita una delle otto pensioni accordate a dotti stranieri da LUIGI XIV e dopo morte un bellissimo elogio da parte di FONTENELLE? (1).

I metodi d'investigazione geometrica proposti ed applicati da CAVALIERI e TORRICELLI, alla costituzione dei quali sembra non sia rimasto estraneo lo stesso GALILEO (2). vennero subito magistralmente svolti da tre uomini che gli stranieri andarono a gara di onorare e che realmente basterebbero da soli alla gloria di un secolo: sono: MICHELANGELO RICCI, STEFANO DEGLI ANGELI, GUIDO GRANDI. Se la fama di cui godettero presso i loro contemporanei di tutto il mondo civile è di gran lunga superiore a quella che seppero conservare fra i posteri gli è che, appunto nel periodo di loro attività scientifica, venivano a maturità quei fecondi procedimenti d'indagine con cui LEIBNIZ e NEWTON provocarono una « instauratio ab imis fundamentis » di tutta la scienza matematica e prepararono l'avvento dell'analisi moderna. Il mirabile formalismo leibniziano fece porre il metodo degli indivisibili nel museo degli strumenti fuor di moda, onde le opere in cui questo trovasi applicato furono ben presto considerate come scritture che avevano fatto il loro tempo; ma io sono convinto che, quando sorgerà l'alba invocata del giorno in cui qualche benemerito investigatore si disporrà a dare alla geometria infinitesimale sintetica quella forma rigorosa e soddisfacente che la farà collocare fra i più sicuri strumenti geometrici, dopo di avere meditato sopra le opere di ARCHIMEDE e CAVALIERI, chiederà, non indarno, ispirazione ed ammaestramento agli scritti, oggi dimenticati, del RICCI, del DEGLI ANGELI, del GRANDI (3).

7. — E' un fatto degno di nota (e di cui non sarebbe difficile di indicare una spiegazione) che l'Italia, mentre rimase spettatrice pressochè passiva a lo spuntare ed il fiorire della geometria analitica cartesiana,

---

(1) *Eloges des académiciens* (La Haye, MDCCXL), T. I, p. 29-46.

(2) G. B. C. DE' NELLI, *Vita e commercio letterario di Galileo Galilei* (Losanna 1792, p. 491-493.

(3) Dopo di avere segnalati questi progressi fatti dalla Geometria nella direzione tracciata dal grande siracusano, avrei dovuto (se non me ne avesse distolto la necessità di riuscir breve) fare onorevole menzione di un teorema e di un metodo appartenenti alla geometria di posizione, dovuti ad un geometra italiano del secolo XVII e che, grazie ad una rivendicazione operata da MICHELE CHASLES (*Aperçu historique*, Note VII), son destinati ad attraversare i secoli portando seco il nome di chi ebbe l'abilità e la fortuna di scoprirli. Alludo a quel teorema fondamentale della teoria delle trasversali che porta il nome di GIOVANNI CEVA ed alle ingegnose considerazioni cinematiche da lui usate per stabilirlo, nelle quali non è difficile ravvisare un preludio al « calcolo baricentrico » del MÖBIUS.

Digitized by Google

al contrario prese un posto onorevole fra le nazioni che coltivarono i nuovi metodi spuntati quasi simultaneamente in Inghilterra ed in Germania. Ed infatti a GABRIELE MANFREDI devesi l'integrazione delle equazioni differenziali omogenee del primo ordine con due variabili indipendenti, nonché quella prima trattazione metodica di tutte le equazioni differenziali del primo ordine che valse a colmare la deplorevole lacuna esistente nella letteratura matematica, per la brusca interruzione al primo volume dell'*Analyse des infiniment petits* del marchese DE l'HOSPITAL (1). Inoltre JACOPO RICCATI efficacemente promosse lo studio delle equazioni differenziali d'un ordine superiore al primo, legando il proprio nome ad un'importantissima classe di equazioni del secondo ordine. Finalmente GIULIO CARLO DE' FAGNANI, immortalandosi con genialissimi studi intorno alla rettificazione della lemniscata, tracciò le prime linee di una grande teoria in cui EULERO e LEGENDRE, ABEL e JACOBI dovevano raccogliere larga messe di allori (2).

Questi tre geometri appartengono a famiglie illustri, non soltanto per nobiltà di natali, ma anche per aver dati altri nomi all'elenco dei matematici italiani. Tali sono EUSTACHIO MANFREDI, astronomo di grido e geometra i cui contributi alla prospettiva son di quelli non destinati a perire: VINCENZO e GIORDANO RICCATI, il primo dei quali, oltre ad essere un reputato ed originale espositore dell'analisi infinitesimale, passa per inventore della teoria delle funzioni iperboliche (3); e GIANFRANCESCO ONOFRIO FAGNANO che, con alcune interessanti ricerche di calcolo integrale, si dimostrò figlio non degenere dell'autore delle *Produzioni matematiche*.

Ove la discrezione ed il pensiero della via lunga che ancora ci resta a percorrere non mi inducessero a ricordare esclusivamente le personalità di primo ordine, terrei qui parola anche di quegli Italiani che con i fatti dimostrarono come la Geometria, dopo il trionfo dei nuovi calcoli sia stata vinta ma non doma. Tuttavia nessuna considerazione può ragionevolmente distogliermi dal ricordare qui con onore quel GIROLAMO

(1) Cfr. il mio articolo sopra *Il giornale de' letterati d'Italia di Venezia e la Raccolta Calogerà*, ecc., nel t. IX (1899) delle Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.

(2) « Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Matematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie EULER aufforderte das von FAGNANI übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden ». Così scrisse JACOBI a P. H. FUSS il 24 ottobre 1847 ; v. Bibliotheca mathematica, III Reihe, Bd. 8, 1908, p. 255; cfr. anche p. 263.

(3) CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. IV, (Leipzig, 1908), p. 411.

Digitized by Google

SACCHERI, che, dopo esser stato per un secolo e mezzo sepolto in un'ingiusta dimenticanza venne esumato da un religioso dei nostri giorni (1) e segnalato da EUGENIO BELTRAMI come un remoto precursore di LOBATSCHEWSKY e BOLYAI, come un pioniere della geometria non-euclidea a torto trascurato dai moderni (2).

Interposto, direbbesi, fra la nobile schiera degli analisti ed il gruppo di geometri italiani del secolo XVIII si asside GIANFRANCESCO MALFATTI, dei cui lavori, veramente ottimi, siami lecito ricordare soltanto le ricerche sopra le equazioni di 5° grado e la così detta « risolvente di MALFATTI » a cui esse condussero (3), ed il bel problema di geometria elementare da lui concepito e risoluto ed al quale numerose ed eleganti ricerche posteriori fecero acquistare straordinaria importanza ed immensa notorietà (4).

8. — Tutto ciò sta a dimostrare come malgrado le incessanti sanguinose guerre, di cui le contese per la successione di Spagna fecero teatro per una metà del secolo XVIII la mia misera patria, gl'Italiani abbiano continuato a subire l'ineffabile fascino che i numeri e le figure esercitano su tutti coloro che una volta ne intravidero la sovrumana bellezza. Ma nel secolo stesso in cui GIAMBATTISTA VICO creava una nuova scienza (la Filosofia della Storia) e GOLDONI dava vita alla commedia nazionale, in cui PARINI s'illustrava nella satira ed ALFIERI nella tragedia, in cui GALVANI e VOLTA scoprivano nell'elettricità l'agente fisico dell'avvenire, in quel secolo meraviglioso il mondo assistette al sorgere in Piemonte d'un astro di prima grandezza destinato a contendere ad EULERO la gloria di dare il proprio nome all'èra che lo ammirò intento al suo portentoso lavoro: se è superfluo io dichiari di alludere a GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE, è, per converso, necessario che esponga, almeno in compendio, le ragioni per cui ritengo assolutamente inaccettabile l'opinione secondo cui quel gran genio sarebbe una gloria francese, opinione che, manifestata da DELAMBRE (5), abbracciata dall'ARAGO (6) ed accettata da

---

(1) Il P. ANGELO MANGANOTTI.

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1889.

(3) Veggasi a questo proposito l'assennatissimo esordio alla Memoria del BRIOSCHI: *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado* (Annali di Matematica, t. V, 1863; oppure *Opere di F. Brioschi*, t. II, p. 39).

(4) Un ricco elenco dei lavori sul problema di MALFATTI si trova nel t. IX (1876), del Bullettino Boncompagni; sarebbe utile renderlo completo con la lista dei lavori posteriori sul medesimo tema.

(5) *Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J. L. de Lagrange*, riprodotta in testa al t. I delle *Oeuvres de Lagrange*, t. I (Paris, 1867).

(6) Cfr. Bullettino Boncompagni, t. VI, 1873, p. 542.

Digitized by Google

J. A. SERRET, venne accolta al di là dell'Alpi con compiacenza evidente.

Ora, per determinare qual grado di solidità posseggano le basi di questa tesi, ricordiamo che il creatore del calcolo delle variazioni nacque a Torino il 25 gennaio 1736 da un tesoriere di guerra del Re di Sardegna e dalla figlia di un medico di Cambiano, cioè da genitori sulla cui nazionalità non può nascere dubbio alcuno. È vero che la famiglia LAGRANGE era oriunda francese; ma, sin dal 1672, il bisavolo del grande matematico era già siffattamente naturalizzato in Italia che, oltre essere capitano di cavalleria nell'esercito piemontese, disimpegnava importanti e delicate missioni affidategli dal Duca di Savoia CARLO EMANUELE II e sceglieva come propria sposa una dama appartenente a cospicua famiglia romana. Orbene se — tale essendo la genealogia di LAGRANGE — sia legittimo considerarlo per un francese domiciliato in Italia, lo dica chi ricorda, ad esempio, come i discendenti di GIANDOMENICO CASSINI, che LUIGI XIV volle presso di sè ad illustrare la sua corte ed il suo regno, già sin dalla seconda generazione si riguardarono e furono ritenuti francesi; lo dica anche chi ha presenti le attuali disposizioni delle leggi civili in vigore attualmente in Italia ed in Francia, secondo le quali viene considerato come cittadino italiano il figlio di chi in Italia risiede da un decennio (1) e come cittadino francese ognuno che sia nato da padre nato in Francia (2).

Se poi quell'opinione trova la propria ragione nel fatto che l'illustre matematico, non potendo trovare in un regno di recente formazione quelle condizioni materiali e morali presentategli prima da FEDERICO II e poi da LUIGI XVI, accettò l'ospitalità offertagli dalla Francia dopo la Germania, ci sembra non si tenga abbastanza conto della facilità che avevano gli artisti, i letterati, gli scienziati nei secoli scorsi di lasciar la patria per entrare al servizio di principi mecenati, ai quali non bastava la gloria dell'armi (3). Inoltre, ammettendo che il cambiamento di residenza significhi cambiamento di nazionalità, si giungerebbe a conclusioni strane, assurde, inaccettabili quali sarebbero il far di PITAGORA un italiano, di EULERO un russo e di STEINER un prussiano; ed io son

(1) Art. 8 del Codice civile italiano.

(2) Legge del 7 febbraio 1851: « Est français tout individu né en France d'un étranger qui lui même y est né ».

(3) Si osservi anche che i genitori del sommo geometra non lo seguirono all'estero; sicché quando l'esercito francese occupò nel 1795 il Piemonte, il ministro degli affari esteri incaricò il ben noto letterato PIER LUIGI GINGUÉNÉ, commissario del Direttorio a Torino, di presentare gli ossequi del governo francese al vecchio LAGRANGE ormai nonagenario; così narra E. DE BEAUMONT nel t. XXXVIII p. CXIII dei Mém. de l'Institut de France.

Digitized by Google

certo che, ove quella massima fosse stata universalmente accettata, il REGIOMONTANO non avrebbe accettata la cattedra offertagli dallo «Studio» di Padova, GIOVANNI BERNOULLI mai sarebbe divenuto lustro e decoro dell'Università di Groninga ed AGOSTINO CAUCHY sarebbesi sdegnosamente rifiutato di occupare nell'Ateneo torinese la cattedra di Fisica matematica istituita nel 1832 da CARLO ALBERTO, appunto per assicurare i mezzi di sussistenza al sommo analista proscritto dalla sua patria (1).

Se, finalmente, a quella conclusione si giunse considerando che i lavori di LAGRANGE sono nella massima parte (ma non nella totalità, come asserì il DELAMBRE) scritti in lingua francese, si osservi, con un illustre storico della letteratura italiana (2), come «gl'Italiani che dalla battaglia di Torino a quella dell'Assietta (1707-1747) respinsero sempre le armi francesi, non seppero e non poterono respingere le mode, i libri le opinioni che venivano di Francia: la quale, essendo più forte nel pensiero, dominò col pensiero. La civiltà comune d'Europa doveva svolgersi in una lingua comune, che fosse facile ed analitica come la filosofia del tempo, entrante come la donna, piena di spirito e di vezzi; e questa lingua fu la francese, che venne parlata nelle corti di Madrid, di Vienna di Berlino, di Pietroburgo e di Torino». La lingua francese essendo stata nel secolo XVIII una vera e propria lingua universale, quale illazione può mai trarsi dall'esser essa stata usata di preferenza da LAGRANGE?...

Notisi poi come la leggenda della nazionalità francese di LAGRANGE (a somiglianza di tutte le leggende) siasi andata formando soltanto dopo la morte di lui; chè egli mai ha dimenticata la terra che lo vide nascere e questa mai ha cessato di considerarlo come uno dei suoi figli di cui andava giustamente orgogliosa. Sorta, infatti, la Società italiana delle scienze, il LAGRANGE vi fu inscritto in qualità di *membro nazionale* (3); e quando, verso il 1780, ALESSANDRO ZORZI, con la valida scorta del MALFATTI, stese il piano d'una *Enciclopedia italiana,* consimile a quella pubblicata in Francia da DIDEROT e d'ALEMBERT, fu subito rivolto invito a LAGRANGE di collaborarvi, e se tale invito non potè venir accettato, gli è soltanto a cagione delle gravi occupazioni dell'illustre direttore dell'Accademia di Berlino (4). D'altra parte, l'Accademia delle scienze di

(1) Cfr. Bullettino Boncompagni, t. IV, 1871, p. 375.

(2) L. SETTEMBRINI, *Lezioni di letteratura italiana*, t. III, Napoli 1876, p. 6.

(3) Cfr. Bullettino Boncompagni, t. VI, 1873, p. 139.

(4) Bullettino Boncompagni, t. VI, 1873, p. 129 e 139. Come ulteriore prova dell'avere gli Italiani sempre riguardato il LAGRANGE come un connazionale può consi-

Digitized by Google

Parigi, la quale elesse il LAGRANGE « associé étranger » sin da quando egli trovavasi al servizio del Re di Prussia, al suo arrivo nella capitale della Francia, pur volendo accordargli il diritto di voto e non potendo iscrivere un non-francese nella categoria dei propri membri, creò, apposta per lui, il grado di « pensionnaire honoraire » e così implicitamente dichiarò non trattarsi di un profugo ritornato ai patri lari. Che più? Scoppiata la rivoluzione francese, LAGRANGE stava per essere espulso, per effetto della legge contro gli stranieri votata il 16 ottobre 1793, e tale dolore gli fu risparmiato soltanto grazie all'intervento di un fedele amico, il noto chimico GUYTON DE MORVEAU, che, per ottenere un'eccezione a suo favore, fece valere certi studi sui projettili che egli andava facendo (1).

Gli è soltanto dopo la scomparsa di LAGRANGE che la Francia sentì un insopportabile dolore per non vedere ascritto fra i propri figli chi poté contrastare ad EULERO il grado di corifeo dei matematici del secolo XVIII; e, considerando la desinenza del suo nome, la lingua che egli mostrò di sapere usare magistralmente ed il lungo soggiorno da lui fatto a Parigi, in un impeto di tenerezza, gli concesse « post mortem » la cittadinanza che non avevagli accordata in vita; quel sentimento è titolo d'onore tanto per chi lo ha provato quanto per chi ebbe il potere di suscitarlo; ma non può nè deve annebbiare il freddo giudizio dello storico imparziale. Il quale però dovrà riconoscere che, se sette città si contesero l'onore di aver dato i natali ad OMERO, è ben naturale che due nazioni possano disputarsi l'onore d'inscrivere nel Pantheon delle proprie glorie colui che inaugurò la propria carriera scientifica inventando il « calcolo delle variazioni », che da giovane seppe riuscir vittorioso in importanti questioni poste a concorso dall'Accademia di Parigi, che non fu inferiore ad EULERO nella teoria dei numeri e lo superò nella teoria delle equazioni algebriche (2), che diede all'applicazione dell'algebra alla geometria la sua forma definitiva (3) e verrà venerato dai posteri più remoti come creatore della meccanica analitica. Sicché se egli non è secondo ad alcuno dei matematici

---

derarsi il fatto che alla sua morte il conte G. SCOPOLI, direttore generale della P. I. del Regno d'Italia, ordinava fosse « invitato un professore della Facoltà matematica in ognuna delle tre Università a voler recitare un elogio di questo celeberrimo matematico »; di tali orazioni la più meritatamente nota è l'« Elogio di LUIGI LAGRANGE recitato nell'Aula Magna della R. Università di Padova li XV Giugno MDCCCXIII » da PIETRO COSSALI e subito stampato a Padova con dedica al Vicerè BEAUHARNAIS.

(1) Bullettino Boncompagni, t. XII, 1879, p. 819.

(2) PIERPONT, *Lagrange place in the theory of substitutions* (Bullettin of the American math. Soc., t. I, p. 196 e seg.

(3) Veggasi la mia comunicazione: *Pour une histoire de la géometrie analytique* nelle Verhandl. des III Mathem. Kongresses, Leipzig, 1904.

Digitized by Google

del secolo XVIII, è senza contrasto il più grande geometra che abbia prodotto l'Italia.

9. — Errerebbe chi ritenesse avere io così finito di delineare o colorire il quadro delle benemerenze che seppe acquistarsi l'Italia di fronte alle scienze esatte nel secolo meraviglioso che antiprecede l'attuale. Pur tacendo di PAOLO FRISI — il quale, benché dipintoci da un contemporaneo « come colui che dragona da generale dei matematici italiani » (1), benchè abbia ottenuto in vita tutti gli onori a cui uno scienziato può aspirare (2), appare oggigiorno come una di quelle fame passeggiere che non resistono all'esame spassionato dei posteri — vanno ricordati GIULIO MOZZI, scopritore di un fondamentale teorema di cinematica, ed un gruppo di meccanici, delle cui opere è da augurarsi che il prof. MARCOLONGO voglia darci completa quella storia che egli ha egregiamente iniziata (3). Né va dimenticato LORENZO MASCHERONI, poeta elegante e matematico di grido, che, con le sue ottime note al *Calcolo integrale* di EULERO, si affermò analista profondo (4) e con la sua famosa *Geometria del compasso* riprese in modo originale un ordine di idee in cui eransi distinti i suoi conterranei dell'epoca di CARDANO e preparò gli studi di BRIANCHON e SERVOIS sulla geometria della riga e quelli di PONCELET e STEINER sulla risoluzione delle questioni geometriche del secondo grado. È poi sul finire del secolo XVIII che un medico modenese intuì la ragione per la quale erano state frustrate le speranze, per lunghi secoli nutrite, di giungere alla risoluzione algebrica delle equazioni letterali del quinto grado e, sforzandosi di stabilirla in modo irrecusabile, si pose in prima linea fra i cultori della teoria delle sostituzioni. PAOLO RUFFINI, come di regola accade a coloro che precorrono i loro tempi, non conseguì in vita tutta la gloria che gli spettava (5); ma oggi, dopo che il « teorema di RUFFINI » venne dimostrato da ABEL e da altri, dopo che la teoria delle sostituzioni è divenuta accessibile a tutti, si è misurato al giusto tutto

---

(1) Così il MALFATTI in una lettera al LORGNA; v. Bullettino Boncompagni, t. VI, 1873, p. 121 e t. IX, 1879, p. 493.

(2) Cfr. A. FAVARO, *Sette lettere inedite di G. L. Lagrange al P. Paolo Frisi* (Atti della R. Accademia di Torino, t. XXXI, 1895).

(3) Bollettino di bibliografia e storia delle sc. matem. t. VIII, 1905, e IX, 1906.

(4) Si ricordi che nella teoria degli integrali euleriani s'incontra una « costante di MASCHERONI ».

(5) « Di somma importanza e profondità », scrive il FRANCHINI (*La storia dell'algebra e dei suoi principali scrittori sino al secolo XIX*; Lucca 1827, p. 103) « sono te produzioni del cav. RUFFINI; ma per la massima parte scritte in un gergo analilico insopportabile »; giudizio tanto più significante in quanto proviene da persona che si adoperò a diffondere le idee del RUFFINI.

Digitized by Google

il valore delle sue mirabili intuizioni. A questo trionfo della giustizia ha contribuito possentemente il prof. BURCKHARDT, con un suo magistrale lavoro (1), che gli valse, oltre l'ammirazione dei competenti, la perenne gratitudine degl' Italiani, della quale siami lecito farmi interprete in questa occasione solenne. L'Italia, grazie ad una felice iniziativa del prof. BORTOLOTTI, si appresta, auspice il Circolo matematico di Palermo, ad elevare al RUFFINI un monumento imperituro, facendo un'edizione completa delle sue opere.

Ancora molto rimarrebbe a dire da chi volesse dare un resoconto completo della produzione matematica italiana nel secolo XVIII; si dovrebbe, ad esempio, accennare ad un famoso trattato di analisi vergato da mano femminile (2) ed al risveglio delle scienze esatte nel Regno di Napoli cagionato dalla voce saviamente ammonitrice di NICOLA FERGOLA (3); nè si potrebbe passar sotto silenzio la fondazione, per opera del LORGNA, della prima accademia scientifica nazionale, la quale, porgendo il mezzo per un fecondo scambio d'idee fra i geometri disseminati per tutta la penisola, rese possibile si potesse parlare di una « matematica italiana » assai prima che la mia patria avesse conseguita l'agognata unità politica.

Ma quello che, in questa Sezione del Congresso, non può né deve venir passato sotto silenzio è che PIETRO COSSALI, con due importanti volumi dedicati alla storia dell'Algebra italiana nella sua epoca di splendore massimo, diede forse il primo esempio di un'esposizione critica delle vicende di una scienza positiva e somministrò un imperituro modello agli storici della Matematica; in sua lode che cosa potrei aggiungere a quanto ne scrisse un giudice di difficilissima contentatura come il NESSELMANN (4) e dopo che il COSSALI fu acclamato e riconosciuto ispiratore e guida di una valorosa falange di studiosi di vaglia, nella quale brillano GIAMBATTISTA VENTURI, GUGLIELMO LIBRI e BALDASSARE BONCOMPAGNI?...

10. — Fra gli sconvolgimenti intestini della Francia, che ebbero per tragico epilogo la morte di LUIGI XVI, venne concepita e, fra i fiumi di sangue che bagnarono la Francia all'epoca del Terrore, vide la luce la

---

(1) *Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini* (Abhandl. zur Gesch. der Mathematik, VI Heft, Leipzig, 1892). Ne esiste una traduzione italiana dovuta al prof. PASCAL. (Annali di matem. II Ser. T. XXII) Cfr. anche l'articolo di J. PIERPONT, *Zur Geschichte der Gleichung des V Grades* (Monatshefte f. Mathemat. u. Physik, t. IV, 1895, p. 68).

(2) Allusione a MARIA GAETANA AGNESI.

(3) V. il mio saggio *N. Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Atti dell'Univ. di Genova, 1892).

(4) *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p. 25.

Digitized by Google

nuova disciplina, che da un lato doveva surrogare, assorbendole, la prospettiva dei pittori e la stereotomia degli architetti e, d'altro lato, doveva mutare la geometria di EUCLIDE ed APOLLONIO in una disciplina totalmente nuova.

Ora le idee ed i metodi d'un rivoluzionario come MONGE non potevano per fermo sperare di venir accolti col meritato favore dalle nazioni che appunto allora erano in guerra con la Francia pel trionfo dei principii legittimisti, onde parecchi anni dovettero passare prima che la Germania accordasse alla Geometria descrittiva l'ingresso entro i suoi confini. Ma l'Italia, che dalle nuove idee innovatrici, agitantisi nel seno della nazione sorella, sperava di trarre i mezzi e le forze per franger le catene del suo secolare servaggio; l'Italia che, pel tramite di FABBRONI, FRANCHINI, MASCHERONI, suoi rappresentanti nella «Commissione internazionale del metro», aveva stabilite relazioni oltremodo cordiali coi più cospicui scienziati francesi ed in particolare con MONGE; l'Italia che erasi affrettata ad inviare alcuni de' suoi figli da natura chiamati ad alti destini, come GIAMBATTISTA GIORGINI e GIOVANNI PLANA, ad istruirsi in una scuola che, non appena fondata, era giustamente assurta alla più alta rinomanza; l'Italia che da secoli aveva dimostrata una perenne spiccata attitudine per le ricerche puramente geometriche, fu la prima nazione a fare ai metodi di MONGE le più festose accoglienze. Non solo si diede a tradurre le lezioni di quel celebre geometra; ma, per mezzo di VINCENZO FLAUTI (1), vi fece considerevoli aggiunte di sostanza e vi diede aspetto più conforme ai classici e, poco dopo, per opera di GIUSEPPE TRAMONTINI (2), vi apportò una notevole miglioria con la metodica applicazione del cambiamento dei piani di proiezione, cioè con l'introduzione di quell'artificio che sì fiera tempesta doveva far scatenare quando TEODORO OLIVIER se ne fece paladino presso i propri connazionali. Più tardi la patria mia — auspice GIUSTO BELLAVITIS (3)

(1) *Geometria di sito sul piano e nello spazio* (Napoli, 1808).

(2) *Trattato teorico-pratico delle proiezioni grafiche* (Modena, 1812-13).

(3) *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova, 1851). A proposito di quest'opera il TERQUEM scrisse le seguenti parole (Nouv. Ann. de mathém., t. XII, 1853, p. 106) che noi Italiani non possiamo leggere senza commozione e gratitudine:

« L'Italie s'est toujours montrée, dans la région intellectuelle, au premier rang; c'est elle qui nous a ouvert les trésors de l'antiquité littéraire et scientifique. Combien ne devons-nous pas au seul COMMANDIN? La malheureuse péninsule (*Italia*! *Italia*!) conserve son illustre nationalité au moins dans les travaux de l'esprit. Pour s'en convaincre, en ce qui concerne les sciences exactes, il suffit de parcourir le recueil mensuel que publie à Rome, le célèbre professeur BARNABA TORTOLINI, collection qui gagne chaque jour en intérêt par les savantes communications des BONCOMPAGNI (Balthazar), BRIOSCHI, CHELINI, GENOCCHI, SECCHI, TARDY, TORTOLINI, VOLPICELLI,

Digitized by Google

— doveva stringere in più intimo connubio la Geometria descrittiva con il multiforme concetto di « trasformazione geometrica », nel frattempo pervenuto a completa maturità; e con LUIGI CREMONA, doveva collegare armonicamente il metodo della proiezione centrale al metodo di MONGE, con criteri analoghi a quelli che GUGLIELMO FIEDLER rese vittoriosi in tutto il mondo, mediante un trattato giustamente famoso.

« Rebus sic stantibus », si potrà forse dire, o signori, esser l'amor di patria che mi fa velo all'intelletto quando io dai fatti precedenti mi credo autorizzato a concludere che all'Italia spetti il primo posto fra le nazioni che contribuirono al trionfo delle idee di MONGE?

Giova qui aggiungere non esser questo che uno degli aspetti di una più vasta e complessa opera scientifica che, nel secolo XIX, fece considerare l'Italia come la vessillifera della Geometria pura. Se a tale risultato contribuirono parzialmente GAETANO GIORGINI, il primo scopritore del complesso lineare di rette, e GIUSTO BELLAVITIS, l'inventore del « metodo delle equipollenze », nella sua totalità è dovuta all'azione altamente benefica esercitata da LUIGI CREMONA, il quale, dopo di essersi assimilati i nuovi metodi d'indagine geometrica inventati in Francia da MONGE, CARNOT, PONCELET ed in Germania da MÖBIUS, STEINER, PLÜCKER, ne mise in luce e ne accrebbe il potere, aggiungendo nuove ubertose provincie al vasto impero della Geometria. Sia perenne gloria a lui, non solo pei nuovi veri di cui gli siamo debitori, ma anche per la fiorente scuola di cui fu organizzatore e capo, scuola in cui brillarono ETTORE CAPORALI e RICCARDO DE PAOLIS, ohimè! troppo presto rapiti alla scienza ed alla patria, in cui tuttora brillano altri, i cui nomi io pronuncerei con la debita riverenza, ove non mi fossi imposto (per ragioni che è superfluo dichiarare) il vincolo di non parlare di chi è ancor valido sulla breccia; ma, in generale, si può asserire che tutti coloro i quali, in questi ultimi cinquant'anni, coltivarono la Geometria al di qua delle Alpi, salutano in LUIGI CREMONA il loro padre ed autore.

11. — Nè devesi credere che l'attività geometrica spiegata dall'Italia nel secolo decorso abbia fatto sì che essa rimanesse spettatrice incuriosa ed indifferente ai portentosi progressi che andava facendo l'analisi.

---

etc. On y trouve l'annonce avec éloge d'un nouveau Traité de géométrie descriptive par M. GIUSTO BELLAVITIS de Bassano, professeur de cette science à l'Université de Padoue. On dit que l'auteur a suivi une nouvelle méthode qui *non è nè copia nè imitazione di verun'altro*. L'ouvrage est divisé en cinq livres qui traitent avec un ordre et une clarté admirables, des points, des droites, des plans, des lignes et surfaces courbes, des intersections, des contacts et de la courbure des lignes et des surfaces, et toujours sous un point de vue général, évitant les cas particuliers qui ne peuvent jamais épuiser un sujet aussi bien qu'un petit nombre d'idées générales ».

Digitized by Google

Infatti, GIOVANNI PLANA (1) — pensatore oggi quasi dimenticato, ma che ai contemporanei apparve (per usare le frasi incise sulla sua tomba) « astronomus, physicus, matematicus nulli sui temporis secundus» — importò nella terra ove nacque LAGRANGE le teorie che aveva apprese a Parigi, e svolgendole ed applicandole egregiamente seppe tesserne il più entusiastico elogio. Coadiuvato da FELICE CHIÒ ed ANGELO GENOCCHI egli accese al piè dell'Alpi un vivace focolare di studi matematici, che, grazie ad abili vestali, tuttora vampeggia, illumina, riscalda,

Un secondo importante centro di ricerche analitiche si stabilì a Pavia (2) per merito di GREGORIO FONTANA (3), il quale « contribuì non poco a diffondere in Italia la conoscenza di alcune dottrine matematiche ». L'opera da lui inaugurata venne proseguita da PIETRO PAOLI, i cui numerosi ed ottimi lavori rivelano « forse più che in ogni altro geometra italiano del suo tempo, una cognizione profonda, completa e familiare dell'analisi matematica, condotta al punto in cui trovavasi allora per opera di EULERO, di LAGRANGE, di LAPLACE, di MONGE, ecc. ». Degno di succedere al PAOLI si dimostrò VINCENZO BRUNACCI « che contribuì moltissimo ad elevare fra noi il livello dell'insegnamento matematico, sia colle proprie lezioni, sia colle riforme da lui provocate nell'ordinamento degli studi ». Discepolo del BRUNACCI e poi suo collega fu ANTONIO BORDONI, uno dei più profondi e geniali cultori della Matematica in genere ed in particolare dell'analisi applicata alla Geometria. « Quest'ultimo ramo di scienza » (osserva il BELTRAMI) « inaugurato nella sua odierna larghezza da MONGE è stato dal BORDONI trattato con evidente predilezione e con grande novità ed eleganza nelle sue *Lezioni di calcolo*, e gli ha fornito argomento ad interessantissime ed originali ricerche, nelle quali è difficile dire se brilli maggiormente per l'acume dei concetti o per il magistero dell'analisi, quasi sempre mantenuta nelle vie lagrangiane. Questi lavori assicurano al BORDONI una riputazione duratura; nè sarà difficile allo storico imparziale della scienza il trarre positivi argomenti di priorità in favore di lui, specialmente rispetto alla dottrina delle coordinate curvilinee che d'ordinario si attribuisce a GAUSS ». L'opera scientifica

---

(1) Cfr. E. DE BEAUMONT, *Eloge historique de Jean Plana* (Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France, XXXVIII, 1873).

(2) Le parole virgolate sono tolte da alcune notizie scritte dal BELTRAMI ed inserite nella I parte delle *Memorie e documenti per la storia dell'Università di Pavia* (Pavia, 1878).

(3) Del FONTANA il FRANCHINI scrisse: « Letterato insigne, matematico celebre ed autore di moltissime produzioni, ove non sappiamo se più debbasi lodare la facile venustà dello stile o la spontanea novità delle speculazioni » (*Saggio sulla storia della matematica*, Lucca 1821, p. 27).

Digitized by Google

del BORDONI attende ancora il suo storico (1); ma quanto già se ne conosce autorizza a considerar lui come capo della nobile coorte di cultori che la geometria differenziale trovò in Italia e nella quale (per non ricordare che i defunti) brillano per luce propria GASPARE MAINARDI, DELFINO CODAZZI, EUGENIO BELTRAMI, ERNESTO CESÀRO. Alla scuola pavese, come discepolo diretto del BORDONI, appartiene anche, « last but not least », FRANCESCO BRIOSCHI, della cui vasta e duratura azione scientifica io non tenterò di tessere l'elogio, chè la figura di lui appare così grande agli occhi di tutti che è vano sforzarsi di accrescerne l'imponenza collocandola sopra un piedestallo.

Il trasferimento del PAOLI dall'Ateneo di Pavia a quello di Pisa ebbe per risultato un notevole risveglio degli studi matematici, non soltanto nell'Università illustrata da GALILEO, ma anche in tutta la Toscana. In conseguenza venne istituita una terza sede di investigazioni analitiche e fisico-matematiche, alla cui imperitura rinomanza provvidero OTTAVIO FABRIZIO MOSSOTTI, ENRICO BETTI e (perdonatemi quest'infrazione che mi permetto ad una regola da me sempre osservata, in favore di un sommo tuttora vivente!) ULISSE DINI, nomi destinati a venir sempre ricordati accanto a quelli di GALOIS e WEIERSTRASS ed a cui si deve se l'Italia è oggi considerata come maestra nella teoria matematica dell'elasticità.

12. — I nomi che son venuto sin qui ricordando sono certamente molti e potranno da taluno esser giudicati soverchiamente numerosi; ma tali per fermo non sembreranno a chi riflette alle omissioni a cui mi ha costretto il desiderio di non abusare della pazienza di chi mi fa l'onore di ascoltarmi; sicchè mi assale il tormentoso dubbio che taluno non mi saprà perdonare di non aver fatto menzione di persone che molti dei presenti ricorderanno con affetto di amici o devozione di discepoli; tali sono DOMENICO CHELINI, maestro insuperato nella Geometria analitica e nella Meccanica; BARNABA TORTOLINI (2), grazie a cui la matematica italiana venne in possesso di un esclusivo suo organo; GIUSEPPE BATTAGLINI, efficace ed originale diffonditore dei più elevati metodi algebrico-geometrici nelle provincie meridionali; FELICE CASORATI, analista fi-

---

(1) Il compianto prof. CASORATI scrisse una biografia del BORDONI che presentò al BRIOSCHI in occasione di un suo giubileo.

(2) E' forse noto a pochi come, sin dal 1828, il VIESSEUX, notissimo per avere fondata una nostra celebre rivista letteraria, progettasse la pubblicazione di *Annali delle scienze matematiche, fisiche e naturali* e come GIUSEPPE MAZZINI si adoperasse « toto corde » per l'effettuazione di tale disegno senza però riuscirvi: veggasi il t. I degli *Scritti editi ed inediti di Giuseppe Mazzini* (Imola, 1906).

Digitized by Google

nissimo, a cui solo un malvagio capriccio del caso vietò di legare il proprio nome ad alcuni fondamentali teoremi dell'analisi moderna. E come potrei io non riconoscere il mio torto per non avere celebrate le vittorie che gli Italiani ottennero nelle ricerche astronomiche nei secoli che corrono da GALILEO GALILEI a GIOVANNI SCHIAPARELLI?

Ma queste ed altre probabili lacune nel bilancio, che ho tentato presentarvi del patrimonio matematico dell'Italia, non possono lasciar nascere alcun ragionevole dubbio sopra la solidità dell'azienda.

Non appena dissipata la caligine, che, nell'Età di mezzo, gravò come una cappa di piombo sopra tutta l'umanità, l'Italia si pose subito alla testa delle nazioni in cui le scienze esatte son tenute nella debita considerazione e poi, attraverso a vicissitudini politiche così lunghe e tremende da fiaccare le fibre più robuste, malgrado la somma di energia spesa per conseguire l'agognata indipendenza nazionale, ad onta dell'attivo interesse costantemente dimostrato per tutte le manifestazioni dell'arte, se non sempre seppe conservare saldo in pugno lo scettro che avevale affidato LEONARDO PISANO, non lasciò passare alcun secolo senza aggiungere qualche pietra al mirabile edificio che i matematici andavano assiduamente elevando; sicchè presso di noi non si riscontra alcun sintomo di quel fenomeno, avvertito dal MANSION nella matematica belga (1), che la dominazione straniera sia stata insormontabile ostacolo allo svolgimento del pensiero matematico.

Nè devesi pensare che i sentimenti ostili degli oppressi verso gli stranieri dominatori abbian trasformate le Alpi in una barriera che le idee matematiche fossero incapaci di valicare. Alle relazioni agro-dolci fra i discepoli di GALILEO ed i contemporanei di CARTESIO, succedono quelle francamente amichevoli attestate dalla collaborazione dei RICCATI e dei FAGNANO agli *Acta eruditorum* di Lipsia. Ai rapporti veramente fraterni fra scienziati francesi e scienziati italiani all'epoca napoleonica, fanno riscontro le accoglienze oneste e liete che da noi ricevettero JACOBI e BORCHARDT (2), STEINER e DIRICHLET; e come potrei passar sotto silenzio il soggiorno in Pisa e la stretta amicizia con ENRICO BETTI di BERNARDO RIEMANN, di cui la mia patria conserva tuttora i resti mortali? (3) Le numerose ristampe e versioni in italiano di opere giustamente famose dovute a francesi, tedeschi ed inglesi confermano come presso di noi la

(1) *Esquisse de l'histoire des mathématiques en Belgique* (Revue des questions scientifiques, janvier 1907).

(2) Cfr. Atti della quinta Riunione degli scienziati italiani tenuta in Lucca nel settembre del MDCCCXLIII, Lucca 1844, p. 475 e 500.

(3) Dei viaggi e soggiorni in Italia di JACOBI, STEINER e RIEMANN esistono traccie indelebili nelle loro opere, fra cui trovansi lavori scritti nella lingua di Dante.

Digitized by Google

scienza stesse al di sopra di ogni competizione di parte (1); onde non devono giudicarsi come isolati ed insignificanti gli spettacoli offerti dal MOSSOTTI, dal BETTI, dal CREMONA, i quali, reduci dall'aver combattuto per la redenzione della patria a Curtatone, a Montanara, a Venezia, deposte le armi, riprendevano lo studio delle opere con cui, appunto allora, la Germania stava conquistando l'eccelsa posizione che attualmente occupa nelle scienze esatte.

Ai dì nostri la scienza si sforza di cancellare le distinzioni di nazionalità, affermando il suo carattere internazionale, e si accinge a nuovi trionfi contemperando il principio della divisione con quello della concentrazione del lavoro: le accademie, da locali divenute nazionali, si stringono in un fascio pel conseguimento d'intenti di generale interesse; ed alle opere individuali, fatiche preferite dei nostri maggiori, succedono grandi imprese collettive, frutto del lavoro concorde di specialisti sparsi in tutto il mondo civile. Tuttavia, in certi giorni memorabili, è ben lecito ad ogni popolo riandare al proprio passato e misurare le proprie forze. Oggi è per l'Italia una di tali storiche date; essa dalle glorie del passato trae i più lieti auspici per l'avvenire; e, contando i maestri ancora intenti ad opere feconde ed i numerosi discepoli, ormai maturi per prenderne il posto, pensa con gioja, fiducia ed orgoglio che le sue tradizioni più volte secolari saranno per essere continuate; ed i combattenti per la ricerca del vero incuora alle lotte incruenti, ritemprandoli nella coscienza d'una eterna missione, ripetendo le parole del suo poeta:

> Chinatevi al lavoro, o validi omeri;
> schiudetevi a gli amori, o cuori giovani;
> impennatevi a i sogni, ali de l'anima;
> irrompete a la guerra, o desii torbidi;
> ciò che fu torna e tornerà ne i secoli (2).

---

(1) Senza pretendere di dar qui un'enumerazione nemmeno approssimativa di tali pubblicazioni, mi limito a ricordare la ristampa fatta a Venezia degli *Acta eruditorum*, e quelle del *Calcolo differenziale* di EULERO e degli *Elementa matheseos universalis* del WOLF; fra le traduzioni citerò il *Calcolo infinitesimale* del MARIE e la *Dottrina degli azzardi* del DE MOIVRE (entrambe con note del FONTANA), il *Saggio sulla storia delle matematiche* del BOSSUT ed il noto *Dizionario delle scienze matematiche* del MONTFERRIER.

(2) [Alcuni dei concetti informatori di questo discorso si ritrovano nell'altro, pronunciato a Milano il 13 Settembre 1931, in occasione di un Congresso della *Matheris* e pubblicato, col titolo *L'ininterrotta continuità del pensiero matematico italiano* nel vol. XII della IV Ser. *(1932)* del *Periodico di matematiche* (1935).

Digitized by Google

XXXII.
MATEMATICA E REALTÀ

Conferenza tenuta alla Sezione ligure
della Mathesis il 1° febbraio 1911

1. — Le origini della matematica, come quelle di qualunque scienza, devono ricercarsi nelle necessità della pratica, nelle esigenze della vita civile ed in quell'insaziata ed insaziabile brama che tormenta l'uomo di squarciare il fitto velo d'impenetrabile mistero che avvolge e nasconde l'essenza dei fenomeni che si svolgono sotto gli occhi di ogni osservatore intelligente. Ciò non soltanto è conforme a quanto ragionevolmente si può concepire, ma è anche attestato dalle più attendibili autorità storiche: da Erodoto, il quale assicura che la geometria vide la luce in Egitto, per effetto del bisogno di ripristinare ogni anno i confini fra le proprietà fondiarie, regolamente cancellate dalle periodiche inondazioni del Nilo, e dalla concorde tradizione, che pone fra i Fenici — il popolo di commercianti per eccellenza — le scaturigini dell'aritmetica e fra gli Assiro-Babilonesi le più remote vestigia di osservazioni astronomiche, istituite e spinte alacremente innanzi pel desiderio vivissimo di dedurre, dal solenne movimento dei corpi celesti, indizi sicuri sopra il destino futuro di re, di popoli, d'individui.

2. — Da tale stadio rozzo e primitivo le scienze esatte assursero alla dignità di vera scienza per opera di quel popolo sublime a cui natura concesse di elevarsi ad un livello intellettuale, che potè forse essere agguagliato in Italia all'epoca del Rinascimento, ma che non venne finora oltrepassato. Furono i pensatori dell'antica Grecia a scoprire, nelle considerazioni pratiche istituite dai popoli, che essi riunivano sotto l'appellativo di « barbari », un substrato razionale degno di assiduo studio.

Per opera loro gli appezzamenti di terreno, che gli Egiziani avevano avuto bisogno di misurare, si mutarono in poligoni astratti, le regole empiriche e non sempre esatte per valutarne il contenuto furono surrogati da procedimenti razionali, preparando così la « teoria dell'equivalenza ». D'altra parte, i monumenti elevati per concedere una postuma soddisfazione all'orgoglio smisurato dei Faraoni, spogliati della loro veste materiale, portarono a concepire le figure ideali oggetto della stereometria; finalmente nelle modeste calcolazioni mercantili allora in uso si scoprì un germe fecondo di metodi per investigare le proprietà dei numeri astratti.

Digitized by Google

A questa radicale trasformazione di gruppi isolati di osservazioni in vere e proprie teorie capaci di soddisfare le più raffinate esigenze, contribuì il pensiero greco in tutti i mirabili e multiformi aspetti in cui si è manifestato, auspici TALETE e PITAGORA, PLATONE ed ARISTOTELE, tutte le sètte filosofiche che allora pullularono sotto il cielo dell'Ellade ed i grandi matematici che rispondono ai nomi di EUCLIDE e ARCHIMEDE, APOLLONIO e DIOFANTO, TOLOMEO ed ERONE.

3. — Al lavoro multiforme ma concorde di questi pensatori ed a quello di una pleiade di minori di cui nomi ed opere non si sottrassero all'azione edace del tempo, devesi se la matematica acquistò i lineamenti sotto cui oggi ancora si presenta e che manterrà almeno fin quando i canoni della logica deduttiva conserveranno intatta la loro validità. Il monumento eretto dai geometri greci riposa sopra così solidi fondamenti che non valsero a scuoterne la compagine nè le aquile romane, spregiatrici di tutto che non fosse forza e diritto, eloquenza e poesia; nè i barbari che a torme senza numero scesero da settentrione, tutto calpestando, tutto distruggendo e spegnendo gli ultimi bagliori della magica fiamma suscitata dal genio elleno. Ma fu vana la speranza di cancellare persino la memoria delle conquiste compiute; tale e tanta era la vitalità e la forza in esse immanenti che quando, dissipata la caligine medioevale, l'umanità subì nuovamente l'irresistibile fascino che esercitano il bello ed il vero, i germi rimasti latenti in un periodo millenario di invernale letargo, si mostrarono tanto vigorosi e vivaci da produrre piante onuste di frutti succosi e nutrienti.

4. — E fu allora che la nostra scienza s'arricchì di un nuovo potentissimo elemento, grazie a cui l'aritmetica dei Greci divenne l'Algebra, il nostro odierno più possente mezzo di ricerca. Con l'introduzione ed il metodico uso del simbolo la « scienza del numero » fu animata da uno slancio tale che le fu possibile sostenere degnamente la lotta che essa è destinata a combattere sempre con la sua eterna rivale « la scienza dell'estensione », lotta nella quale era rimasta soccombente durante il periodo greco. In conseguenza di ciò una folla di proposizioni apparentemente eterogenee poterono venir compendiate in un enunciato unico e stabilite con un'unica argomentazione, e, ciò che a noi maggiormente preme di rilevare, la matematica tutta mosse un passo verso il completo distacco dalla realtà, che è il motivo dominante di tutta la sua evoluzione attraverso i secoli.

5. — Ma non molti lustri dovevano scorrere senza che la geometria si trasformasse a sua volta, acquistando un vigore ed una generalità paragonabili a quelle dell'algebra. E' gloria non peritura di DESCARTES e FERMAT di avere concepito un geniale ed ultrapotente procedimento per

Digitized by Google

sfruttare le proprietà dei numeri nello studio dell'estensione figurata; ho nominata la « geometria analitica », che grazie ad un nostro grande compatriotta — il LAGRANGE — doveva emanciparsi dalla considerazione costante delle figure ed assumere i lineamenti che tutti oggi conoscono. Applicandola, qualunque curva e qualunque superficie descritta con legge determinata ha come rappresentante un'equazione che ne compendia tutte le proprietà, negli infiniti aspetti sotto cui si può presentare; e poichè, viceversa, ad ogni equazione corrisponde una curva o superficie, così fu reso possibile il concepire e lo studiare enti geometrici così complicati e strani, che avrebbero spaventati anche i più intrepidi fra gli antichi geometri: così la nostra scienza, quasi nave nell'atto di volger la prora verso un mare sconfinato e libero, vide togliere un'altra delle àncore che ancora l'avvicinavano al mondo reale.

6. — Ed un'altra ancòra venne levata allorchè, poco dopo, LEIBNIZ e NEWTON insegnarono al matematico il maneggio del concetto di « infinito », che dianzi erasi giudicato incapace di una trattazione godente le qualità di precisione inerenti ad ogni teoria matematica. Quei sommi ed i loro immediati discepoli, risolvendo col sussidio di siffatti nuovi ordigni una congerie di bellissimi ed importantissimi problemi di geometria e di meccanica, fecero nascere, e non a torto, l'illusione di esser giunti in possesso di una bacchetta magica capace di spalancare tutte le porte, per quanto solidamente sbarrate.

E' superfluo che io dimostri come la geometria analitica ed il calcolo infinitesimale sieno le due colonne su cui si sostiene tutta la matematica moderna, meraviglioso congegno di cui sono organi vitali la teoria delle funzioni, la geometria infinitesimale e la teoria generale delle curve e delle superficie, discipline attorno a cui i matematici lavorarono per più di due secoli, nè riposano ancora.

7. — Importa invece notare come la nostra scienza abbia subita una nuova e radicale trasformazione agli albori del secolo decorso, grazie all'influenza profondamente rinnovatrice dello spirito critico che, a partire dall'epoca degli enciclopedisti, anima e scuote tutte le manifestazioni del pensiero umano. Grazie al suo benefico influsso i principii fondamentali della nostra scienza vennero accuratamente esaminati per misurare quanto fossero solidi e tutte le dimostrazioni minuziosamente analizzate per vedere quanto fossero conclusive e soddisfacenti. In conseguenza, non soltanto tutta la compagine della matematica ne uscì più salda, ma interi rami di scienza si videro, con universale meraviglia, ripullulare dall'antico tronco.

8. — Così l'analisi microscopica delle basi della geometria, da un lato fece riconoscere come un semplice dato sperimentale la tridimen-

Digitized by Google

sionalità del nostro spazio, e quindi portò i matematici ad ammettere la possibilità ed a studiare le proprietà di spazi estendentisi in un numero qualunque di direzioni; e dall'altro lato fece ascrivere tra i portati dell'esperienza il postulato di EUCLIDE e quindi creare nuovi sistemi geometrici, non conformi a quello che i nostri sensi ci rilevano, ma non meno di questo logicamente perfetti. In conseguenza sorsero, a lato della classica geometria, la geometria non euclidea, e quindi successivamente la geometria non archimedea, la geometria non legendriana, la geometria non argusiana, la geometria non pascaliana ed altre consimili, ognuna delle quali trae origine dal negare qualcuno dei capisaldi dell'antica geometria; dal punto di vista della logica tali nuovissimi prodotti dello spirito umano sono perfettamente soddisfacenti, ma le proposizioni su cui riposano si scostano talmente da quelle che da secoli si ritengono caratteristiche per la geometria, che vi furono alcuni, affetti forse da misoneismo, che insorsero contro chi le aveva volute considerare come parti integranti della geometria.

9. — D'altronde la stessa indagine critica, spinta fino agli ultimi limiti, applicata ai fondamenti dell'aritmetica, condusse ad altri nuovi enti estremamente strani, quali le curve continue prive di tangenti o capaci di coprire un'area, ed a considerare l'infinito, nel senso aritmetico tradizionale della parola, come punto di partenza di innumerevoli altri esseri numerici congeneri: sono i ben noti « numeri transfiniti » del CANTOR, che prestano servigi nell'analisi, quantunque la mente umana sia incapace di concepirli.

10. — Da tutto ciò emerge come lo spirito di libero esame, penetrato nelle aule in cui i classici della matematica regnavano con un'autocratica autorità, abbia dato mirabili risultati, distruggendo per subito ricostruire, ed accellerando in modo portentoso il moto di distacco dalla realtà, che sembra abbia, sia pure inconsciamente, animato la scienza nostra sin dagli inizi della sua portentosa carriera ascendente. Nè è a credere che in avvenire la rotta sia destinata a mutare direzione: caratteristica della ricerca matematica è, secondo una geniale osservazione di GIORGIO CANTOR, la più completa libertà, onde è certo che i matematici venturi continueranno ad usufruire largamente della facoltà di introdurre nuovi enti per definizione, purchè non contraddicano a principii già accettati, e ad ammettere come possibile qualunque proposizione di cui non sia stata ancora dimostrata la falsità. *Tale facoltà noi trasmetteremo intatta, come un sacro diritto, ai nostri successori, perchè riconosciamo che ad essa è inevitabilmente connesso l'avvenire della scienza nostra.*

Lasciamo che alcuni ci accusino di avere sostituita la metageometria alla metafisica e di avere socchiusa una porta che permise al misti-

Digitized by Google

cismo di penetrare nel santuario della più positiva fra le scienze (1); lasciamo che i profani sorridano udendo che secondo la più recente definizione della matematica (2), questa è «una scienza nella quale non si ha mai bisogno di sapere se quello che si dice è vero e nemmeno di sapere di che cosa si parla». E constatiamo con legittimo orgoglio di essere in grado di legare ai nostri successori metodi d'indagine così raffinati e potenti da collocare chi ne conosce il maneggio in una condizione non dissimile dalla situazione privilegiata di LOHENGRIN, cioè da porre al riparo dall'«inganno abbietto» dei sensi.

11. — A scendere dalla cima di siffatte considerazioni m'induce la voce saviamente ammonitrice del mio Demone familiare, che mi ricorda essere mio stretto dovere, come modesto gregario dell' Associazione *Mathesis*, di non trascurare l'altra delle facce in cui si esplica l'azione che noi esercitiamo; ho finora tenuto parola del nostro ufficio di scienziati, mi debbo ora volgere a quello, forse più delicato, che lo Stato ci ha affidato.

Ora è noto che le scuole si modellano sullo spirito dei tempi, seguendo con passi più o meno tardi, l'evoluzione generale della coltura. Sicchè, se la storia completa dell'istruzione matematica non fosse in gran parte (e credo totalmente per quanto concerne l'Italia) un desiderio, se ne potrebbe narrare una storia parallela a quella di cui ho testè indicati i fatti veramente decisivi. Ma anche dal poco che se ne conosce risulta come il carattere formativo della matematica per l'intelligenza della gioventù e la sua importanza per i cultori di tutte le scienze positive siano stati da secoli riconosciuti e poi costantemente confermati.

12. — Si ricordino, infatti, le parole di sincero entusiasmo che PLATONE dedicò alla matematica come ramo d'insegnamento. che egli considerava come un metodo insuperabile per dirigere le attività dell'anima verso le cose sovrumane, e la sua osservazione che coloro i quali sono abituati fino dalla nascita a considerazioni aritmetiche possiedono in grado più elevato la facoltà di capire e che le teste più tarde con l'istruzione e l'esercizio di questo ramo dello scibile si arricchiscono di quello che, più tardi, il DARWIN ebbe a designare col nome di «occhio suppletivo». Conformemente a questo sentimento PLATONE, nel VII libro della sua *Repubblica*, pose la geometria a fondamento del suo sistema educativo, e scrisse sopra la porta della sua scuola il così spesso citato motto «niuno entri qui che non sia geometra». Quando si riflette alla

---

(1) H. BERKELEY, *Mysticism in modern mathematics* (Oxford, 1910).

(2) La definizione riferita è di B. RUSSEL e venne commentata da G. VAILATI (*Leonardo*, T. II, 1903; oppure *Scritti di G. Vailati*, Firenze, 1911, p. 528).

Digitized by Google

sconfinata ammirazione che in tutti i tempi circondò il divino filosofo, e si tien conto del fascino che tuttora emana dalle sue opere, in cui scienza e poesia procedono in mirabile accordo, si capirà di leggieri come e perchè in Atene, in tutta la Grecia e poi in ogni paese ove giunsero gli eserciti vittoriosi di ALESSANDRO MAGNO, la matematica sia stata tenuta nella massima considerazione da tutti gli educatori della gioventù.

13. — Nell'epoca Romana le matematiche furono poco apprezzate e meno coltivate, onde il posto che ad esse venne accordato nell'insegnamento non poteva essere nè fu rilevante; tuttavia è notevole che, in un tempo in cui l'eloquenza era tenuta al massimo onore, QUINTILIANO nelle sue *Istituzioni di oratoria* (1) raccomandava al futuro oratore lo studio della geometria, modello di logica in azione, per rendersi familiare l'uso del sillogismo e pratico degli artifici della dialettica. Nè meno notevole è il fatto che SANT'AGOSTINO, nel IV secolo dell'era nostra, riteneva preclusa qualunque scienza divina od umana a chi ignorasse l'arte del conteggio.

14. — Nemmeno nella tenebrosa Età di mezzo la geometria venne spregiata o dimenticata, sicchè non vi fu università medievale in cui non fosse regolarmente letta, commentata, interpretata qualche pagina degli *Elementi* di EUCLIDE: e, mentre lo spirito umano si volgeva con maggior fervore verso la serena contemplazione del vero, le menti più elette si adoperavano ad inculcare nelle masse la persuasione dell'utilità che possiede e del godimento che produce l'investigazione delle proprietà dei numeri e delle figure.

A vincere la ripulsione per considerazioni relative ad oggetti intangibili, non rara neppure oggi, ma che certo doveva essere diffusissima in epoche molto meno evolute, i trattatisti del tempo a ragione ritennero opportuno di interrompere la nuda e secca esposizione delle discipline geometriche con qualche applicazione tratta dalla vita comune. Ad esempio, in un suo manuale scolastico di geometria pubblicato in latino nel 1503 ed in francese nel 1542, il noto matematico CARLO de BOUVELLES illustra il problema di trovare una media proporzionale fra due date rette con la seguente ingenua osservazione: « è costume dei Francesi di assidersi ad una mensa rettangolare, mentre i Tedeschi preferiscono un desco quadrato; ora, risolto quel problema si sarà in grado di trasformare una tavola alla francese in una che possa servire ai Tedeschi ». Non v'ha dubbio che se l'ottimo de BOUVELLES avesse vissuto quattro secoli più tardi, cioè dopo alcuni clamorosi avvenimenti di cronaca berlinese, non avrebbe mancato di trarne occasione per illustrare, da un

(1) *Istituzioni di oratoria*, Lib. I, Cap. X.

Digitized by Google

analogo punto di vista, qualche altro ancor più famoso problema geometrico!

15. — Non molto dopo, GALILEO nella sua campagna contro le vane speculazioni degli Aristotelici, proclamava: « l'Universo è un libro scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è uno aggirarsi vanamente per uno oscuro laberinto ». Nè a queste generiche esortazioni limitò la propria azione il sommo investigatore; egli ritenne, infatti, non indegno di lui il dedicare un po' del suo tempo a spiegare la più astrusa delle sezioni di cui componesi il grande codice euclideo, cioè la teoria delle proporzioni.

In tono non dissimile da quello assunto dall'instauratore del metodo sperimentale si esprimeva nello stesso secolo il celebre P. MALEBRANCHE e le parole di sincera ammirazione da lui tributate ai cultori delle scienze esatte, nel famoso suo libro *De la recherche de la vérité,* ebbero l'invidiabile risultato di spingere il Conte di FAGNANO verso la mèta ove lo aspettava una ben meritata ed imperitura rinomanza (1).

Se avessi tempo ed agio sufficienti per narrare una compiuta storia dell'insegnamento matematico non mancherei di notare come l'esempio offerto dall'immortale Pisano sia stato seguito dal suo discepolo VINCENZO VIVIANI, a cui si deve la versione più popolare degli *Elementi* di EUCLIDE; narrerei poi come, con l'elevarsi del livello della cultura scientifica e, in conseguenza, dell'insegnamento, questo gran libro abbia cessato di essere testo per lezioni universitarie per divenire croce o delizia degli studenti secondari e come il suo posto sia stato successivamente occupato dai seguaci di DESCARTES, a cui devesi la prima esposizione metodica della geometria analitica, da EULERO il popolarizzatore (nel senso più elevato della parola) delle dottrine dovute al genio di NEWTON e LEIBNIZ, e poi da LAGRANGE, maestro insuperabile di eleganza sostanziale e formale, da CAUCHY, l'instauratore del rigore, e da una plejade brillante di matematici di gran valore, alla cui azione sommamente benefica si deve se l'istruzione matematica di tutti i gradi raggiunse, dopo la metà del secolo scorso, uno sviluppo ed un'altezza capaci di soddisfare ogni ragionevole pretesa.

16. — Se non che, il mirabile slancio della nostra scienza in questi ultimi dieci lustri trascinò alcuni animosi ad oltrepassare un limite in cui il desiderio doveva ragionevolmente acquetarsi.

---

(1) Questa circostanza è narrata dal FAGNANO stesso in una lettera scritta a J. RICCATI, addì 7 Giugno 1722 e che vedrà la luce, assieme a molte altre, nel T. III delle *Opere complete del conte di Fagnano*, attualmente in corso di stampa (v. infatti p. 162; 1935).

Digitized by Google

Così l'insegnamento della Geometria analitica, cessando di essere informato al concetto di presentare tale disciplina come una preziosa ausiliare nell'investigazione delle proprietà dell'estensione figurata, fu da taluni concepito come diretto, in ultima analisi, a compilare delle raccolte ben ordinate di formole dotate di perfetta generalitá; ma queste finirono per divenire di tale complicazione, da riuscire di scarsa utilità nelle applicazioni più comuni e frequenti.

Così alcuni corsi di Geometria projettiva, invece di limitarsi all'esposizione delle proprietà fondamentali e delle prime applicazioni della corrispondenza projettiva, assunsero proporzioni così esagerate che quello su cui io subii l'esame universitario conteneva un'estesa esposizione delle proprietà della complicatissima configurazione che ha per nocciolo l'esagrammo di PASCAL.

Così l'insegnamento del Calcolo infinitesimale invece di avere per precipuo scopo di addestrare nella conoscenza e nell'impiego delle due fondamentali operazioni «differenziare» e «integrare», nelle mani di qualcuno si trasformò in una serie di proposizioni generalissime, concernenti gruppi di punti e funzioni, che solo qualche specialista avrebbe poi incontrato nel proprio cammino, e di sottili discussioni intorno alla validità di regole che nei casi comuni sono sempre applicabili. Ben altra strada si deve battere da chi intende non solo d'*insegnare*, ma anche di *far amare* quel mirabile strumento che è il calcolo infinitesimale; e tale via è chiaramente delineata dalla storia, la quale insegna che se l'infinito potè debellare l'opposizione mossa da coloro che ne trovavano vacillanti le basi dottrinali, fu soltanto perchè LEIBNIZ e NEWTON, HUYGENS ed i BERNOULLI dimostrarono sopra splendidi esempi che esso porgeva il mezzo per risolvere una miriade di questioni fondamentali, non solo di geometria, ma di meccanica e fisica.

17. — Come corollario di questa condizione di cose accade che alcuni giovani laureati nelle nostre università, chiamati ad insegnare nelle scuole secondarie quando avevano la loro mente polarizzata (per così dire) secondo un asse critico, giunti ad una cattedra di scuola media preferirono attardarsi in lunghe discussioni sopra i postulati della geometria e sopra il concetto di numero, piuttosto che far capire, sopra molti e svariati esempi, tutta la bellezza di una teoria matematica, tutta la forza dei metodi da essi usati: o anima profetica di LEONARDO da VINCI, come giudicheresti tu un tale metodo didattico, tu che raccomandavi di «mettere di sotto a ciascuna proposizione li sua giovamenti, a ciò tale scienza non sia inutile»?

Ora — sarebbe vano negarlo e poco onesto nasconderlo — questo indirizzo didattico, per quanto inspirato ai più elevati e sani ideali, per quanto non adottato nè approvato da tutti, ha creato attorno a noi un'at-

Digitized by Google

mosfera di poca simpatia e di mal celata opposizione. Per ciò, mentre la sublime altezza delle ultime ricerche matematiche, scavando un profondo abisso fra la nostra scienza e la realtà, isolava sempre più i matematici dal resto del mondo, l'egemonia sempre più prepotente che essa, nella sua forma più generale, astratta e (per dir tutto) meno amabile, conquistava in tutti gli ordini di scuole, faceva sorgere un'opposizione sorda, di rado confessata ed appunto per ciò più temibile della guerra aperta e leale, opposizione la quale spia ogni occasione per scoprire e porre in azione le proprie batterie. Chi ne voglia una prova non ha che rievocare il ricordo dello spettacolo che si ebbe quando un matematico, tuttora vivo e vegeto, pari ai grandissimi, con una di quelle « boutades » che contribuirono a farlo assurgere ad una grandissima notorietà, disse non essere il caso di affaticarsi a discutere il grado di verità dei principii della matematica, che altro non sono se non *comode ipotesi*. Si videro allora filosofi e tecnici precipitarsi con gioia feroce, qual muta di cani sopra il daino ferito, proclamando giunta l'ora di fare discendere la matematica dall'altare su cui da secoli veniva venerata; e noi li trovammo sordi alle nostre repliche che, quantunque la matematica non sia una dottrina *rivelata* ma una scienza *umana*, alle *comode ipotesi* su cui essa riposa l'uomo è debitore della facoltà, che direbbesi *sovrumana*, da lui posseduta di spiegare e prevedere fatti naturali che si svolgono, non soltanto in questo piccolo mondo in cui viviamo, ma nell'ambito sconfinato dei cieli; chè, non è forse grazie ad essi che HAMILTON potè predire il fenomeno della rifrazione conica, che MAXWELL ebbe la forza di gettare le basi dottrinali delle celebri esperienze di HERTZ e che LEVERRIER giunse alla scoperta di un pianeta sfuggito a tutti gli osservatori precedenti?

18. — Dell'ostilità contro la scienza a cui dedicammo la vita, la manifestazione, a parer mio, più dolorosa e nefasta sta nell'incessante sforzo che si va facendo per sottrarre alla nostra sfera d'influenza coloro che si avviano verso la scienza applicata, sforzo che merita la massima attenzione di tutti quelli a cui preme che la patria nostra consegua, in tutti i campi in cui si esplica l'umana attività, l'alto livello che per essa sognarono coloro che sparsero lacrime e sangue per farla una e libera.

Affinchè ciò avvenga anche nel regno del cemento e della macchina è, per consenso universale, indispensabile che teoria e pratica procedano con quel perfetto accordo che regna fra la mente che ordina ed il braccio che esegue. Gli è quanto ha lucidamente veduto il pensatore dalle più geniali intuizioni, il primo scienziato moderno, LEONARDO DA VINCI, il quale ammoniva « studia prima la scienza e poi seguita la pratica avuta da essa scienza »; e rinforzando soggiungeva: « quelli che s'innamoran di pratica senza scienza sono come 'l nocchiero che entra

Digitized by Google

in navilio, senza timone e bussola, che mai ha certezza dove vada»; e lumeggiava meglio il proprio concetto affermando che «la scienza è il capitano e la pratica sono i soldati».

Che quel grande vedesse giusto, in questa come in tutte le altre circostanze, è dimostrato dalla storia, che prova come le nazioni che seppero emergere sopra le altre in tutti i campi della tecnica sono appunto quelle in cui la scienza pura era in maggior floridezza e l'insegnamento era concentrato nelle mani dei teorici.

19. — Si ricordi, infatti, come l'istituzione che servì di prototipo a tutti i politecnici del mondo sia quell'*Ecole polytechnique*, concepita e fondata nell'epoca della rivoluzione francese da scienziati quali MONGE, LAGRANGE e LAPLACE. Che le discipline più astratte abbiano avuto ivi nell'origine una parte predominante è noto a tutti; che tale indirizzo sia stato sempre conservato, malgrado le reiterate pressioni dei pratici (1), può riconoscerlo chiunque percorra gli ultimi programmi (2) di quella scuola; che mirabili siano stati i risultati ottenuti è attestato dal fatto che quasi tutti i più eminenti scienziati francesi del secolo scorso potevano fregiarsi (ed erano superbi di farlo) dell'epiteto di «ancien élève de l'Ecole polythechnique» ed è confermato dal fatto (segnalato recentemente dal POINCARÉ) (3) che l'Accademia delle scienze contava nel 1902 non meno di 26 membri usciti da quella scuola e che di questi se ne trovavano anche nell'Accademia francese, nell'Accademia delle Inscrizioni e persino in quella delle Scienze morali e politiche.

20. — Nè si creda che sia questo un fatto sporadico da cui sarebbe imprudente trarre alcuna conseguenza generale, chè esso è pienamente conforme ad altro che mi sia lecito citare. Chi non ha consacrato qualche giorno dei suoi ozi autunnali a visitare la vicina Svizzera? Chi non ha ammirati i meditati ardimenti di ingegneri che riuscirono a far strisciare la vaporiera con passo fermo lungo le più erte pendici, facendola costeggiare con sicura baldanza i più spaventosi precipizi, penetrare nella profondità delle viscere della terra ed uscire all'aperto fra nevi eterne, ad interrompere con il suo rombo di guerra ed il suo squillo di

---

(1) Gli è intorno al 1850 che furono più violenti i tentativi per abbassare il livello degli studi teorici della Scuola politecnica, come si può vedere da alcuni articoli polemici pubblicati in quel torno di tempo nelle *Nouv. Ann. de mathématiques;* fra gli argomenti usati dai difensori della teoria va ricordata la traduzione francese della *Commentatio de matheseos sublimioris utilitate* di EULERO inserita nel T. XII (1853) del periodico succitato. Cfr. anche A. GENOCCHI nel t. IV (1871) del *Bull. di bibl. e storia* ecc. p. 374-376.

(2) Cfr. *Journal de l'École polytechnique*, 2e sér., XVI Cah., 1910.

(3) H. POINCARÉ, *Savants et écrivains* (Paris, 1910), p. 265.

Digitized by Google

vittoria i solenni silenzi alpini, un tempo squarciati soltanto dal fragore delle valanghe o dalla timida campanella di qualche capretta sperduta?... Ora se si tenta di risalire dagli effetti alle cause, non si tarda a riconoscere che queste grandi opere, imperituri titoli di gloria per gli ingegneri svizzeri, sono altrettanti diplomi di benemerenza per la Scuola da cui essi sono usciti, per il Politecnico di Zurigo (1). Ebbene, tale scuola possiede le più elevate tradizioni scientifiche; ivi le astratte concezioni dello Staudt sopra la pura geometria di posizione, per bocca del REYE si diffusero in tutto il mondo ed esercitarono tale influsso sopra il CULMANN da indurlo a concepire la più giovane delle scienze matematiche applicate, la statica grafica; ivi la geometria descrittiva raggiunse per opera del FIEDLER un tal grado di sviluppo teorico da assorbire nel proprio seno la geometria di posizione; ivi infine matematici « purissimi », di fama mondiale, quali lo SCHWARZ, il CHRISTOFFEL, il FROBENIUS mostrarono come sotto uno stesso tetto potessero vivere in pieno accordo, aiutandosi scambievolmente, discipline fra loro eterogenee, quali la scienza delle costruzioni e la teoria delle forme, la teoria dei gruppi e la meccanica applicata.

Sgraziatamente tali elevatissimi concetti didattici, praticati nella terra che molti si compiacciono di considerare come animata soltanto dal più gretto spirito commerciale, non trovarono dappertutto favorevole accoglienza. Chi, infatti, crederebbe che un geometra di altissimo valore, di cui ha data recente l'ora luttuosa della morte, il WEINGARTEN, sia stato costretto ad abbandonare la cattedra da tempo occupata nel Politecnico di Berlino, perchè aveva con dolore constatato come la propria azione didattica fosse incessantemente ostacolata dai « tecnici » rifuggenti e spregiatori di ogni sorta di considerazioni teoriche? (2). Eppure in più di un'occasione il WEINGARTEN seppe rettificare gravi errori commessi da ingegneri che non avevano la necessaria familiarità col maneggio dell'analisi, mostrando così che egli era meritevole di essere, non solo un ornamento, ma un prezioso coefficiente per una scuola di applicazione.

21. — Io temo che alcuni, ascoltando questo mio « elogio » della scienza pura, sorrideranno pensando che esso non è se non il riflesso di una mia attitudine mentale a tutti nota e che io non posso nè voglio negare. Tale obbiezione io mi sono già rivolta; ma mi fu facile di rico-

---

(1) Si aggiunga che il traforo del Sempione è opera di antichi alunni del Politecnico di Zurigo, come venne esplicitamente constatato durante le feste inaugurali della più recente via di comunicazione attraverso le Alpi.

(2) J. LÜROTH, *Julius Weingarten* (Bollettino di bibl. e storia delle scienze mat. T. XII, 1910, p. 66).

Digitized by Google

noscerla infondata grazie ad una preziosa testimonianza che inaspettatamente mi giunse dal di là dell'Atlantico (1). Ed invero, dal resoconto di un'importante adunanza d'insegnanti che si tenne recentemente in una città degli Stati Uniti, io appresi come colà sino al 1885, nella preparazione degli ingegneri, avesse dominato il così detto « sistema inglese », caratterizzato da un'illimitata considerazione per la coltura pratica; ma che poi si preferì il « sistema franco-tedesco », cioè una preparazione tecnica avente per proprio fondamento una solida ed ampia coltura scientifica. Ebbene, tale nuova orientazione venne determinata dal fatto che i direttori dei grandi opifici avvertirono l'imprescindibile necessità di tenere a propria disposizione ingegneri aventi l'attitudine, non solo di presiedere ad una cospicua azienda industriale, ma anche di potere sperimentare e poi applicare sistemi di produzione totalmente nuovi; e l'esperienza ha dimostrato che soltanto coloro che dispongono di una solida istruzione scientifica hanno la forza ed il coraggio di abbandonare senza rimpianti le vecchie strade per quelle che, grazie alla loro novità e freschezza, sono soltanto capaci di assicurare l'incontrastata supremazia nel campo industriale, aspirazione suprema dei Nord-Americani. E se si riflette che nella lotta per tale supremazia che si combatte attualmente fra la Germania e l'Inghilterra, la vittoria pende a favore della prima grazie al suo sistema d'istruzione che ora l'altra si sforza d'imitare (2), si vedrà che la decisione presa al di là dell'Oceano è inspirata a quel senso pratico che caratterizza la razza anglo-sassone e non è difficile preconizzare che essa sia foriera di nuove vittorie nel regno della tecnica.

22. — L'Italia che, non appena ricostituita a nazione, chiamò a capo dei suoi maggiori politecnici matematici sommi come FRANCESCO BRIOSCHI e LUIGI CREMONA, se vuol conservarsi fedele alle sue gloriose tradizioni, deve manifestarsi francamente ostile a chi vorrebbe abbassare la preparazione scientifica degli ingegneri ad un livello che può appena bastare a fare dei capi-mastri e dei capi-fabbrica. Ora quale còmpito più nobile per la nostra Società di farsi iniziatrice e fautrice di un compromesso fra opposte tendenze, di presentare lo schema di un contratto bilaterale, impegnativo pei matematici a relegare nei gabinetti dei pensatori solitari quelle teorie iperastratte che, oggi almeno, non presentano alcun punto di attacco con la pratica; impegnativo pei pratici a mante-

(1) Veggasi il volume *Symposium on mathematics for engineering students*, estratto da *Science*, vol. XXVIII, 1908.

(2) Si ricordi la legge intitolata « Technical education Act », con cui l'Inghilterra ha riconosciuto le deficienze del suo sistema di educazione tecnica ed ha deciso di porvi riparo.

Digitized by Google

nere il contatto con la scienza pura, onde non vedersi negato il prezioso sussidio dei metodi a cui la fisica, l'astronomia, la tecnica sono debitrici dei loro più clamorosi progressi? Così facendo (tale è la mia salda convinzione) ci sará dato di accelerare l'incessante moto in avanti della specie umana, di far sì che i figli oltrepassino i confini raggiunti dai loro padri.

23. — Per dar prova dello spirito conciliativo che ci anima cominciamo noi dal dichiarare che — *senza nulla sagrificare delle qualità di rigore, di logica, di precisione, perdendo le quali la matematica cesserebbe di esistere* — non ci rifiutiamo di sostituire ai metodi « purissimi », vanto e gloria dei nostri predecessori, i procedimenti « misti » che, per essere più spicci, sono meglio consentanei ai gusti dell'affrettata epoca moderna, e che siamo disposti a far del nostro meglio affinchè la nostra scienza, tratta dalla vita, alla vita ritorni, usando nell'insegnamento di tutti quegli artifici ausiliari capaci di riavvicinare la matematica alla realtà. Per ciò daremo il massimo sviluppo ai metodi grafici che, oltre essere impressionanti e suggestivi, porgono agli abili disegnatori i mezzi per raggiungere quel grado di approssimazione a cui arriva un esperto calcolatore. Inoltre nell'insegnamento della Geometria piana faremo uso della « piegatura della carta », come ci viene raccomandato da un nostro collega indiano (1), ed in quello della Geometria solida dello stereoscopio diffuso in tutto il mondo civile da una Casa di commercio, di cui vi farei il nome se non temessi di passare per un commesso viaggiatore travestito da conferenziere. Lasceremo ai « raffinati » l'uso delle Tavole di logaritmi a *sette* o più decimali, contentandoci che i nostri allievi sieno familiari con quelle a *quattro*. Insegneremo poi, insieme alla disposizione e l'uso delle Tavole dei logaritmi, la struttura ed il maneggio dei regoli calcolatori e, insieme alle formole di quadratura, la teoria e la pratica dei planimetri e degli integrafi. Impegnamoci ancora di adoperarci con ogni nostra possa per giungere ad ottenere che nell'insegnamento medio vengano introdotti la rappresentazione grafica delle più semplici funzioni e i rudimenti della geometria cartesiana, non solo per far cessare lo sconcio che la patria nostra si trovi a questo riguardo alla retroguardia di tutte le nazioni civili, ma anche per contribuire a che venga soddisfatto il giusto desiderio di molti che, nell' istruzione degli ingegneri, sia anticipato l'istante in cui si inizia lo studio delle materie tecniche. E promettiamo, qualunque sia il livello della scolaresca

(1) T. SUNDARA ROW, *Geometric Exercices in paperfolding* ed. by W. W. BEMAN and D. E. SMITH, II ed. (Chicago, 1905). V. anche G. C. YOUNG and W. H. YOUNG, *Der kleine Geometer*, deutsch von S. und F. BERNSTEIN (Leipzig und Berlin, 1908).

Digitized by Google

affidataci, di moltiplicare le applicazioni delle teorie che esporremo, persuasi come siamo che esse sole siano capaci di far gustare, comprendere, amare le materie più astratte, attingendo per ciò ispirazioni e consigli alle scienze della natura, alla vita sociale che attorno a noi si agita e freme, nonchè alle opere dei nostri maggiori, vere miniere, oggi lasciate in uno stato di deplorevole abbandono e di riprovevole dimenticanza.

24. — Egregi Colleghi, se a siffatti concetti ispireremo la nostra opera didattica, noi insegnanti in ogni grado di scuole, finiremo senza dubbio per ottenere che venga evitato il temibile e temuto scisma fra teorici e pratici. Ma non nutriamo la stolta pretesa che le conseguenze di tale nostra attitudine trovino subito generale adesione e, tanto meno, approvazione ufficiale. Anche se l'una e l'altra sembreranno mancarci, continuiamo, senza intempestivi scoraggiamenti e con piena coscienza di propositi, la nostra azione modesta, tranquilla, incessante, sorretti dall'altruistico elevato pensiero che altri coglierà i frutti delle piante da noi seminate con intensa fede e coltivate con fervido amore, avendo sempre presente la massima profondamente confortatrice che sta scritta in un Grande Libro: *Le nostre opere ci seguiranno.*

XXIII.

LE GLORIE MATEMATICHE DELLA GRANBRETAGNA

Comunicazione fatta in francese a Londra il 4 aprile 1913 all'*International Congress of historical Studies*; tradotto in inglese col titolo *The achievements of Great Britain in the realm of Mathematics* (Mathematical Gazette Nn. 114 e 115, 1914-15).

1. — Gli abitanti dei tre Regni che oggi costituiscono la Granbretagna non ebbero contatti con le grandi civiltà dell'antico Oriente e nemmeno si avvantaggiarono di alcuna relazione diretta, storicamente, provata, con il popolo greco, con quella razza prediletta della Natura che seppe dare a tutte le scienze ed a tutte le arti fondamentali di tale solidità da riuscire, per venti secoli, ad opporsi ad ogni tentativo d'innovazioni radicali.

L'invasione celtica, accaduta circa mille anni prima dell'E. v., affidò ai Druidi, i celebri sacerdoti della religione dominante, la parte di conservatori, diffonditori, accrescitori del sapere; ma quali fossero l'entità, la fisonomia, la tendenza della scienza di quel tempo è totalmente ignoto.

Digitized by Google

GIULIO CESARE, che visitò l'Inghilterra un mezzo secolo a. C. come duce dell'esercito conquistatore e ne lasciò la più antica descrizione a noi nota, nulla ha riferito intorno alla vita intellettuale degli antichi Britanni. Una seconda invasione romana, avvenuta un secolo più tardi e seguita da circa cinquant'anni di lotte, assicurò a Roma il dominio sopra l'Inghilterra per circa tre secoli (è noto infatti che le ultime legioni lasciarono le isole conquistate nel 407 dell'E. v.) e, per compenso, concesse alle regioni occupate un periodo di pace e di relativa civiltà.

Volte in fuga le aquile romane, la Granbretagna destò la cupidigia di pirati oriundi dalla Germania Settentrionale, i quali, nel secolo che corre fra il 350 ed il 450, vi fecero numerose e più o meno fortunate incursioni, tentarono di introdurvi il Cristianesimo e, dopo una lotta bicentenaria, intorno al 600 dell'E. v., ne compirono la conquista. Essi però non tardarono a venire assorbiti dagli indigeni, i quali ai nuovi venuti seppero imporre la propria religione, le proprie leggi e persino la propria lingua, ben comprendendo che non era dai loro ospiti non desiderati che potevano ragionevolmente attendere di venire tratti dallo stato di barbarie in cui giacevano immersi.

Qualche raggio di luce giunse ad essi per il tramite dei missionari, inviati nel 597 da Papa GREGORIO MAGNO, i quali, per primi, portarono e diffusero al di quà della Manica libri sacri e profani. D'altra parte le predicazioni fatte a Kent da SANT'AGOSTINO arcivescovo di Canterbury, ebbero tale efficacia che, un secolo più tardi, era scomparsa dal paese ogni traccia di paganesimo.

Gli è nei monasteri che trovavano allora la pace ed il raccoglimento necessari alla meditazione coloro che coltivavano le lettere e si consacravano alle serene elucubrazioni scientifiche, Ed è appunto in un chiostro, situato ai confini della Scozia con l'Inghilterra, che visse il Venerabile BEDA (672-735), le cui opere servono a misurare l'astensione delle sue cognizioni aritmetiche e stanno a provare quanto egli fosse animato dal nobile desiderio di renderle accessibili a persone di tutte le classi sociali; si può dire che i suoi scritti *De computo vel loquela digitorum* e *De ratione unciarum,* per quanto oggi appajano di contenuto modesto, inaugurino la letteratura matematica del popolo inglese.

2. — L'esempio di BEDA venne subito seguito da ALCUINO (735-805), nelle cui opere, prevalentemente storiche e teologiche, il matematico scopre con viva soddisfazione una collezione di problemi aritmetici destinati all'istruzione della gioventù, come chiaramente risulta dal titolo che essa porta: *Propositiones ad acuendos iuvenes.*

Ma poi, per lungo volgere d'anni, la storia non riesce a segnalare l'apparizione di alcun nuovo elemento nella serie dei matematici inglesi.

Digitized by Google

Forse tutte le energie nazionali erano allora assorbite dalle incessanti lotte, rese necessarie dalle troppo frequenti incursioni che facevano i pirati provenienti dalla Danimarca e dalla Norvegia, le quali cessarono soltanto quando gli uomini venuti dal Nord poterono cantare gli inni di vittoria sopra la popolazione nativa: allora (1066) cominciò la vera storia della razza inglese come popolo e della Granbretagna come potenza europea. Siffatto profondo rivolgimento politico non potè strappare dalle mani del clero il monopolio del sapere ed il governo della pubblica istruzione, nè privò la lingua latina dell'invidiabile prerogativa di fungere quale normale veicolo di trasmissione del pensiero; d'altra parte la caratteristica frase *an unlearned king is a crowned ass* attribuita ad ENRICO I, uno dei primi re normanni, sta a provare come sotto il nuovo regime politico, la cultura poteva piuttosto sperare incoraggiamenti ed ajuti, che temere oppressione e dispregio; ed infatti poco dopo sorgeva l'Università di Cambridge e Scuole e Collegi venivano fondati ivi e ad Oxford.

3. — Le comunicazioni intellettuali, stabilitesi all'epoca delle Crociate fra i paesi meridionali d'Europa e l'antica Grecia per il tramite degli Arabi, ebbero una ripercussione anche in questo estremo angolo abitato dagli Anglo-Sassoni; chè un dotto monaco inglese, ATHELARD of BATH, nel 1020, traduceva dall'Arabo in Latino, a vantaggio dei propri connazionali, gli *Elementi* di EUCLIDE. Ora se si pensa alla costante fortuna, che nella Granbretagna arrise e tuttora non manca a questa grande opera didattica, se si fa un computo mentale dei milioni di giovani che in tutta Europa se ne servirono come libro di testo e si compila un catalogo approssimativo delle innumerevoli ricerche scientifiche e critiche che su di essa vennero fatte o che da essa presero le mosse, è forza e dovere annoverare l'apparizione di quella versione come un avvenimento di primo ordine nella matematica, non immeritevole di esser posto allo stesso livello della comparsa del *Liber Abaci* di LEONARDO PISANO. Sarebbe estremamente interessante il sapere quale accoglienza abbia fatto l'Inghilterra al messaggio, che, attraverso ai secoli, le inviava uno dei più grandi scienziati che abbia prodotto il fecondo suolo dell'Ellade, ed il precisare il momento in cui ne fu percepibile la benefica influenza; sgraziatamente

> There are the questions nobody can answer
> These are the problems nobody can solve.

RUGGERO BACON (1214-1294) il dotto e geniale *doctor mirabilis*, che tanto efficacemente contribuì ai progressi di vari rami della Fisica, nulla lasciò scritto (almeno se, come è forza, ci si limita alle sue opere a stampa) che possa servire a gittar qualche luce sull'argomento, quantun-

Digitized by Google

que professasse per le scienze esatte una tale estimazione che non esitò a proclamare che *mathematics should be regarded as the alphabet of all philosophy*. Lo stesso deve pur troppo ripetersi riguardo al suo collega JOHN PECKHAM (1240-1292) ed al giustamente celebre JOHN HOLYWOOD (m. 1256), ben noto sul continente sotto il nome di Sacrobosco, una delle più eminenti personalità apparse in Inghilterra durante le tenebre medioevali, a cui l'abituale soggiorno all'estero vietò di esercitare in patria quel benefico influsso che potevasi da lui ragionevolmente attendere.

4. — Dell'Arcivescovo di Canterbury THOMAS BRADWARDIN (1290-1359), l'ammirabile ed ammirato *doctor profundus*, il quale, grazie alle sue ricerche sopra la prospettiva e sui poligoni stellati ha un posto nella storia della Geometria, sono a tutti note alcune opere didattiche, che possono oggi servire a misurare la quantità e la qualità di matematica che nel secolo XIV veniva insegnata nelle Università anglo-sassoni. Ma sarebbe desiderabile ed è vivamente e generalmente desiderato vengano investigati da competenti e fors'anche pubblicati alcuni suoi scritti che, a quanto si assicura, giacciono sepolti, in immeritato oblio, in biblioteche della Granbretagna. Altrettanto dicasi riguardo a due professori di Oxford RICHARD OF WALLINGFORD (circa 1326) e JOHN MAUDITH (circa 1340), le cui opere trigonometriche sono imperfettamente note e meriterebbero di venir poste in luce completa.

Tali invocate ricerche sopra questi due geometri presumibilmente condurranno anche alla scoperta di altri scienziati, oggi dimenticati, capaci di colmare la lacuna che presenta a questo punto la storia della matematica inglese, giacchè i due professori testè ricordati appartengono alla prima metà del secolo XIV, mentre bisogna raggiungere l'ultimo quarto del secolo XV per incontrare menzione di una nuova personalità matematica. Alludiamo a CUTHBERT TONSTALL (1474-1559), il quale, dopo di avere compiuti i propri studi regolamentari a Cambridge ed Oxford, andò a Padova, attratto dall'alta e meritata fama di quell'Università, ed ivi conseguì la laurea in giurisprudenza. Durante il suo soggiorno in Italia, s'interessò vivamente anche di scienza; in particolare meditò a fondo sulle opere di LUCA PACIOLI; anzi, tanto se ne entusiasmò che prima di dedicarsi completamente agli affari politici e religiosi, a cui aveva deciso di consacrare tutte le proprie forze, volle dare *a farewell to the science* scrivendo un volume destinato nella massima parte a rendere edotti i propri connazionali dei principii dell'algebra, nuova scienza che aveva mirabilmente prosperato nel *bel paese*, durante il periodo storico interposto fra LEONARDO FIBONACCI e LUCA PACIOLI. Ebbe così origine l'opera *De arte supputandi libri quattuor* (1522) la quale fece co-

Digitized by Google

noscere favorevolmente chi la scrisse non solo in patria, ma a tutti i dotti d' Europa.

5. — Il TONSTALL è forse il primo, ma certamente non l'unico scienziato che abbia disimpegnato l'ufficio d'intermediario, nel campo scientifico, fra l'Italia e l'Inghilterra; infatti, nella gloriosa epoca galileiana i rapporti intellettuali fra il vostro paese ed il mio furono continui ed intimi; ed ANTONIO FAVARO, il più profondo conoscitore di tutto quanto concerne la vita, le opere, la scuola del sommo fisico fiorentino ha esumati (1) i nomi di SEGETH, SOUTHWELL, WEDDERBURN, WHITE, WILLOUGHBY, i quali appartengono a personaggi che vennero ad attingere notizie dirette delle idee e delle opere del più grande maestro che allora vantasse l'Europa scientifica e si adoperarono a diffonderle fra i propri connazionali. Inoltre un eminente geometra di questo tempo, JAMES GREGORY (1638-1675), fece lunghi soggiorni in Italia, come attestano alcune sue lettere date alle stampe (2) ed il fatto che due opere vennero stampate una a Padova e l'altra a Venezia.

Ora se si riflette che nel brillante cenacolo di investigatori avente per centro GALILEO si elaborarono i metodi infinitesimali, nel cui maneggio si palesarono maestri BONAVENTURA CAVALIERI ed EVANGELISTA TORRICELLI, e si tiene presente che non molto dopo l'Inghilterra veniva concordemete acclamata creatrice del Calcolo flussionale, si impone allo storico il bellissimo problema di determinare quale e quanta sia stata l'influenza esercitata da GALILEO sopra NEWTON; problema che, se studiato con profondità e senza spirito di parte o preconcetti di nazionalità, ma con l'aspirazione unica di raggiungere il vero, condurrà senza dubbio a conclusioni importantissime, come sono tutte quelle capaci di projettare qualche raggio di luce sopra le recondite vie per le quali le grandi idee rinnovatrici raggiungono la loro completa maturità.

6. — Sembra che il lodevolissimo tentativo fatto dal TONSTALL, di rendere popolari fra i suoi connazionali i metodi ed i risultati dovuti a matematici continentali, non sia stato coronato che da mediocre successo, dal momento che, un po' più tardi (1540), un medico di corte, ROBERT RECORDE (1510-1558), poteva scrivere che gl'Inglesi, quanto ad intelligenza, erano superati da pochi popoli, ma che erano immersi in una

---

(1) Di inglesi appartenenti alla Scuola di GALILEI parla il FAVARO in parecchi Capitoli della serie *Amici e corrispondenti di Galileo* (pubblicata negli *Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*) e in molti passi degli *Scampoli galileani* (che egli va inserendo nelle *Memorie della R. Accademia di Padova*).

(2) L. J. RIGAUD, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century* (Oxford. 1841).

Digitized by Google

vergognosa ignoranza di quanto era stato fatto altrove nel campo scientifico. Ed appunto per toglierli da tale deplorevole stato, egli fece un'ottima esposizione di tutta l'aritmetica e vi diede il titolo significante di *The ground of arts;* è un'opera che viene tuttora ricordata con onore e citata in tutte le storie della matematica, perchè ivi si trova per la prima volta adoperato il segno di eguaglianza (=), oggi ancora in uso; come prova della lusinghiera accoglienza che essa ebbe si possono citare due opere congeneri che il RECORDE consacrò più tardi all'algebra ed alla geometria. Influenza di gran lunga maggiore esercitò sopra i suoi conterranei un notissimo matematico dell'epoca della regina ELISABETTA contemporaneo di BACONE e di SHAKSPEARE, WILLIAM OUGHTRED (1574-1660), il primo ideatore del regolo calcolatorio, l'egregio matematico la cui *Clavis mathematica* (ove trovansi usati, per indicare la moltiplicazione e la proporzione, i simboli $\times$, : :, che vennero poi generalmente accettati) è un eccellente trattato d'aritmetica che godè di una lunga e ben meritata fortuna, attestata dalle parecchie edizioni e traduzioni onde fu onorato, nonchè dal fatto che l'autore si decise a comporre un analogo volume avente per soggetto la trigonometria.

Con RECORDE ed OUGHTRED ci avviciniamo a grandi passi all'epoca in cui la matematica inglese lascia lo stato d'infanzia per quello di feconda virilità, in cui abbandona la condizione umile di scolara per assurgere a quella imponente di maestra. Il trapasso è contrassegnato da due nomi: JOHN NAPIER (1550-1617) e THOMAS HARRIOT (1560-1621). Il nome del primo (di cui i biografi ricordano numerose peregrinazioni in Francia, in Germania, ed in Italia) è indissolubilmente collegato al calcolo logaritmico, che egli, col valido concorso del suo instancabile compatriota HENRY BRIGGS (1561-1631), ha posto a disposizione di tutti i calcolatori del mondo; non pago di questo insperato ajuto da lui dato ai matematici costretti ad eseguire lunghe calcolazioni aritmetiche, egli, applicando genialmente la numerazione binaria, insegnò nella sua *Rabdologia* un'ingegnosa procedura di calcolo strumentale (1); chi, finalmente, ignora come a lord NAPIER la trigonometria sferica sia debitrice di alcune nuove ed importantissime formole costantemente in uso?

Più discussa è la posizione scientifica che spetta al secondo dei matematici surricordati; chè alcuni, in base alla sua postuma *Artis analyticæ praxis* (1631), considerano l'HARRIOT come un emulo di VIÈTE, mentre altri ne fanno un discepolo, per non dire un plagiario, dell'eminente ma-

(1) L'apparato inventato da NEPERO si trova oggi esposto a Londra nel *South Kensington Museum*. (Quanto è qui accennato trovasi svolto nell'articolo *Veicoli al servizio dei calcolatori* pubblicato nel Vol. XXVIII 1920) di *Scientia*. 1935).

Digitized by Google

tematico francese; la questione di chi sia nel vero non è ancora definitivamente risoluta, perchè nel dibattito s'infiltrarono molti elementi suggeriti da boria nazionale, nè forse potrà esserlo sino a che non siano state studiate e forse rese di pubblica ragione le opere manoscritte dell'HARRIOT, religiosamente conservate nella biblioteca del *British Museum:* un primo esame di tali manoscritti, fatta una decina di anni fa da un mio antico discepolo che già possiede un nome fra gli storici della matematica (1), ha già dato tali risultati da incoraggiare a ripeterlo con maggiore agio e profondità. Pel momento a noi basti rilevare che all'HARRIOT risale l'introduzione del nome *æquatio canonica,* nonchè quella dei simboli ($>$, $<$) ancora in uso per indicare le relazioni di *maggiore* e *minore.*

7. — A queste indagini, che si riferiscono al numero ed alla misura, ne fanno riscontro altre relative all'estensione figurata. Ma, mentre le prime possiedono caratteri di vera e propria originalità, queste rivestono, in gran parte, l'aspetto di commenti oppure di investigazioni filologiche e critiche.

Della prima specie sono le lezioni tenute ad Oxford da HENRY SAVILLE (1549-1622), il munifico fondatore di due cattedre matematiche in quella Università, e quelle professate di più tardi a Cambridge da ISAAC BARROW (1630-1677), il maestro, l'amico, il precursore del più grande genio che l'Inghilterra abbia dato alle scienze esatte.

Si accostano invece alle consuete fatiche degli eruditi le ottime edizioni di ARCHIMEDE. di ARISTARCO, di TOLOMEO dovute al celebre JOHN WALLIS (1616-1703), uno dei più attivi ed originali investigatori che ricordi la storia, l'unico noto prodigioso calcolatore mentale che abbia saputo portare qualche contributo essenziale alle nostre cognizioni matematiche.

Gli è probabilmene dallo studio indefesso sopra gli scritti scientifici della classica Antichità, che il WALLIS trasse l'ispirazione e la forza per scrivere la sua famosa *Arithmetica infinitorum,* efficacissima preparazione ai nuovi calcoli che stavano per sbocciare, nella quale gli storici trovano per la prima volta il simbolo consueto (∞) per designare l'infinito, mentre gli odierni espositori dell'analisi ne traggono l'elegantissima espressione di π come prodotto di infiniti fattori. Al WALLIS appartiene poi la scoperta della prima superficie algebrica non di rivoluzione di un grado superiore a due (alludo al ben noto *cono-cuneus*), a lui anche

(1) G. VACCA, *Sui manoscritti inediti di* THOMAS HARRIOT (*Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche*, t. V, 1902, p. 1-6).

Digitized by Google

il merito di avere collocato LORD BROUCKNER (1620-1684) nel posto a cui ha diritto nella storia della teoria delle frazioni continue e di avere salvato da irreparabile perdita l'ottimo trattato di trigonometria di JOHN CASWELL. Inoltre JOHN WALLIS, che ebbe molta parte nella fondazione della Società Reale di Londra, ha fatti valere i diritti di WILLIAM NEIL (1637-1670) alla scoperta della prima curva algebrica rettificabile algebricamente (la parabola semicubica) e quelli di CRISTOPH WREN (1632-1723) — il celebre architetto delle cattedrale di S. Paolo di Londra — riguardo alla rettificazione della cicloide ordinaria.

Tutto ciò, d'altronde, è conforme all'indole del WALLIS, il quale, a differenza della generalità de' suoi compatriotti, sentì e manifestò in ogni occasione un fervido interesse per l'evoluzione storica delle idee scientifiche: sia pure che nello scrivere il sue *Treatise on algebra, both theoretical and historical* (1673) egli non abbia saputo sempre vincere la propria predilezione pei connazionali e la propria ostilità verso gli stranieri, sicchè molte delle sue asserzioni vennero revocate in dubbio e molte delle sue conclusioni combattute con validi argomenti; rimane sempre un serio tentativo di fondere in un tutto organico la narrazione delle battaglie combattute con l'esposizione dei trofei delle conseguite vittorie, ond'è ben giustificato il rimpianto che il WALLIS abbia trovato, per questa faccia della sua attività in patria soltanto tiepidi ammiratori e scarsi seguaci.

Nè deve venire dimenticato o passato sotto silenzio che l'epoca in cui fiorì questo matematico è contrassegnata da un attivo e pacifico scambio d'idee attraverso la Manica, il quale riuscì utilissimo specialmente alla teoria dei numeri, e del quale esistono testimonianze impressionanti nel carteggio fra il sommo matematico francese FERMAT e sir KENELM DIGBY (1603-1665); inoltre il nome di JOHN PELL (1610-1685), dato da EULERO all'equazione fondamentale dell'analisi indeterminata di secondo grado, benchè assai poco appropriato, è prova della collaborazione che i matematici inglesi accordarono allora a quelli del continente, nell'intento di vincere gli ostacoli che si opponevano alla risoluzione di importanti questioni poste in quel tempo all'ordine del giorno.

8. — Lo scettro matematico passò in Inghilterra senza contrasti dal WALLIS all'uomo destinato a far assurgere le scienze esatte ad un'altezza che mai doveva venir superata: ISAAC NEWTON (1643-1727), il genio sovrano a cui tuttora s'inchinano con la più profonda riverenza gli scienziati di tutto il mondo.

Se egli divide con LEIBNIZ il merito di avere insegnato un procedimento sicuro per trattare con rigore il trascendentale concetto di «infinito», sì da ridurlo ad essere un prezioso strumento per investigare

Digitized by Google

quanto concerne lo spazio in cui viviamo, i moti di cui esso è teatro e le forze che in esso agiscono, a lui solo la sorte concesse di legare il proprio nome alla scoperta della « gravitazione universale » concetto fondamentale che LAGRANGE si rammaricava di non essere stato chiamato a rivelare all'umanità. I suoi *Philosophiæ naturalis Principia mathematica* (1687) vengono da molti, e non certo a torto, giudicati per la più eminente produzione dello spirito umano; le sue ricerche sopra la classificazione delle cubiche piane schiusero ai geometri un nuovo campo d'indagini e, mostrando la straordinaria fecondità del concetto di « projezione centrale », prelusero e prepararono l'odierna geometria projettiva; la sua *Ottica*, malgrado il punto di vista radicalmente mutato, è un'opera tuttora consultata e citata che si dimostra oggi ancora ben degna dell'ammirazione che suscitò al suo apparire; e persino dall'*Aritmetica universale*, — opera didattica pubblicata all'insaputa, fors'anche contro la volontà dell'autore, — emana ancor tanta luce che, percorrendola, viene fatto di ripetere l'antica osservazione, che non vi è soggetto, per quanto umile e trito, in cui lo sguardo acuto del genio non sappia ravvisare qualche faccia inesplorata e brillante.

Mentre il periodo storico in cui imperava il WALLIS fu caratterizzato dal buon accordo fra l'Inghilterra e gli altri paesi d'Europa, quello in cui regnò NEWTON fu teatro di una delle più lunghe e accanite contese scientifiche che ricordi la storia del pensiero umano; allora la Granbretagna scese in campo come un sol uomo per tutelare i diritti di proprietà di NEWTON sopra il calcolo infinitesimale, mentre la Germania tutta insorse per sostenere le pretese che accampava LEIBNIZ sopra il medesimo ritrovato. La storia definitiva di questo interessante dibattito non fu forse peranco scritta; ma ormai tutti sono d'accordo nel riconoscere che di furto o plagio non è il caso di parlare, trattandosi di due metodi — il metodo flussionale ed il metodo differenziale — che tendono allo stesso scopo, ma la cui metafisica (se mi è lecito così esprimermi) è radicalmente differente.

La profonda impressione prodotta dalle grandi scoperte di NEWTON sopra coloro che assistettero al loro apparire può valutarsi, tanto registrando i lavori che ne rampollarono, quanto tenendo conto di certi fenomeni, veramente patologici, prodotti dall'illusione che i nuovi metodi potessero venire usati con successo a proposito di qualunque questione. Fra essi il più curioso è forse quello offerto da un matematico tuttora citato, JOHN CRAIG, il quale, dodici anni dopo la comparsa dell'*opus magnum* di NEWTON, dava in luce un volume intitolato *Theologiae Christianae principia mathematica*, inteso a sostenere la tesi che la fede nella verità della religione di Cristo va diminuendo col quadrato del tem-

Digitized by Google

po e che, quindi, nel 3150 non se ne troverà più traccia; l'avvenire dirà se il CRAIG sia stato un indovino veramente ispirato od un semplice pazzo.

9. — L'influsso altamente benefico, esercitato da NEWTON sul mezzo nel quale visse, si può misurare redigendo un catalogo delle opere di coloro che si proclamarono e furono suoi discepoli o seguaci. E poichè il tempo di cui dispongo non mi consente di parlare di tutti, sorvolerò sopra coloro che — al pari di JAMES STIRLING (1696-1770) e PATRIK MURDOCH (?-1744) — si sforzarono di spiegare i concetti e le idee del grande matematico o di colmare le lacune che avvertirono ne' suoi scritti e mi limiterò a ricordare tre eminenti indagatori, che seppero per qualche tempo conservare alla Granbretagna l'egemonia fisico-matematica, da essa conquistata grazie allo scopritore della gravitazione universale; alludiamo ad ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754), ROBERTO CÔTES (1682-1716) e BROOK TAYLOR (1685-1731).

Al primo la teoria delle probabilità deve molteplici perfezionamenti e notevoli progressi, avendo egli insegnato metodi per risolvere una folla di questioni che vi si riferiscono; il nome di lui è poi noto a chiunque siasi per poco occupato di teoria dei numeri complessi, grazie ad una relazione fondamentale di applicazione incessante; a lui finalmente spetta il merito di avere scoperta la formola che dà la potenza d'un polinomio, analoga a quella che poco prima NEWTON aveva trovata per la potenza d'un binomio.

Alla gloria del secondo, morto poco più che trentenne, basterebbero le parole pronunciate su di lui da NEWTON quale funebre elogio: *Had* CÔTES *lived, we have known something*. Egli fu uno dei primi che pensarono a comporre una raccolta di formole d'integrazione e la sua postuma *Harmonia mensurarum* (1722) attesta la vastità ed il successo dei suoi studi sull'argomento; in tale opera si trova poi il « pulcherrimum theorema » (usiamo le parole di ROBERT SMITH, che pubblicò quell'opera) formante sistema col teorema di DE MOIVRE che testè ricordammo.

Non meno grande, per fermo, di questi due è BROOK TAYLOR, a cui si è debitori di notevoli progressi compiuti dal calcolo differenziale (basti ricordare la formola che ne porta il nome) e dal calcolo integrale (integrazione di parecchie classi di equazioni differenziali), non che la creazione del calcolo delle differenze finite. Ma in altro campo differentissimo egli seppe affermarsi quale pensatore genialmente originale, cioè nella Prospettiva; le nuove basi su cui egli assise tale disciplina sono così ben scelte e solide che il compianto GUGLIELMO FIEDLER, senza conoscere il lavoro del TAYLOR, le elesse quando volle coordinare in un tutto organico i vari metodi della geometria descrittiva. Nè deve passar-

Digitized by Google

si sotto silenzio che i procedimenti escogitati dall'eminente geometra inglese parvero così belli ed importanti a LUIGI CREMONA, che egli credette prezzo dell'opera esporli nella propria lingua ad uso dei giovani suoi connazionali (1); perciò al volume del TAYLOR spetterebbe un posto fra i *Klassiker der exakten Wissenschaften*, che auguriamo non gli sia più oltre negato.

Devesi ora notare che i nuovi procedimenti di indagine matematica, scoperti da NEWTON e fervidamente coltivati dai suoi seguaci, non fecero diminuire negli Inglesi il culto da essi professato per gli antichi metodi geometrici, pei quali NEWTON stesso sentì e manifestò un'illimitata ammirazione. A dimostrarlo basta ricordare le meritorie fatiche del grande astronomo EDMUND HALLEY (1656-1742), al quale si è debitori, non soltanto di *standard editions* di APOLLONIO e MENELAO, ma anche di riuscitissimi tentativi per divinare e restituire alcuni scritti perduti dell'immortale geometra di Perga. L'esempio da lui dato venne seguito da parecchi egregi Scienziati, fra cui basti ricordare ROBERT SIMSON (1687-1786), SAMUEL HORSELEY (1733-1806), WILLIAM WALES (1734-1798). Nè va taciuto che il SIMSON mosse il primo passo verso la soluzione del più arduo e celebre enigma offerto dalla storia della matematica greca, quello, cioè, che consiste nel determinare il significato della parola «porisma» e nel divinare il contenuto della relativa opera di EUCLIDE: inoltre egli, con ottime edizioni e giudiziosi commenti agli *Elementi*, si adoperò efficacissimamente a diffondere fra i propri connazionali la conoscenza di un'opera didattica a nessuna seconda.

10. — Fra i commentatori di NEWTON (intesa la parola «commentatore» nel senso più ampio della parola) emerge per larghezza di vedute e profondità di dottrina il celebre professore dell'Università di Edinburgo COLIN MACLAURIN (1698-1746): a lui si deve un'esposizione completa delle scoperte fatte da NEWTON nel campo della filosofia naturale; a lui un trattato di *Algebra* che è un'illustrazione completa dell'*Aritmetica universale* di quel grande; a lui infine *A complete system of fluxions* (1742) che, onorato di una traduzione francese, valse a far conoscere, tanto nel Regno Unito quanto sul Continente, i metodi di calcolo nfinitesimale adottati generalmente in Inghilterra. Inoltre la sua *Geometria organica*, opera giovanile che passa fra i suoi scritti dotati di maggiore originalità, ha per punto di partenza la celebre generazione organica delle sezioni coniche ideata dal sommo autore dei *Prin-*

(1) MARCO UGLIENI (anagramma di LUIGI CREMONA), *I principii della prospettiva lineare secondo* TAYLOR (*Giornale di matematiche*, t. III, 1865, oppure *Opere matematiche* T. II).

Digitized by Google

cipia; e la memoria *De causa physica fluxus et refluxus maris,* premiata nel 1740 dall'Accademia di Parigi e tuttora ascritta fra i lavori classici relativi alla teoria dell'attrazione degli ellissoidi, è informata alle idee newtoniane ed è scritta nello stile degli antichi geometri, che NEWTON riteneva essere l'unico da usarsi dai matematici degni di tal nome (1).

Nelle sue fruttifere ricerche sopra la generazione delle curve piane MACLAURIN incontrò un emulo in WILLIAM BRAINKERIDGE *ecclesiae anglicanae presbyter,* ma del resto personalità scientifica assai oscura.

Invece, nei suoi studi intorno alle proprietà delle curve algebriche ed alla teoria delle equazioni, egli trovò un seguace, capace di soddisfare le più raffinate esigenze, in EDWARD WARING (1736-1798), uno dei più acuti e profondi matematici che annoveri la storia. Per chiarire i « considerando » di tale lusinghiera sentenza basta tenere presente che fu lui il primo a segnalare l'importanza e l'uso dell' « equazione ai quadrati delle differenze delle radici d'un'equazione algebrica », la quale, nelle mani di LAGRANGE, divenne poco dopo un mirabile strumento per separare le radici d'un'equazione numerica; a lui appartiene poi quella procedura per approssimare le radici d'un'equazione che di consueto porta il nome di « metodo di GRAEFE »; a lui spetta anche il merito di aver fatto conoscere un teorema fondamentale della teoria elementare dei numeri che il suo compatriota JOHN WILSON ha scoperto e che LAGRANGE ha per primo stabilito con pieno rigore. Egli poi ha asserito che « qualunque numero intero si può rappresentare come somma di un certo numero di potenze n-esime », che in particolare « ogni numero può considerarsi come somma di nove cubi »; è questo un teorema la cui dimostrazione fu per molto tempo uno dei più vivi desideri dei cultori dell'aritmetica superiore e che è citato oggi come uno dei più brillanti risultati ottenuti dalla logica irresistibile di DAVIDE HILBERT.

11. — Da quanto testè dicemmo emerge che molte bellissime pagine vennero scritte dai matematici Inglesi del Secolo XVIII (2). Tuttavia l'indirizzo dato alle loro indagini (specialmente per opera del MACLAURIN, nella ferma fede di proseguire nella via aperta da NEWTON) ebbe per

(1) MACLAURIN è anche autore di un lavoro di geometria che acquistò sul continente una notevole diffusione grazie alla traduzione francese dovuta a E. DE JONQUIÈRES: è un trattato veramente eccellente intorno alle proprietà allora note delle cubiche piane.

(2) Vi è quindi un po' d'esagerazione nelle linee seguenti scritte da M. ARNOLD nel suo saggio *The literary influence of Academies*: « The man of genius (NEWTON) was continued by the english analyst of the eighteenth century, comparatively powerless and obscure followers of the renowned master. The man of intelligence (LEIBNIZ) was continued by successors like BERNOULLI, EULER, LAGRANGE and LAPLACE, the greater names of modern mathematics (*Essays in criticism*, vol. I. p. 87).

Digitized by Google

deplorevole risultato di isolare completamente l'Inghilterra dal fervido e fecondo movimento che aveva luogo in Germania per opera dei BERNOULLI e di EULERO; in Italia per merito di MANFREDI, RICCATI, FAGNANO e LAGRANGE; in Francia per iniziativa di d'ALEMBERT e LAPLACE. Mentre l'agile notazione differenziale suggerita e applicata dal rivale di NEWTON rendeva possibile, anche agli spiriti meno eletti, l'uso dell'algoritmo infinitesimale, le pesanti considerazioni cinematiche e geometriche, caratteristiche del metodo flussionale, rendevano lenta, stentata e difficile la scoperta di nuovi veri.

Di tale condizione d'inferiorità, in cui volontariamente si erano posti i matematici inglesi di poco posteriori al MACLAURIN, si accorse probabilmente JAMES IVORY (1765-1842), il quale, liberatosi da pregiudizi di nazionalità, si rese familiare con i concetti e l'algoritmo propugnati da LEIBNIZ e potè così legare il proprio nome ad alcune proposizioni fondamentali della teoria dell'attrazione degli ellissoidi.

Quel deplorevole stato di cose, essendosi prolungato durante molti decenni, venne avvertito, nel primo quarto del Secolo XIX, da un gruppo di valorosi giovani matematici, i quali, appunto per sostituire la politica della *splendid insulation* con quella delle *ententes cordiales*, fondarono a Cambridge quella benemerita *analytical Society*, le cui origini e le cui gesta furono narrate, con verace intelletto d'amore, da W. W. ROUSE BALL (1). La scarsità del tempo concessomi mi vieta di descrivere con sufficiente ampiezza la benefica influenza che seppero esercitare i membri di essa; perciò mi restringerò a ricordare che fra essi emergono il WOODHOUSE (1773-1827), il PEACOCK (1791-1858), il BABBAGE (1792-1871) e JOHN HERSCHELL (1792-1822), validamente coadiuvati nella loro opera di riforma, da WILLIAM WHEWELL (1794-1860), il celebre autore dell'*History of inductive sciences*, e dall'eminente astronomo BIDDEL AIRY (1801-1892).

A dimostrare l'efficacia dell'azione esercitata in tutta la Granbretagna dalla Società analitica basta tenere presente la fulgida costellazione di astri di prima grandezza che apparve nel cielo matematico inglese durante la *Victorian age*, ed il fatto, pieno di significato e gravido di portentosi risultati, che in questo periodo di tempo fra matematici inglesi e matematici continentali ebbe luogo un così attivo scambio d'idee da dar luogo ad una vera e propria fratellanza d'armi. Ricordiamo, infatti, che la teoria delle forme algebriche, opera precipua di J. J. SYL-

(1) V. il cap. VII dell'*History of the study of mathematics at Cambridge* (Cambridge 1889) e l'articolo *The Cambridge School of Mathematics* pubblicato nel fascicolo di Luglio 1912 di *The mathematical Gazette*.

Digitized by Google

VESTER (1814-1897) e A. CAYLEY (1821-1895), ebbe sul continente cultori di primi ordine in HERMITE, ARONHOLD, BRIOSCHI, CLEBSCH, GORDAN, per giungere fino a DAVIDE HILBERT, che seppe darvi un degno coronamento. Inoltre i capisaldi della teoria delle superficie del terz'ordine furono posti da un lato per opera di CAYLEY, SYLVESTER e SALMON (1819-1904) e dall'altro da STEINER, SCHLÆFLI, GRASSMANN, sicchè tale disciplina quale si presenta nelle classiche memorie di L. CREMONA e R. STURM, ha l'aspetto di un fiume maestoso, sorto dalla riunione di due corsi d'acqua provenienti uno dall'Inghilterra e l'altro dalla Germania. Finalmente dalla scoperta fatta da PLÜCKER delle relazioni che passano fra le caratteristiche di una curva piana algebrica, CAYLEY fu condotto a quella delle formole analoghe per le curve gobbe ed alla ricerca delle relazioni fra i caratteri di una superficie algebrica: così venne aperto uno sconfinato ed ubertosissimo campo di ricerche, in cui l'Italia si spinse con ardore tutto meridionale e nel quale seppe raccogliere splendidi allori. Nella dinamica il nome di WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) è collegato a quelli gloriosi di LAGRANGE e JACOBI, mentre nella teoria dei sistemi di raggi lo è a quello di KUMMER; d'altronde chi ignora come HAMILTON abbia dato un potente impulso alla creazione della teoria dei numeri complessi a quante si vogliano unità, grazie all'invenzione dei quaternioni, che (secondo una storia o leggenda di cui ci sono ignoti i fondamenti) egli avrebbe compiuta in Sicilia, durante il suo viaggio di nozze? Un altro eminente matematico inglese, HENRY STEPHEN SMITH (1826-1883) aveva un possesso così pieno ed intero tanto dei metodi della geometria pura dovuti a STEINER e CHASLES, quanto della teoria dei numeri, secondo l'indirizzo gaussiano, da essere in grado di riuscire vittorioso in concorsi a cui le Accademie di Berlino e di Parigi avevano invitati tutti gli scienziati del mondo. Ancora: con GEORGE BOOLE (1810-1864) s'inizia quell'importante movimento del pensiero che condusse alla logica matematica, soggetto di studi che, per uno strano fenomeno, dopo di avere abbandonata la madre-patria, peregrinando durante molti decenni in Germania ed in Italia, è di recente ritornato al suo luogo di origine. Finalmente a tutti è noto come i nomi di GEORGES GREEN (1793-1841), G. G. STOKES (1819-1903), WILLIAM THOMSON (1824-1907), CLERK MAXWELL (1831-1879), W. K. CLIFFORD, (1845-1879) etc., s'incontrino in ogni pagina degli scritti di analisi, di geometria, di fisica matematica usciti nel corso di quest'ultimo secolo.

A questi bei nomi molti e molti altri ne potrei aggiungere se il mio discorso non avesse alcuna limitazione di tempo e se non mi fossi imposta la norma costante di non parlare dei valorosi che sono tuttora sulla breccia. Ma, uno sguardo complessivo dell'opera scientifica

Digitized by Google

di coloro che ho ricordati prova ad evidenza come l'abbandono dell'antico sistema di sdegnoso isolamento, adottato dai matematici inglesi del Secolo XVIII, abbia prodotti i migliori effetti sul progresso delle scienze esatte, sicchè, in nome degli interessi generali delle matematiche, si deve formulare l'ardentissimo voto che alla politica delle alleanze la Granbretagna si mantenga costantemente fedele: così (per tacere di altri vantaggi) si eviterà il rinnovarsi di fatti deplorevoli, quale quello dell'ingiustificata indifferenza dell'Inghilterra verso intere branche, degnissime di studio, quale (per citare un solo esempio) la Geometria descrittiva, disciplina importante, sia per i teorici quanto per i pratici, alla quale essa avrebbe certamente potuto portare contributi degni di una terra che diede i natali a BROOK TAYLOR.

12. — Giunto al termine di questa rapidissima rassegna delle glorie matematiche della Granbretagna, con dolore io ne avverto le manchevolezze e le lacune, sicchè mi è forza riconoscere, io per primo, che il quadro che ho presentato, piuttosto che ad una pittura fedele, somiglia ad un grandioso mosaico che, per la scomparsa di numerose pietruzze, non offre più traccia di alcune figure importanti. Tali imperfezioni provengono in parte dai limiti imposti a questa comunicazione; in parte certamente da ignoranza da parte mia, ignoranza che non valsero a vincere gli assidui studi da me compiuti sopra il seducente argomento; ma in parte anche (sarebbe vano il negarlo!) dalla scarsità dei materiali che trovai a mia disposizione. Mentre l'Inghilterra offre una letteratura biografica così ricca e splendida da sostenere con vantaggio il paragone con qualunque altra; mentre ha manifestato in ogni tempo un tenero affetto verso tutto ciò che ha attinenza per la matematica greca (e per dimostrare la persistenza di questo interesse mi sia lecito ricordare le ponderose e geniali pubblicazioni del mio dotto amico Sir T. L. HEATH); alla storia della matematica moderna non ha prestato che una mediocre attenzione, sicchè gli scritti di W. W. ROUSE BALL si presentano come uu picco isolato in una sconfinata pianura (1). Una luminosa eccezione è rappresentata da un uomo di vasta coltura ed ammirabile genialità, AUGUSTO DE MORGAN (1806-1871); ma i numerosi suoi articoli storici, essendo stati pubblicati in raccolte inaccessibili a chi vive sul continente, non conseguirono la notorietà che avrebbero meritato e non esercitaro-

(1) I materiali per comporre storie di alcune speciali epoche o teorie vennero diligentemente raccolti dall'HALLIWELL, dal TODHUNTER e dal MUIR; nè va dimenticato che i *Proceedings of the British Association for the advancement of science* contengono un gran numero di preziosi *Reports* sopra il passato ed il presente di altre.

Digitized by Google

no l'influenza di cui erano capaci (1). Ora l'esempio da lui dato meriterebbe di essere largamente seguito.

La serie dei matematici che io vi ho presentata è discontinua e presenta interruzioni che talvolta si estendono oltre un secolo, onde allo storico si presenta il seducente problema di colmarle nei limiti del possibile o d'investigare le cause per le quali la ricerca matematica abbia subite in Inghilterra improvvise sospensioni.

Inoltre buon numero dei matematici di cui si è serbata memoria sono noti soltanto imperfettamente, sicchè generale e ben gistificato è il desiderio di giungere in possesso di ritratti completi dei personaggi che rispondono ai nomi di PELL (2), WILSON, BRAINKERIDGE, CASWELL, ecc.

Finalmente nessuna letteratura matematica quanto l'inglese offre un numero così cospicuo di « opere postume » ; è questa una caratteristica che va rilevata per stabilire la serietà d'intenti dei geometri della Granbretagna, molti dei quali, spontaneamente rinunciando alle seduzioni della gloria ed alla prospettiva di onorificenze ufficiali, rimandarono di giorno in giorno il momento, desiderato e temuto, di scrivere ai loro lavori la parola *fine* e furono toccati dalla gelida ala della morte prima di decidervisi. Orbene ciò induce a domandare se i posteri abbiano saputo spremere dai manoscritti di quei grandi tutto il succo ivi racchiuso (3) e, quando si pensa ai tesori tuttora sepolti fra le carte di LEIBNIZ ed ai preziosi insegnamenti che si traggono attualmente dai manoscritti di GAUSS, si è naturalmente indotti a coltivare la speranza che anche le biblioteche inglesi, se abilmente interrogate, possano ancora insegnarci qualche cosa specialmente riguardo a NEWTON (4).

Questo triplice ordine di studi è capace, se non erro, di attrarre

---

(1) Il raccoglierli in un tutto organico è impresa desideratissima, perchè riuscirebbe certamente di grande utilità. (Questo suggerimento venne in parte seguito giacchè i saggi del DE MORGAN sopra NEWTON furono pubblicati nel 1914 per cura di E. B. JOURDAIN. 1935).

(2) Molte notizie sopra questo matematico, sì poco noto, si traggono dalla già citata *Correspondence of scientific men*. Così (per non parlare di alcune sue singolarità di carattere) vi si apprende che egli tradusse e commentò l'*Algebra* di RHONIUS, che scrisse contro LONGOMONTANO (fatto questo che non sfuggì a A. VON BRAUNMÜHL come si vede a p. 58 del T. I delle sue *Vorlesungen über Geschichte Trigonometrie*) e compose una *Tavola di quadrati* ; finalmente egli pubblicò a Londra nel 1650 un'opera intitotata *An Idea of Mathematics* che non sembra meritare il silenzio o l'obblio di cui venne circondata dagli storici della matematica.

(3) Tale dubbio sorge spontaneo dalla lettura dell'articolo del VACCA citato in una nota precedente.

(4) Un'edizione veramente completa delle *Opere di Newton*, contenente anche il carteggio e gli scritti inediti, è vivamente invocata da tutti i matematici.

Digitized by Google

chiunque abbia la facoltà di sentire l'ineffabile bellezza di una ricerca storica e di dare materia ad importanti lavori. Io spero e credo che di persone propense ad accingervisi, nelle vostre isole ve ne siano molte e valorose; lo spero giacchè l'impressionante Sezione scientifica del *South Kensington Museum* fa fede della diffusione in Inghilterra del culto per i grandi inventori e le grandi opere.

Se però il loro numero si mostrasse esiguo o il valore impari alla grandezza dell'intento, un incoraggiamento a siffatte desiderate fatiche potrebbe venire somministrato da un voto dell'attuale Congresso, voto che forse varrebbe a promuovere la munificenza di privati ed a stabilire un'azione concorde delle gloriose Università e delle potenti Società scientifiche che annovera la Granbretagna.

Ove tale proposta sia accolta e sorta il desiderato effetto, non v'ha dubbio che nuova luce di gloria verrà projettata sopra la vostra potente e nobile nazione; ed il giorno in cui apparirà una *Storia delle Matematiche nella Granbretagna*, che sia all'altezza del suo tèma, nessuno esulterà più sinceramente di colui che, rispondendo ad un vostro cortese invito e con l'affetto di un ospite riconoscente, si è permesso di esprimere francamente sentimenti condivisi da tutti coloro che hanno a cuore i supremi interessi delle scienze esatte e della loro storia.

XXIX.

ECCENTRICITA' E MISTERI DEI NUMERI

Discorso tenuto al III Congresso della *Mathesis*, che ebbe luogo a Genova nell'ottobre 1912. Venne tradotto in francese e pubblicato nel T. XV (1913) de *L'enseignement mathématique*.

La fonte di tutta la matamatica
risiede nei numeri interi.
MINKOWSKI.

1. Alcuni anni or sono io soggiornai durante l'estate in una delle più famose stazioni balneari e climatiche d'Italia. L'antica e ben giustificata reputazione di quelle acque, la purezza del cielo, la dolcezza del clima, l'ineffabile bellezza del circostante paesaggio facevano accorrere a frotte in quella meravigliosa conca di smeraldo i desiderosi di riacquistare la salute. E siccome la durata della cura era di regola breve, mentre io feci colà una dimora assai lunga, così il numero di persone che sfilarono sotto i miei occhi venne da me giudicato ingentissimo; anzi, il ricordo dei dolori e delle speranze che mi s. erano parati innanzi era nel mio animo così vivo che tal numero finì per assumere nella mia mente proporzioni fantastiche.

Digitized by Google

Per rendermi un conto esatto dell'entità di esso chiesi qualche informazione alla direzione di quello Stabilimento e così seppi che, anche nelle stagioni più affollate, il numero dei bagnanti non supera mai *diecimila,* onde, a calcolare largamente, le persone da me viste non potevano essere in numero superiore a *cinquemila.*

Questo dato, mentre fece crescere considerevolmente il mio rispetto per questo numero *cinquemila* (che avevo udito tante volte disprezzato e vilipeso quando rappresentava il compenso massimo concesso dal Ministero della Pubblica istruzione alle fatiche annue de' suoi dipendenti) mi fece riflettere che avrei dovuto assistere per un secolo intero, dal principio alla fine di ogni stagione, a quella sfilata di pazienti, per formarmi un concetto del numero *un milione,* di cui molti ritengono di avere un'idea precisa, mentre, pronunciandone il nome, non fanno che ripetere automaticamente una parola udita sino dalla nascita.

Benchè l'ottimo ed illustre direttore dello Stabilimento in questione si facesse meco mallevadore essere l'efficacia delle acque ivi somministrate, così portentosa che io avrei potuto di sicuro ripetere cento volte quell'esperienza, pure io ho rinunciato a provarmivi. Ma, con l'umiliazione prodotta dall'orgoglio ferito, confessai a me stesso che, mentre Natura mi aveva largita in qualche misura *intuizione geometrica* in tutti gli spazi, mi aveva totalmente negata l'analoga dote relativa all'aritmetica; sicchè GIORGIO DARWIN avrebbe certamente sentenziato essere il mio «occhio matematico» aperto soltanto per metà.

2. — In processo di tempo alcuni nuovi fatti giunti al mio orecchio arrecarono qualche lenimento al mio dolore (a dir vero, la consolazione dei disperati) perchè mi mostrarono che l'incapacità, avvertita in me, di concepire il numero che corrisponde ad un'ingente totalità d'individui doveva essere comune retaggio della povera umanità.

Ed infatti, come spiegare altrimenti che l'Amministrazione del celebre Palazzo di Cristallo di Londra, pubblicando nel 1864 la statistica delle persone che lo avevano visitato nel primo decennio di vita (dalla quale risultava che tal numero supera i *quindici milioni*), abbia reputato necessario illustrare questo risultato esponendo al pubblico un nastro di cotone sul quale stavano regolarmente marcati *un milione* di punti neri? Evidentemente chi si attenne a tale sistema giudicava che la semplice enunciazione del numero *quindici milioni* era insufficiente a porgere un'idea adeguata della fiumana di persone che avevano oltrepassata la soglia del famoso edifizio.

Dello stesso genere ed espressione della stessa manchevolezza è un espediente a cui si ricorse assai più di recente: poco tempo fa un dilettante di statistica propose di calcolare con bastante approssimazione il

Digitized by Google

numero degli ordinari volumi in 8^0, che verrebbero riempiti da tutto quanto uscì dalla penna dell'uomo, dalla creazione del mondo sino ad oggi; ora il numero risultante è di tale inconcepibile grandezza che si credette aggiungere, a titolo di chiarimento, che una persona la quale leggesse ogni giorno uno di quei volumi (ed i direttori delle Biblioteche circolanti si fanno garanti che siffatti «divoratori di libri» sono assai meno rari di quanto volgarmente si creda) potrebbe esaurire quell'enorme *stock* di carta stampata in *trentamila anni* (1).

3. — Da questi fatti — e da molti altri congeneri, che la discrezione mi consiglia di passare sotto silenzio — fui tratto a concludere che il rappresentare i numeri astratti sopra collezioni di persone o di cose, scambio di agevolarne, ne ostacolasse il concepimento, e pensai che a rappresentazioni veramente utili si sarebbe forse giunti, ricorrendo a corrispondenze fra numeri ed intervalli di tempo, le quali parevami fossero state implicitamente suggerite dall'HAMILTON, quando insegnava essere «l'algebra la scienza del puro tempo» (2). Ma anche qui mi si preparava una delusione amarissima!

Invero, un minuto primo è ritenuto un intervallo di tempo così breve (anche se misurato durante un discorso noioso) che si sarebbe propensi a giudicare essere *non* enormemente lungo il periodo risultante da *un miliardo* di minuti. Or bene è stato calcolato dal compianto matematico HERMANN SCHUBERT che il 28 aprile 1902, alle 10.40 del mattino compì appunto un miliardo di minuti dalla nascita di Cristo. Ora, se si fa una rassegna mentale degl'innumerevoli radicali rivolgimenti politici e sociali avvenuti in quel lasso di tempo, all'enorme lavoro compiuto in tutti gli svariatissimi campi in cui si è finora estrinsecata l'attività dell'uomo, nelle arti della pace e della guerra, nelle scienze pure ed applicate, nell'industria e nei commerci, e si tiene anche il debito conto degli scoloriti periodi di stasi o di regresso, durante i quali il genere umano sembrò immerso in sterile torpore od invaso da pazzo furore, si è forzati a concludere che un miliardo di minuti è un periodo estremamente più considerevole di quanto erasi a prima giunta supposto, e che quindi *un miliardo* è una totalità assai più ingente di quanto giudicano persino coloro che ne menano vanto come loro blasone.

Nè minori ostacoli o minori illusioni e delusioni attendono chi ricorre a rappresentazioni spaziali dei numeri. Infatti, chi mai può in co-

---

(1) E. MOREL nel *Mercure de France* del 16 febbraio 1912.

(2) Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, *Theory of conjugate functions or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* (*Trans. of the R. Irish Acad.*, Vol. XVII, Part. II, 1835).

Digitized by Google

scienza affermarsi capace di concepire la più modesta delle lunghezze che si considerano in Astronomia — quella che si assume per distanza fondamentale del nostro sistema planetario, cioè l'intervallo che separa la terra dal sole — la quale, in base alle calcolazioni più recenti, ascende all'incirca a 150 milioni di chilometri? Ben si avvidero di tale impossibilità i più esperti espositori della materia, i quali, a scopo di dilucidazione, si affrettarono a soggiungere che un'automobile la quale coprisse 50 chilometri all'ora, ove non fosse afflitta da alcuna *panne*, per percorrere quella distanza richiederebbe 340 anni.

4. — Le accennate difficoltà che s'incontrano oggi nel concepire numeri molto grandi sembra siano state avvertite sino dall'Antichità più remota. E invero nella Sacra Scrittura si cerca indarno qualche numero maggiore di *diecimila*; mentre i Babilonesi, che pure ebbero fama di eccellenti calcolatori, non si spinsero oltre *centomila*. Gli Egiziani andarono più in là; ma il fatto che *un milione* in geroglifici viene rappresentato con la figura di un uomo che alza le braccia in atto di somma meraviglia, è sintomo non dubbio del terrore quasi religioso che quel numero incuteva nei sudditi dei Faraoni. I popoli dell'Asia sembrano essersi spinti assai più oltre percorrendo la serie naturale dei numeri, chè da secoli i Cinesi toccarono il numero rappresentato dall'unità seguita da quattordici zeri e gl'Indiani quello analogo con ventuno zeri; ma la loro energia mentale era sufficiente perchè concepissero realmente numeri di tale stupefacente entità? Ci sia lecito dubitarne.

Neppure i Greci — questo popolo nato alla ricerca scientifica e che, specialmente nelle scienze esatte, lasciò dietro a sè una scìa di abbagliante splendore — seppero riuscire vittoriosi degli ostacoli che offre il concepire numeri molto elevati. Infatti, l'avere ARCHIMEDE reputato non indegno di lui e giovevole ai suoi contemporanei lo scrivere un'opera (l'*Arenario*) avente lo scopo apparentemente futile di mostrare *essere erroneo il ritenere infinito il numero totale dei granelli di arena sparsi sulla terra e costituenti il fondo dei mari,* mostra ad evidenza l'incapacità di coloro, a cui il grande matematico si rivolgeva, d'immaginare numeri superiori ad un certo limite, dal momento che essi, giunti ad un certo punto, quasi spossati dall'immane sforzo compiuto, al proseguire preferirono annegarsi nell'infinito. Per conseguire il proprio intento il sommo Siracusano concepì uno speciale sistema di numerazione assai ingegnoso e così potente che, al dir dell'inventore, abilita a scrivere, non soltanto il numero che erasi preteso infinito, ma anche quello esprimente quanti pulviscoli capirebbero in una sfera concentrica alla terra e passante per il sole. E' facile vedere che ARCHIMEDE non esagerava nel vantare la potenza dello strumento aritmetico da lui creato, dal momento che ha somministrato i mezzi

Digitized by Google

per rappresentare graficamente tutti i numeri compresi fra l'unità ed il numero che oggi si scriverebbe facendo seguire 1 da ottantamila milioni di zeri. E' superfluo avvertire che qui si parla esclusivamente di possibilità *teorica*; chè, supposto una persona rimanga al lavoro ogni giorno durante il periodo legale di otto ore e scriva una cifra per secondo, in un anno non raggiungerebbe i quaranta milioni di cifre, onde *duemila* anni le sarebbero necessari per scrivere il surriferito numero, il quale occuperebbe una biblioteca di ottantamila volumi (1): ora (pur troppo!) fra tutte le portentose invenzioni e scoperte che gli antichi attribuiscono ad ARCHIMEDE non si trova alcuno specifico per moltiplicare a dismisura la durata della vita dell'uomo.

5. — Le enormi difficoltà in cui si è imbattuta e contro cui dà ancora di cozzo chiunque voglia formarsi una chiara immagine dei numeri di considerevole grandezza — difficoltà delle quali le circostanze surriferite offrono prove indiscutibili ed impressionanti — sembrano trascinare alla conclusione che l'*intuizione aritmetica* sia una facoltà estremamente più rara dell'*intuizione geometrica*. Ora, siccome non v'ha dubbio che i più grandi calcolatori che ricordi la storia, raggiunsero la fenomenale abilità con cui stupirono il mondo, coltivando una rara qualità latente con l'esercizio incessante, anzi con un sapiente allenamento, così si è naturalmente condotti a pensare che esistano dei procedimenti per sviluppare l'intuizione aritmetica non dissimili da quelli che si sogliono impiegare per uno scopo analogo nel campo geometrico (2). Chi voglia rendersi conto della somma importanza educativa, anche dal punto di vista della vita sociale, di cui sarebbe ricca un'azione in questo senso, non ha che tenere presente che questa miopia aritmetica, così deplorevolmente diffusa nel tempo e nello spazio, spiega il senso d'ingenua meraviglia, che talora degenera in incredulità cieca, ostinata e persino sciocca, da cui molti si sentono invasi, udendo enunciare l'enormità dei risultati a cui guidano alcune semplicissime operazioni aritmetiche; ora sia pure che, come voleva BACONE, la meraviglia sia madre di scienza, ma è pur sempre figlia dell'ignoranza.

La più antica, e forse anche la più celebre circostanza in cui si è manifestato questo senso di scettico stupore è collegata all'invenzione

(1) Nel fare questo calcolo si è ritenuto che ogni pagina contenga 2000 cifre e ciascun volume 500 pagine. onde in ogni volume vengano a trovarsi un milione di cifre.

(2) Volendo iniziare ricerche in tale senso converrebbe tener conto dei geniali studi fatti intorno alla psicologia dei calcolatori eccezionali, studi i cui più interessanti risultati sono raccolti nel volume di A. BINET, *Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs* (Paris, 1894).

Digitized by Google

del giuoco degli scacchi. Le cronache del tempo narrano che l'indiano SISSA BEN DAHER, al quale viene attribuito il mirabile trovato, chiese al proprio Re, quale compenso alla sua fatica, la massa di frumento che nasce deponendone un chicco nella prima casella della scacchiera, 2 nella seconda, 4 nella terza, e così via. Il risultante numero di grani è così enorme (1) che non tardò a divenire proverbiale, sicchè fu invocato anche da DANTE, il quale, giunto al cospetto di Dio, vide un tale sfavillio di punti brillanti, che, nell'impossibilità di assegnare quante fossero le scintille da cui era abbagliato, scrisse che

> ..... eran tante, che il numero loro
> Più che il doppiar degli scacchi s'inmilla (2).

La storia nulla ci apprende intorno all'inquietante problema se SISSA BEN DAHER avesse coscienza di quanto indiscreta fosse la sua modesta richiesta. Ma quando il suo Re riconobbe che la quantità di grano richiesta, distribuita uniformemente sul suolo avrebbe ricoperta tutta la terra, formandovi uno strato dello spessore d'un centimetro, per quanto fervidemente ammirasse il celebre giuoco, avrà dovuto riconoscere che il premio non era proporzionato all'indiscutibile pregio dell'ingegnosa invenzione. Da quel giorno l'umanità, che un tempo nutriva completa fiducia nell'onesta aritmetica, fu avvertita che questa purissima scienza era capace di tendere tranelli ed insidie a coloro che ignoravano l'immane potenza che si nasconde sotto il velame di procedimenti di semplicità infantile.

Nè minore fu lo scetticismo che molti manifestarono allorquando nel 1871 venne imposto dalla Germania alla Francia il pagamento di cinque miliardi di franchi a titolo d'indennità di guerra; con generale stupore venne allora notato che tale enorme somma la nostra sorella latina avrebbe trovato nelle casse dello Stato ove nel 1413 (cioè poco dopo la morte di GIOVANNA D'ARCO) il re CARLO VI avesse avuto la previdenza di porre *una lira* all'interesse composto del 5%.

A siffatte stupefacenti genesi di grandi numeri, provenienti dall'applicazione delle progressioni aritmetiche, ne fanno riscontro altre, non meno sorprendenti, che hanno la propria radice nell'analisi combinatoria; giacchè il numero dei gruppi che si possono formare con una certa totalità, anche non numerosa, di elementi è enormemente più grande di quanto volgarmente si creda. Da siffatta deplorevolissima ignoranza traggono larghi profitti gli organizzatori delle bische alte e basse, ufficiali

---

(1) Questo numero è $2^{64} - 1 = (2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)$ = 18 446 744 073 709 551 615.

(2) *Paradiso*, Canto XXVIII, vv. 91-92.

Digitized by Google

e clandestine, per assegnare premi assolutamente irrisori ai credenzoni adescati dal miraggio di far fortuna.

La stessa ignoranza spiega come sia oggetto di estesissima meraviglia il fatto che, con le sole sette note musicali sia possibile comporre tanti motivi quanti son quelli che da secoli formano la delizia del genere umano. Vero è che, da qualche tempo a questa parte, si sarebbe tentati di pensare che la miniera musicale si avvii verso l'esaurimento, chè agli *anni di abbondanza* caratterizzati dai nomi gloriosi di MEYERBEER. ROSSINI, VERDI, GOUNOD, hanno seguìto *anni di carestia*, in cui un'unica idea musicale, sapientemente ammanita e prudentemente diluita, serve ad intrattenere il pubblico per un'intera serata. Ma il matematico, in grado di far bene i calcoli, incuora e sprona al lavoro i giovani maestri, accertandoli che le combinazioni di note tuttora inedite (anche se ci si restringe a quelle che obbediscono alle leggi dell'armonia) sono tanto numerose da permettere ancora la creazione di un immenso numero di capolavori.

6. — Per assistere la misera umanità nell'arduo còmpito di concepire i numeri della serie naturale, qualunque ne sia la grandezza, da tempo immemorabile è invalso il costume di rappresentarne gli elementi sopra altrettanti punti equidistanti di una retta indefinita. Ora, contro tale artificio nulla si può obbiettare se si ritiene che vi si giunse, quasi inconsciamente, scrivendo i numeri 1, 2, 3... di seguito ed a distanze eguali, non trovando ragione per far governare gl'intervalli di separazione da una legge diversa dall'uguaglianza. Ma se invece s'intese di stabilire una rappresentazione esprimente analogie sostanziali e profonde fra enti matematici differenti, concedetemi, Signori, che io dichiari francamente che io ritengo mai sia stata suggerita corrispondenza più grossolana, anzi infedele e traditrice. Essa infatti fa corrispondere l'eterogeneo all'omogeneo; chè mentre, se si astrae dalla posizione occupata, nulla abilita a distinguere un punto di una retta da tutti gli altri, si può dire che, al contrario, ogni elemento della serie naturale abbia qualità specifiche che lo caratterizzano e servono a distinguerlo da tutti gli altri. Così — per citare un solo esempio — un notissimo aritmologo francese, EDOARDO LUCAS, ha dimostrato che 5 è *l'unico numero* che sia somma dei quadrati di due numeri consecutivi ed il cui quadrato sia esprimibile nello stesso modo, e che 7 è, a sua volta, *l'unico numero* che sia eguale al doppio di un quadrato meno uno ed il cui quadrato si possa presentare sotto il medesimo aspetto (1).

---

(1) *Sur les propriétés caractéristiques des nombres 5 et 7 (Nouvelles Annales de mathém.*, II Sér. T. XVIII, 1879).

Digitized by Google

Da tale disparità di contegno degli elementi della serie naturale trae origine la presenza nella Teoria dei Numeri di proposizioni curiosissime, il cui enunciato è intelligibile a *tutti*, la cui verità può essere da *tutti* riconosciuta agevolmente in innumerevoli casi e che perciò *tutti* s'illudono di poter dimostrare in generale, mentre (se si prescinde dai rari casi in cui si possono stabilire mediante l'*induzione completa*) celano le più gravi difficoltà. E si noti che il sormontarle è tanto più urgente giacchè i matematici sono così propensi alle più ampie generalizzazioni, che anche scienziati dallo sguardo d'aquila, nel campo aritmetico, furono trascinati ad affermazioni che i posteri non poterono ratificare; sicchè nell'alta Aritmetica, più che in qualunque altra disciplina, bisogna tenere in rigorosa quarantena qualunque proposizione che non sia stata peranco stabilita in modo inoppugnabile.

Tale completa eterogeneità della serie naturale venne avvertita sino dai primi albòri della ricerca matematica; in pari tempo si percepì la necessità imprescindibile di porre un po' d'ordine in quella illimitata successione d'individui, avvicinando e riunendo in ampie schiere i numeri aventi qualche qualità in comune.

Una prima ripartizione (che si suole far risalire a PITAGORA, ma che certamente non rimase sconosciuta ad alcun popolo che siasi elevato al disopra della più rozza barbarie) è quella di tutti i numeri in *pari* e *dispari*. Per quanto semplice e naturale essa sia, tale distinzione è fondamentale, non soltanto dal punto di vista prettamente aritmetico, ma per la Matematica tutta. E per convincervene, Signori, io v'invito a spiccare un volo, degno del più ardito aviatore, verso le più eccelse regioni della nostra scienza; sarete così in grado di constatare come le quadriche di uno spazio lineare godono proprietà differentissime secondochè il numero delle dimensioni dello spazio ambiente sia *pari* o *dispari*; similmente la Cinematica di uno spazio lineare manifesta fenomeni radicalmente differenti a norma della parità della dimensione di questo; ed anche nella teoria dei determinanti di specie superiore è ineluttabile la necessità di distinguere il caso in cui questa sia espressa da un numero *pari*, da quello in cui lo sia da uno *dispari*.

7. — Altrettanto antica (come vien dimostrato da innumerevoli squarci delle opere di PLATONE) della separazione di tutti gl'interi in pari e dispari, ma ancora più feconda di mirabili conseguenze, è la distinzione di tutti i numeri in *primi* e *composti*. Ora se si percorre passo passo la serie naturale e si contrassegnano quegli elementi che sono numeri primi ci si accorge che, man mano che si procede, i numeri segnati divengono più rari, onde nasce spontaneamente il sospetto che, a partire da un determinato elemento di quella serie, tutti i numeri siano composti.

Digitized by Google

Tale sospetto dev'essere di antichissima data, dal momento che *papà* EUCLIDE (od altri prima di lui) reputò necessario dimostrarne l'infondatezza con l'insegnare a costruire una successione illimitata di numeri *tutti primi*. La fondamentale proposizione risultante può enunciarsi dicendo che *la progressione aritmetica che ha l'unità tanto per primo termine quanto per differenza costante abbraccia infiniti numeri primi*. Sussiste un teorema analogo per qualsia altra progressione aritmetica? Evidentemente affinchè ciò succeda è *necessario* che il primo termine e la differenza costante non abbiano alcun fattore comune; ma quella condizione è dessa anche *sufficiente*? Per tale venne ritenuta dal LEGENDRE (1) e tale fu stabilita poi *elementarmente* per alcuni speciali valori della ragione. In generale necessità e sufficienza vennero inoppugnabilmente dimostrate dal LEJEUNE-DIRICHLET come esempio impressionante di applicazione dell'Analisi infinitesimale all'Aritmetica (2). L'argomentazione da lui all'uopo congegnata è senza dubbio meritevole della sconfinata ammirazione che ha dovunque destato; ma essa occupa non meno di ventisei pagine in-4^0, ed è di natura così elevata che da molti vien giudicata

Tanto amara che poco è più morte;

essa costringe all'assenso, ma non rivela l'intima ragione della verità a cui mira, come accade a tutti quei ragionamenti in cui entrano in giuoco considerazioni non aventi legami necessari ed evidenti con lo scopo che si prefiggono, quale sarebbe, per citare un esempio noto a tutti, il processo logico che, attraverso un passaggio al limite, conduce all'espressione del volume della piramide. Se non che, mentre per questo teorema, in seguito alle ricerche del DEHN (3), si è oggi sicuri che le considerazioni infinitesimali sono inevitabili, altrettanto non si può ripetere per la proposizione aritmetica surriferita. Sicchè ci troviamo inaspettatamente di fronte ad un enigma che attende un Edipo che ce lo spieghi; anzi alla ricerca di un ragionamento aritmetico che guidi a stabilire la presenza d'infiniti numeri primi in qualsivoglia progressione aritmetica si attribuisce oggi tanta importanza che chi riuscirà ad effettuarla... o a dimostrare che la cosa è impossibile, può anticipatamente fare assegnamento sul vedere il proprio nome scritto a caratteri d'oro nei fasti della nostra scienza.

Non è questo l'unico punto della Teoria dei Numeri che sia tuttora avvolto nel mistero, chè tale disciplina sembra compiacersi di cosparge-

---

(1) *Mém. de l'Académie des Sciences*, Paris, 1785. Nella *Théorie des nombres* (IV Partie, § 9) si trova anche un primo tentativo di dimostrazione.

(2) *Abhandlungen der K. Preuss. Akad. der Wissensch.*, 1837.

(3) M. DEHN, *Ueber den Rauminhalt* (*Mathem. Annalen* T. LV, 1902).

Digitized by Google

re di baratri spaventevoli e di vette inaccessibili la via che il giovane viaggiatore fiducioso ed inesperto giudica piana e sicura. Ne volete altre prove, Signori? Eccomi pronto a fornirvele!

Nel 1845 un celebre matematico francese, GIUSEPPE BERTRAND, nel corso di alcune ricerche sulla teoria delle sostituzioni (1) fu indotto ad ammettere che *se il numero* n *è superiore a* 7, *fra* $\frac{n}{2}$ *e* n — 2 *esiste sempre un numero primo.* Quale proposizione più modesta ed umile si può immaginare? Tuttavia l'eminente geometra vide frustrati tutti gli sforzi da lui ripetutamente fatti per dimostrarla. Ciò non ostante, non nutrendo dubbio alcuno intorno alla verità di essa, coraggiosamente l'introdusse nella scienza sotto il nome di *postulato*: ed a ragione si appigliò a tale partito, perchè, dieci anni dopo, il sommo geometra russo CEBYCEFF riuscì a dimostrarla rigorosamente, cioè a trasformarla in un vero e proprio *teorema* (2).

Così verso la metà del secolo XVIII un oscuro aritmologo, il GOLDBACH, riscontrò sopra moltissimi esempi che *qualsiasi numero pari può decomporsi* (anzi, in parecchi modi) *nella somma di due numeri primi* (3) e segnalò questo teorema come *probabile* in una lettera scritta addì 7 Giugno 1742. Un investigatore contemporaneo lungimirante, LEONARDO EULERO, si affrettò a dichiarare (4) di nutrire piena fede nella verità di tale legge, senza però riuscire a congegnarne una solida dimostrazione. Nè miglior fortuna arrise ai matematici posteriori; sicchè alla fine del secolo passato GIORGIO CANTOR giudicò opportuno istituire ricerche sperimentali intorno alla verità della legge di GOLDBACH e, col valido concorso di un suo egregio discepolo (5), potè constatare che sussiste per tutti i numeri non superiori a 3000. La probabilità che essa valga sempre venne così notevolmente accresciuta, ma la certezza non venne peranco raggiunta. L'arrivarvi costituisce oggi uno dei più ardenti *desiderata* dell'Aritmetica superiore; a cimentarsi all'ardua prova si può essere spronati ed incoraggiati dalla speranza di giungere ad un ragionamento atto a porre in evidenza gli eventuali casi in cui la legge di GOLDBACH trovasi in difetto e capace anche di decidere se (come ebbe a congetturare

(1) *Journal de l'Ecole polytechnique*, XXX Cahier.

(2) *Mémoire sur les nombres premiers* (*Journ. de mathém. pures et appliquées*, T. XVI, 1854; oppure *Œuvres de P. L. Tchébycheff.* T. I., St.-Pétersbourg, 1899, p. 49).

(3) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres geomètres du* XVIII *Siècle*, T. I. (St. Pétersbourg, 1843), p. 127.

(4) Ivi, p. 135.

(5) R. HAUSSNER, *Tafeln für das Goldbach'sche Gesetz* (*Nova Acta Leopol. Carol. Akad.*, Bd. LXXII, 1897).

Digitized by Google

il principe DE POLIGNAC) sussiste l'analoga proposizione: *qualsia numero pari può considerarsi come differenza di due numeri primi.*

Siami lecito segnalarvi ancora, Signori, un'altra questione tuttora irrisoluta collegata alla teoria dei numeri primi. Nel 1878 un egregio matematico inglese (1), ha fissato la propria attenzione sopra le coppie di numeri dispari consecutivi, entrambi primi, quali ad esempio sarebbero 11 e 13, 29 e 31; ed ha notato che fra 1 e 100,000 si trovano 1125 coppie siffatte, mentre fra 1,000,000 e 1,100,000 non ve ne sono che 725 e fra 8,000,000 e 8,100,000 che 518. Ora tale constatazione di fatto porta a supporre una tendenza di quelle coppie a scomparire di mano in mano che si procede nella serie naturale dei numeri; onde si è portati a *domandarsi* se, al di là di un certo limite, di tali coppie se ne trovano ancora; si *può domandare,* ma, per quanto mi consta, oggi non si *sa rispondere.*

8. — Ai *teoremi* aritmetici, di enunciato intelligibilissimo a tutti, ma di dimostrazione estremamente ardua o sinora ignota, collegati alla decomposizione dei numeri ne' loro fattori primi, fanno riscontro analoghi *problemi* non meno traditori, di aspetto oltremodo semplice, ma la cui soluzione oppone ostacoli di eccezionale gravità a chi intenda o sia costretto a risolverli nell'ipotesi che i dati siano numeri molto grandi.

Fra essi è veramente tipica la questione di decomporre un numero ne' suoi fattori primi, in particolare di stabilire un criterio sicuro per decidere se un dato numero sia primo o composto. Qualunque modesto trattato di aritmetica espone una soluzione assai piana della prima, la cui scoperta si perde nella notte dei tempi, mentre le difficoltà insite nella seconda sembrano state segnalate da molti secoli, dal momento che ERATOSTENE, geometra del periodo greco-alessandrino, credette opportuno di fornire, col suo celebre « staccio », la soluzione empirica di essa, risultante dalla costruzione di una tavola di numeri primi. Ora che nella pratica il metodo consueto per decidere se un numero sia primo, consistente nel risolverlo nei suoi elementi semplici, presti soccorsi di molto discutibile valore è dimostrato da un curioso errore commesso dal terzo de' matematici che portarono il nome di GIOVANNI BERNOULLI, il quale sostenne (2) che il numero $10^{11} + 1$ non possiede altri fattori primi che 11 e 23, mentre ne ha altri due di quattro cifre ciascuno (3).

---

(1) J. W. L. GLAISHER, *An enumeration of prime pairs* (*Messenger of Mathematics* II Ser., T. VIII, 1878).

(2) In un lavoro *Sur les fractions décimales périodiques* inserito nei *Mem. de l'Acad. de Berlin*, 1771.

(3) Cfr. P. SEELHOFF, *Ein Rechnenfehler von J. Bernoulli* (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, T. XXXI, 1886).

Digitized by Google

Forse di un metodo di decomposizione sufficiente a soddisfare in qualunque caso le esigenze della pratica era in possesso il fondatore dell'odierna Aritmetica superiore, il FERMAT; induce a congetturarlo il fatto che, con impressionante disinvoltura, ad analoga domanda del Padre MERSENNE, rispose (1) essere il numero di *dodici* cifre

100 895 598 169

da lui propostogli il prodotto dei due numeri di *sei* cifre ciascuno

898 423 , 112 203.

Se quell'ipotesi è conforme al vero, se cioè FERMAT recò seco nella tomba questo come altri importantissimi segreti, dalla Città superna ove egli indubbiamente si trova contemplerà, forse sorridendo sdegnosamente, i suoi posteri che nuotano affannosamente per toccare una sponda in cui egli giunse ad approdare felicemente. E poichè troppo mi dorrebbe che qualcuno di voi, Signori, mi ritenesse capace di caricare le tinte per artificio oratorio, reputo opportuno riferire come uno dei più intrepidi calcolatori che sono esistiti, il LANDRY, colui al quale si è debitori della scomposizione in fattori primi di tutti i numeri della forma $2^n \pm 1$ per n compreso fra 1 e 64, abbia fatta la seguente impressionante dichiarazione (2):

« Di tutte le decomposizioni da noi effettuate nessuna ha richiesti tanto tempo e tanta pazienza quanto quella del numero $2^{58} + 1$. Gli ultimi due fattori di tale numero hanno ciascuno *nove* cifre. Il loro prodotto, che si trattava appunto di decomporre, è il numero di *diciassette* cifre

57 646 075 230 342 349.

Se quei fattori venissero a perdersi ci mancherebbe il coraggio di ricominciare il lavoro fatto ed è probabile che passerebbero molti secoli prima che si riuscisse a ritrovarli ».

Non è certo il caso che io mi arresti in questo momento ad esporre, nemmeno in ristrettissimo compendio, gli espedienti, molti dei quali veramente profondi ed ingegnosissimi, che furono proposti per venire a capo della difficoltà che ho segnalate, almeno per numeri di forme particolari, espedienti i quali, *se raccolti con discernimento, e coordinati con arte e scienza darebbero origine ad una monografia oltremodo utile ed interessante,* che potrebbe fungere quale punto di partenza per ulteriori investigazioni (3). E nemmeno mi è dato di descrivere i potenti metodi analitici che vennero inventati, mobilitali e posti in azione per determinare la distribuzione, o,

(1) Lettera del 6 aprile 1643 pubblicata in *Œuvres de Fermat*, T. II, p. 256.

(2) Riferita da E. LUCAS nella sua *Théorie des nombres*, T. I. (Paris, 1888), p. 326.

(3) Molti elementi per tale lavoro si trovano nelle annate recenti di *The educational Times.*

Digitized by Google

come si preferisce dire, la « frequenza » dei numeri primi, metodi che, dopo le meritorie fatiche di GABRIELE TORELLI ed EDMONDO LANDAU, sono a portata di mano di chiunque voglia penetrare in un campo la cui strana fecondità costituisce una delle meraviglie della Matematica odierna.

Al contrario voglio e debbo arrestarmi un istante a rilevare come la mancanza di un criterio sicuro per decidere se un dato numero sia primo o composto, ossia l'ignoranza di un'espressione analitica che comprenda tutti e soli i numeri primi, abbia per deplorevole conseguenza la presenza nella nostra scienza di problemi importanti, anche fuori del prettamente aritmetico, la cui soluzione da tempo, ma invano, ardentemente mente s'invoca.

E poichè, come ben disse NEWTON, *exempla plus prosunt quam praecepta*, citerò, a sostegno di tale asserto, un fatto notissimo: GAUSS ha dimostrato potersi costruire con riga e compasso tutti e soli quei poligoni regolari di cui il numero dei lati è espresso da $2^{2^{\mu}} + 1$ ed inoltre è primo. Ora per $\mu = 1, 2, 3$ e 4 si ottengono da questa formula i numeri 5, 17, 257 e 65537 che son primi; FERMAT credeva che altrettanto accadesse qualunque fosse il valore attribuito all'esponente μ, ma non si tardò a riconoscere che egli si era ingannato. chè, sino dal 1732, EULERO dimostrò che $2^{32} + 1$ è divisibile per 641 (1); più tardi EISENSTEIN asserì che la formola di GAUSS abbraccia infiniti numeri primi; ma, sino a che ciò non sia dimostrato, *si ignora se i poligoni regolari costruibili elementarmente sino o non in numero illimitato.*

Affine a siffatta questione geometrica è un'altra d'indole schiettamente aritmetica proveniente dalla considerazione di « numeri perfetti », tali, cioè, che ciascuno pareggi la somma de' suoi divisori. EUCLIDE ha assegnata la seguente espressione generale dei numeri perfetti PARI (*ed oggi ancora si ignora se ve ne siano di* DISPARI (2)), $(2^n - 1)\, 2^{n-1}$, con la clausola che $2^n - 1$ sia un numero primo; orbene se fosse dimostrato che, per valori di n superiori ad un certo limite, il numero $2^n - 1$ è sempre composto, si sarebbe *ipso facto* in diritto di affermare che *i numeri perfetti pari sono in numero finito;* mentre se, per converso, si fosse sicuri che nella formola $2^n - 1$ sono inclusi innumerevoli numeri primi, si sarebbe subito autorizzati a concludere che *la serie dei numeri perfetti è illimitata.* Ora quale di queste due proposizioni è vera? Mistero!

---

(1) Veggasi la memoria *Observationes de theoremate quodam Fermatiano ad numeros primos spectanti* (*Comment. Acad. Petrop.*, T. VI).

(2) Il BOURLET ha dimostrato (nell'articolo *Sur les nombres parfaits*, *Nouv. Annalei de mathem.*, III Sér., T. XV, 1896) che, se esistono, superano il numero 2197895.

Digitized by Google

9. — La straordinaria fecondità di utili conseguenze palesata dalla rappresentazione dei numeri come prodotto dei loro fattori primi ha destata l'idea di cercare altre decomposizioni fondate, non più sull'uso della moltiplicazione, ma su quello dell'addizione. Già il teorema di PITAGORA, trasportato nel campo aritmetico, aveva condotto alla scoperta di infiniti numeri quadrati esprimibili ciascuno come somma di DUE quadrati. Più tardi il sommo aritmologo greco DIOFANTO (se non altri prima di lui) aveva mostrata la possibilità di trasformare in certi casi la somma nella differenza di due cubi, e così suggerita la questione (di cui EULERO stesso non sdegnò di occuparsi (1)) di trasformare, quando ciò sia possibile, un cubo nella somma di TRE altri. Ma la prima « decomposizione addittiva » applicabile a qualunque numero venne scoperta da FERMAT, il quale asserì che *ogni numero è esprimibile come somma di* QUATTRO *numeri quadrati* lasciando a LAGRANGE la gloria di dimostrare questa importantissima proposizione (2). Anzi, a ciò non si arrestò il sommo matematico francese, il quale sin dallo scorcio dell'anno 1636, affermava (3) che similmente *ogni numero è esprimibile come somma di* TRE *numeri triangolari, e di* CINQUE *numeri pentagonali*, ecc.; al genio di CAUCHY era riserbato di dissipare, nel 1815, ogni dubbio intorno alla verità di questa proposizione bellissima fra le belle (4).

Accanto a queste decomposizioni generali, la cui prima radice risiede nella considerazione di *numeri* (se così posso esprimermi) *planimetrici* ne esistono innumerevoli altre le quali nascono da considerazioni *spaziali* od *iperspaziali*; esse vennero segnalate, al tramonto del secolo XVIII, da un eminente geometra inglese, EDOARDO WARING, il quale asserì che *ogni numero può rappresentarsi come somma di un determinato numero* N *di potenze* n-*esime* (5). N ha un determinato valore per ogni valore di n. Così per $n = 2$ si ha $N = 4$. conformemente al surriferito teorema di FERMAT-LAGRANGE. Per $n = 3$ si ha invece $N = 9$ secondo il WARING;

---

(1) Cfr. anche L. KRONECKER in *Journ. f. d. reine und angew. Mathematik*, T. LVI, 1859, e K. SCHWERING in *Archiv f. Mathem. u. Phys.*, III Reihe, T. 2, 1902.

(2) *Démonstration d'un théorème d'arithmétique* (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1770).

(3) Lettera al MERSENNE pubblicata in *Œuvres de Fermat*, T. II, p. 65. Cfr. anche un passo del *Commento* ad una nota opera di BACHET DE MÉZIRIAC che si legge ivi T. I, p. 305 e T. III, p. 252.

(4) *Démonstration générale du théorème de Fermat sur les nombres polygones* (*Mém. de l'Istitut de France*, T. XIV).

(5) *Meditationes algebraicae*, III ed., Cambridge, 1782, p. 349. E' probabile che sussista un teorema analogo in cui entrino in giuoco numeri piramidali o iperpiramidali.

Digitized by Google

la proposizione così emergente attrasse l'attenzione di JACOBI (1), il quale, nell'assenza di un'argomentazione capace di fugare ogni dubbio intorno alla verità di essa, con l'aiuto del famoso calcolatore DAHSE, dimostrò che essa sussiste per tutti i numeri non superiori a 12,000; mezzo secolo più tardi si riconobbe la sua validità sino a 40,000 (2).

L'elegante proposizione generale segnalata dal WARING, durante più di un secolo, accrebbe di uno il numero degli impertinenti punti interrogativi di cui è cosparsa la Teoria dei Numeri. Gli è soltanto quattro anni or sono che un matematico, la cui erculea forza logica sembra capace di piegare qualunque difficoltà — parlo di DAVIDE HILBERT — pose fuori di discussione la verità del teorema di WARING ed in tal modo aggiunse un nuovo articolo al codice delle leggi osservate da tutti i numeri (3). Ma poichè egli pervenne a questo fondamentale risultato applicando concetti, formole e metodi dell'analisi infinitesimale, così, mentre da un lato porse una novella prova della intima e profonda « entente cordiale » che esiste fra due provincie matematiche che un tempo si riteneva dovere restare perennemente disgiunte ed estranee l'una all'altra, ha lasciato ai contemporanei ed ai posteri di pronunciare l'ardua sentenza se sia questo o non uno dei casi in cui la considerazione dell'infinito sia sussidio indispensabile all'investigazione aritmetica.

Malgrado l'importanza veramente straordinaria del progresso che l'HILBERT fece compiere alla scienza dei numeri, egli non ha peranco scritta la parola FINE al gruppo d'indagini aventi per nocciolo il così detto « problema di Waring », scopo del quale è di determinare il minimo valore che può assumere il numero N in corrispondenza di un assegnato valore di n. Tale problema venne sino ad ora attaccato adottando l'opportunissima tattica delle approssimazione successive.

Così per $n = 3$, il MAILLET trovò dapprima $N = 17$; in seguito il FLECK abbassò questo numero a 13; finalmente il WIEFERICH ha stabilito (con un ragionamento che venne ben presto reso in ogni sua parte perfetto) essere sempre, d'accordo con quanto aveva affermato il WARING, $N = 9$, onde oggi si è certi che sussiste il teorema: *ogni numero si può rappresentare come somma di* NOVE *cubi* (4).

Similmente: per $n = 4$ il numero N dal valore 53, ottenuto nei primordi della ricerca, venne successivamente abbassato a 47, 45, 41,

(1) Cfr. *Journal f. die reine und angew. Mathematik*, T. XLII, 1851, oppure *Ges. Werke*, T. VI, 322 e segg.

(2) v. STERNECK, *Sitzungsber. der k. k. Akad. von Wien*, T. CXII, 1903.

(3) *Beweis für die darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl* n-*ter Potenzen* (*Waringshes Problem*) (*Mathem. Annalen* T. LXVII, 1909).

(4) *Mathem. Annalen*, T. LXVI, 1909, p. 95-101.

Digitized by Google

39, 38 e 37; al dire del WARING il valor minimo di N sarebbe 19; se fosse possibile farlo scendere fino a 16 risulterebbe dimostrato che *ogni numero si può rappresentare con somma di sedici quarte potenze.* Nascerebbe allora, e sarebbe ben giustificata, la speranza che in un giorno, forse terribilmente lontano, il teorema di Waring potesse venire meglio precisato così: *ogni numero si può rappresentare come somma di* n^2 *potenze* n-*esime.*

10. — Non v'ha chi non vegga come siffatte considerazioni segnalino una miniera ricca e profonda, rigurgitante di nobile metallo, la quale è da augurarsi chiami da tutto il mondo esploratori esperti e coraggiosi, tanto più che, per vie sotterranee, essa viene e congiungersi ad altri cospicui giacimenti auriferi tuttora inesplorati.

Ed invero, il fatto che qualsivoglia numero può esprimersi sotto la forma di somma di un determinato numero N di potenze *n*-esime, non esclude (come viene provato da parecchi esempi) che per numeri di specie particolari il numero degli addendi possa scendere al disotto del numero N, donde il problema generale di determinare il minimo di quel numero di addendi per speciali categorie d'interi. In particolare ci si trova di fronte alla questione di determinare il minimo numero di potenze *n*-esime in cui si può decomporre ogni potenza *n*-esima; essa fu risolta nel caso più semplice, perchè si conoscono infiniti numeri quadrati che sono somme di un numero di quadrati inferiore a QUATTRO, ma si ignora quali siano tutti i cubi rappresentabili con meno di NOVE cubi. Nel caso generale, ove si riuscisse ad assodare che, se *n* è più grande di 2, quel minimo è sempre maggiore di 2 e non può abbassarsi sino a 2 nemmeno per numeri particolari, sarebbe in pari tempo dimostrato che *se* n *superiore a* 2, *la somma di due potenze* n-*esime non è mai una potenza* n-*esima.*

E' questo il « grande teorema di Fermat », il più celebre ed oscuro enigma che offra oggi, non soltanto la Teoria dei Numeri, ma tutta la Matematica. Mentre il celebre scienziato francese garantiva di essere in grado di dimostrarlo con un ragionamento elementare di poche pagine, a ricostruirlo non riuscirono i più eminenti analisti dei secoli posteriori, i quali arrivarono soltanto a restringere sempre più il campo di valori dell'esponente pei quali il teorema in questione è tuttora « sub judice ». Grazie a tali ricerche, molte delle quali portano l'impronta del genio, venne straordinariamente accresciuta la probabilità che quel teorema sia incondizionatamente vero (1); ma nessuno può oggi in piena coscienza

(1) Per $n = 3$ il teorema di Fermat fu dimostrato da EULERO, onde da tempo si è certi che la curva di terz'ordine $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ non contiene alcun punto razionale; da ciò si è condotti all'importante (e tuttora irresoluta) questione: quali sono le curve di terz'ordine a coefficienti razionali che contengono uno e quindi infiniti punti razionali? Una questione analoga sussiste per le curve di un ordine superiore a 3.

Digitized by Google

farsi mallevedore che fra i numeri della serie naturale non si trovi qualche originale che, assunto come esponente, faccia cadere in difetto l'asserzione di FERMAT. A dissipare tale penosa incertezza si provarono miriadi di matematici di primo... e di ultimo ordine, ma sempre indarno; sicchè sino al momento presente nessuno è riuscito a toccare la cima dell'albero della cuccagna, ove la generosità esemplare del compianto dottor WOLFSKEHL ha collocato, quale calamita ultrapotente, la somma di centomila marchi.

11. — Signori, la Teoria dei numeri ha sempre esercitato un fascino invincibile sopra tutti coloro che l'hanno una volta accostata; ed io mi avveggo, ormai troppo tardi, di non aver avuta la capacità di resistervi e di avere così (pur senza aver percorso che una piccola parte del delizioso campo che si stendeva dinanzi ai miei occhi) abusato della vostra indulgente pazienza. Vogliate scusarmene, Colleghi ed Amici! E vogliate altresì accordarmi il vostro perdono se io — in questi giorni nei quali la Sezione genovese della «Mathesis» esulta per la presenza nel suo seno di tanti ospiti graditi — in luogo d'innalzare un inno per celebrare le splendide vittorie della scienza che ci affratella, mi sono dilungato a segnalare piuttosto gli abissi tuttora inesplorati, che le cime su cui sventola il nostro vessillo trionfale; e se, astretto dall'inesorabile concatenazione dei fatti, prendo commiato da voi col ripetere le melanconiche parole di AMLETO: «O Orazio, esistono in cielo e sulla terra assai più misteri di quanto sogni la nostra filosofia» (1).

XXX.

LEONARDO DA VINCI E LA GENIALITA' LATINA

Conferenza tenuta in Milano, all'Università Popolare, il 14 gennaio 1917 e ripetuta poi in quelle di Genova e Livorno e nella R. Accademie Navale di questa città.

1. — Chiunque segua attraverso i secoli la fortunosa storia d'Italia non tarda a rilevare come il periodo interposto tra il 1450 ed il 1520, quest'epoca nella quale al Rinascimento gradatamente succede l'Evo moderno, sia uno dei più agitati che abbia attraversata la patria nostra.

L'età dei Comuni, tanto gloriosa per quanto concerne la vita intellettuale del popolo italiano, volgeva allora al tramonto per lasciare il

(1) *There are more things in heaven and earth, Horatio,*
Than are dreamt in our philosophy.

Digitized by Google

posto a quella tristissima delle preponderanze straniere, ed il trapasso dall'una all'altra di queste grandi divisioni della storia è contrassegnato da avvenimenti fecondi delle più gravi conseguenze: discordie cittadine, guerre sanguinose, violenti mutamenti nella forma di governo e nelle persone dei governanti, congiure ordite per nobili ambizioni o per bassa libidine di potere, tradimenti, reali od inventati per coonestare repressioni cruente, ed altri fatti non meno dolorosi contribuirono allora a scatenare la bestia umana violentissimamente ed a far spargere torrenti di sangue da un capo all'altro dell'Italia.

I nomi di GIAN GALEAZZO SFORZA, avvelenato dal proprio zio, impaziente di succedergli nel Ducato di Milano; del Conte di CARMAGNOLA. decapitato, quantunque forse innocente, per decreto della tenebrosa oligarchia veneziana; di GIROLAMO SAVONAROLA, condannato al rogo nella mite e gentile Firenze; di VITELLOZZO VITELLI e OLIVEROTTO DA FERMO strangolati nella stessa notte per ordine del Duca VALENTINO, di cui erano capitani, stanno a provare come nel tempo in cui il timone dello Stato era affidato ad un LODOVICO il MORO, ad un ALESSANDRO VI o ad un CESARE BORGIA il mancare alla parola giurata, il sopprimere i più stretti congiunti ed il chiedere aiuto allo straniero fossero reputati da chiunque cingeva corona come mezzi legittimi per conquistare o rafforzare il potere o per soddisfare i disonesti desiderî che dilagavano in tutti gli strati sociali in un'êra di generale corruzione.

Ora nel centro di questo orrendo quadro, sopra uno sfondo spaventosamente vermiglio, fra turbe briache di vino e di sangue ed accese dalle più ignobili passioni che albergar possano nel cuore dell'uomo, si erge e campeggia, dolce e imponente, la figura di LEONARDO da VINCI, sommo come artista e come scienziato, genio veramente universale, la cui grandezza intellettuale e morale andò costantemente crescendo di mano in mano che fu dato addentrarsi nelle latebre della sua grande anima, ma che ormai, per universale consenso, è collocato in quella sicura altezza che non teme l'ingiuria del tempo.

2. — Il sorgere ed il prosperare di un fiore così puro, così splendido, così olezzante in un'atmosfera di putredine, quale é quella in cui vissero i BORGIA, prova una volta di più come la Natura, nella sua inesauribile fecondità, sembri compiacersi di presentare all'occhio dell'uomo stupefatto, personaggi di eccezione, materiati di elementi antagonistici, i quali si direbbero creati appunto per ridurre alle debite proporzioni l'ammirazione universalmente tributata alla potenza creatrice dei romanzieri e dei poeti di fantasia più fervidamente scapigliata.

E che realmente agli antipodi della verosimiglianza possa apparire il « fenomeno LEONARDO da Vinci » non è difficile vedere. Si pensi, in-

Digitized by Google

fatti, ad un fanciullo frutto naturale di un' illecita scorreria extramatrimoniale di un troppo ardente notaio del contado toscano, il quale, grazie ad una spiccatissima vocazione per la pittura, viene inviato a perfezionarsi nell'arte del pennello sotto la guida sapiente di uno fra i più celebri artisti viventi allora a Firenze. E, non soltanto diviene così eccellente artista, che il maestro, assalito da invincibile scoramento. abbandona l'arte che avevalo reso famoso; ma, resistendo alle velenose tentazioni che gli offriva in gran copia una città equiparata dai contemporanei alla biblica Sodoma, consacra allo studio tutte le proprie giovanili energie e cosí giunge ad impadronirsi di quanto costituiva il sapere del tempo suo ed a divenire uno dei prediletti familiari di un sovrano intellettuale quale LORENZO il MAGNIFICO.

Pensatelo quando, mirando ad una posizione sociale ed economica che gli consentisse di tradurre in atto le grandi opere che facevano ressa nella sua mente, abbandona il tranquillo soggiorno fiorentino per trasferirsi nel vortice della Corte di LODOVICO il MORO, uno degli ambienti più corrotti che ricordi la storia.

Pensatelo poi peregrinando di terra in terra al servizio dei più malfamati potenti del mondo: supremo consigliere tecnico della Repubblica di Venezia, poi architetto ed ingegnere generale del Duca VALENTINO, finalmente ospite del Re di Francia, che ne raccoglie l'estremo sospiro.

Pensatelo esposto ad ogni sorta di dolci seduzioni e pericolose lusinghe; quest'uomo che fu una delle più belle creature che Natura abbia plasmato; celebrato dai contemporanei per la forza, la destrezza e la grazia, per l'eloquio seducentissimo e come suonatore di lira da equipararsi ai musici più famosi di tutti i tempi; rinomato infine come inarrivabile nella difficile arte dell'improvvisatore.

Riflettete a tutto questo, Signori, e poi dite se era possibile prevedere che un tal uomo fosse dalla sorte chiamato a divenire, tanto nella vita quanto nelle opere, il vero prototipo della più rigorosa ed austera castigatezza.

Che a tanta altezza egli sia giunto nella vita risulta osservando che, se VITTORIA COLONNA portò qualche raggio di sole nell'agitata esistenza di MICHELANGELO BUONARROTI e se RAFFAELLO, deposto il divino pennello, trovava piacevole ristoro fra le braccia della Fornarina, nella biografia di LEONARDO indarno si cerca qualche traccia di sorriso muliebre.

3. — Quale egli fu nella vita, tale si ritrova nelle opere. Giacchè, mentre RUBENS compiacevasi nel ritrarre le poco ascetiche fattezze delle sue ben nutrite e non astemie compatriotte, mentre negli sguardi di alcune celebratissime Madonne del MURILLO lampeggia qualche fiamma di amore terreno, tutta l'arte pittorica di LEONARDO (per quanto almeno si

Digitized by Google

può giudicare dalle poche opere che la sua proverbiale incontentabilità gli concesse di condurre a termine o che sfuggirono al furore iconoclasta di barbari ignoranti) è soffusa d'impeccabile spiritualità.

E ciò non soltanto allorchè si tratta di tele a soggetti religiosi, quali la *Vergine delle Rocce* e la *Testa della Vergine*; non soltanto nei ritratti di sovrani, come sarebbe quello di *Beatrice d'Este;* ma persino nella *Gioconda*, il cui enigmatico sorriso sembra doversi intendere come un'inflessibile ripulsa a tormentose insistenze di qualche adoratore troppo intraprendente.

E nuove conferme a tale giudizio sintetico sopra l'opera pittorica di LEONARDO si trarrebbero dalla *Leda*, il quadro a soggetto più scabroso da lui trattato; chè coloro che ebbero la fortuna di ammirarlo prima della sua distruzione, assicurano che la squisita composizione raffigurava una donna ignuda, in attitudine d'ingenua vergogna, il cui fianco era quasi vestito dall'ala di un cigno, mentre il braccio castamente circondava il lungo collo dell'elegante animale.

4. — La strana espressione che ha il viso di MONNA LISA del GIOCONDO nella pittura vinciana dev'essere divenuta ben presto universalmente famosa; si è indotti a ritenerlo notando como uno dei primi e più reputati biografi di LEONARDO credette proprio dovere rilevare che quello eternato dal grande artista non era il consueto atteggiamento del volto della bellissima signora, ma esprimeva il godimento che essa provava ascoltando i suoni ed i lazzi alternati dai suonatori e dai buffoni che l'artista chiamava attorno a sè durante le lunghe sedute di posa, affinché la noia non s'impadronisse del modello e venisse evitato che il quadro assumesse quel certo che di malinconico che la pittura dà spesso al ritratti.

In tale racconto — miracolosamente sfuggito ai colpi demolitori dell'implacabile critica moderna — si trova racchiuso un dato psicologico che projetta uno sprazzo di vivida luce sopra il concetto che aveva il sommo pittore intorno a l'indole e gli scopi dell'arte ed intorno agli obblighi di coloro che la coltivano; e le illazioni risultanti trovano inoppugnabile conferma in altri fatti di grande interesse, amorosamente registrati dai contemporanei e di cui mi corre l'obbligo di far qui menzione.

Si narra fosse abitudine di LEONARDO il girare per le piazze ed i mercati, ove più fitta era la folla del popolo, spiando finchè avesse scoperta una figura dotata di qualche particolarità insolita; trovatala, la osservava con la più intensa attenzione, per essere poi in grado di fissarne i lineamenti sulla carta.

Soleva anche seguire i delinquenti quando venivano tratti all'estremo supplizio, studiandone gli spasimi dell'agonia e le contrazioni della

Digitized by Google

morte; ed è celebre quel disegno in cui raffigurò, con fedeltà degna di un pittore fiammingo, BERNARDO BANDINI. l'assassino di GIULIANO de' MEDICI nella congiura dei Pazzi.

Da altra fonte apprendiamo che quando egli stava dipingendo il famoso *Cenacolo*, che tuttora si ammira nel convento di Santa Maria delle Grazie di Milano, il lavoro subì, verso il termine, una pausa lunga ed inesplicabile. I frati, allora albergati in quel Monastero, da tale interruzione giustamente allarmati, diressero ripetuti lagni a LODOVICO il MORO, che di quell'opera aveva data commissione; ed il Duca a sua volta mosse aspro rimprovero a LEONARDO per la sua apparente infingardaggine. Sapete, o Signori, quale risposta ottenne? Fece notare l'immortale artista che per finire il grande affresco mancava un solo particolare: la testa di GIUDA; e dichiarò che per scoprire il modello di un viso esprimente la scelleratezza di un tanto peccatore, egli aveva preso a frequentare quotidianamente il quartiere di Milano abitato dalle più vili e ignobili creature viventi nell'ombra del Duomo, ma che sino allora non era riuscito a porre la mano sopra un soggetto confacente al caso suo. Constatiamo con gioia come l'affannosa ricerca abbia finalmente condotto allo scopo: così potè venire ultimata l'opera che viene giudicata per la più insigne in pittura che sia stata creata nel periodo della Rinascenza.

Ora questi episodi, da un lato sono confermati e da l'altra parte porgono una spiegazione del fatto meraviglioso che nella ricchissima collezione di schizzi vinciani, fra figure di perfetta regolarità o di celestiale bellezza, si trovino profili a lineamenti tanto ridicoli o tanto repugnanti da sembrare destinati ad una raccolta di caricature o ad un museo delle mostruosità umane.

Tutto ciò cospira a provare nel mondo più sicuro che in LEONARDO l'ispirazione artistica era costantemente disciplinata e guidata dai più rigorosi criteri scientifici; che per lui lo scopo supremo dell'arte era la scrupolosa riproduzione, non del solo Bello, ma di tutto il Vero; che finalmente egli riteneva che, per conseguire siffatto intento, l'artista dovesse affrontare le più aspre fatiche, i più repugnanti spettacoli, i più impuri contatti, onde nessuna infedeltà nei particolari venisse ad offuscare l'esatta riproduzione della verità.

Furono da tutti seguìti i saggi ammaestramenti che risultano combinando la contemplazione delle opere vinciane con le informazioni offerte dai suoi biografi?... Ai competenti in materia la risposta definitiva! Ad un profano, frequentatore assiduo di Pinacoteche ed Esposizioni di Belle Arti, sia soltanto permesso di nutrire qualche dubbio in proposito, quando si trova in presenza di stridenti anacronismi, quali un campo di biade

Digitized by Google

mature fiancheggiato da un filare di mandorli in fiore, od una Discesa di Cristo dalla Croce, ove fra coloro che assistono alla tragica scena fa bella mostra di sè un vecchio dalla candida barba fluente, vestito della tunica caratteristica dell'Ordine dei Cappuccini, il quale, notoriamente, venne istituito soltanto quindici secoli più tardi.

5. — Per LEONARDO la pittura fu, senza dubbio, il più potente veicolo al raggiungimento della fama che constella la sua fronte gloriosa; essa, però, non rappresenta se non uno degli aspetti sotto cui si estrinsecarono le sue portentose attitudini artistiche. Egli, infatti, maneggiava lo scalpello con pari disinvoltura e perizia del pennello. Ma, per un complesso di deplorevoli circostanze, che in parte sono ignote ed in parte sarebbe troppo lungo il descrivere, tutta la sua opera di scultore andò miseramente distrutta.

Viene in particolar modo universalmente lamentata la scomparsa di un gigantesco cavallo, alto quasi otto metri, che doveva servire per un monumento equestre a FRANCESCO SFORZA ed attorno a cui egli lavorò non meno di sedici anni.

Chi ebbe la ventura di contemplarne il modello in creta, quando trovavasi esposto nella piazza del Castello di Milano, assicura trattarsi di cosa talmente superba che, ove fosse stata fusa in bronzo, la grande metropoli lombarda avrebbe potuto competere con Roma e Venezia, città che vantano le statue di MARCO AUBELIO e del COLLEONI. I rozzi arcieri di Guascogna, scesi in Italia col cristianissimo Re di Francia, distruggendo quella splendida opera d'arte, provocarono e destano tuttora roventi frasi di legittima esecrazione da parte di tutti gli adoratori del Bello.

A tali severe parole ci associamo con tutto il cuore. Tuttavia noi che, per così dire, assistemmo all'incendio della Cattedrale di Reims, al bombardamento della Biblioteca di Louvain, alla polverizzazione di preziosi affreschi che adornavano la Chiesa degli Scalzi in Venezia; noi uomini prodigiosamente evoluti per opera della «kolossale Kultur» tedesca, siamo inclinati a maggiore indulgenza per la soldatesca francese, giacchè la distruzione del modello di una statua, al paragone di tali profanazioni, ci sembra poco più di uno scherzo di cattivo genere di qualche milite avvinazzato.

Però il rimpianto risorge violento quando, percorrendo la raccolta dei disegni lasciati dal VINCI, c'imbattiamo in tracce splendidissime degli assidui e geniali studi che resero possibile il capolavoro di LEONARDO scultore; chè la forza e la vivacità, espresse in modo sorprendente, nei disegni in cui egli raffigurò il generoso animale nitrente e scalpitante, posseggono tale sovrana bellezza da giustificare coloro i quali sentenziano che, ove il progettato monumento fosse stato condotto a termine,

Digitized by Google

LEONARDO sarebbe stato collocato, nel Pantheon degli scultori, a lato di FIDIA e di PRASSITELE.

6. — Ma i disegni a cui ho testè alluso presentano un altro generale interesse, perchè fanno fede delle lunghe indescrivibili fatiche alle quali LEONARDO si sottoponeva ogni qualvolta era chiamato ad eseguire qualche opera sulla tela o nel marmo, convinto come egli era, che l'Arte fosse il frutto più gustoso e nutriente che poteva attendersi dalla Scienza. Fu grazie a tale convinzione, assurta in lui col tempo a norma costante di vita, che egli potè divenire la più eccelsa personificazione dell'alleanza della Scienza con l'Arte; fu dessa che gli consentì di assidere la rappresentazione grafica e plastica della natura sopra basi veramente razionali e di sentenziare che *quelli che s'innamoran di pratica senza scienza sono come il nocchiero ch'entra in naviglio senza timone o bussola, che mai ha certezza dove vada.*

E che una radicale riforma delle Arti mute, inspirate alla massima *la teoria è il generale e la pratica sono i soldati*, fosse ai tempi suoi di urgente necessità, emerge dall'aspra rampogna che egli diresse a coloro che *per parere grandi disegnatori fanno i loro nudi legnosi e senza grazia che paiono al vederli un sacco di noci più presto che superficie umane, ovvero un fascio di ravanelli più tosto che muscolosi nudi.*

Ora per evitare il gravissimo pericolo di eseguire pitture o statue che risultassero calunnie all'opera del Creatore, per assicurare la stretta osservanza da parte sua della sua massima *nulla deve passare nell'opera che non sia stato esaminato dalla ragione*, LEONARDO intraprese ricerche di vastità e profondità meravigliose intorno all'Anatomia dell'uomo, esaminando, sezionando, dissecando cadaveri e poi disegnando tutte le parti del corpo umano, con fedeltà e vivezza così straordinaria che non sai se più ammirare l'occhio sagace dello scienziato, in grado di distinguere in ogni organo il principale dall'accessorio, o la mano docile dell'artista, che fissa sulla carta quanto ne ha colpito la mente.

Trascinato poi, quasi involontariamente, a occuparsi della Fisiologia e della Patologia dell'uomo, divenne uno dei piu profondi conoscitori che allora esistessero della struttura e del funzionamento del più complicato dei meccanismi che offra l'Universo. Onde é certo che, quando gli schizzi e gli appunti da lui vergati saranno completamente noti e decifrati, la fama del VESALIO come creatore dell'Anatomia umana sarà di gran lunga oscurata e la sua figura scientifica ridotta alle debite proporzioni. Tuttavia quanto ne fu sinora pubblicato è sufficiente a far ravvisare nel grande artista il divinatore della moderna Embriologia, chè di tale scienza egli seppe determinare gli scopi ed i limiti con tale sorprendente chiarezza da potere accingersi ad un'esposizione metodica di essa su di un

Digitized by Google

piano così razionale da essere in grado di mostrare che quel Grande era acuto nell'analisi del pari che abile nella sintesi scientifica.

Ma se, sgraziatamente, è questo uno dei tanti progetti che non gli fu concesso di eseguire, per converso scrisse completamente un *Trattato della fisiologia degli organi vocali, opra e materia* (come egli lasciò scritto) *nuova e non più detta*. Se non che la maligna stella, che con tanto accanimento ne perseguitò la produzione artistica, scientifica e letteraria, lo indusse ad affidare, pochi anni prima di morire, il suo manoscritto ad un cameriere del Papa, il quale, nell'incapacità di comprendere il valore dell'inestimabile tesoro di cui un capriccio della sorte lo aveva fatto depositario, scioccamente lo smarrì; oggi deve ritenersi irremissibilmente perduto.

7. — Ad estendere le proprie ricerche anatomiche dall'uomo agli animali LEONARDO fu indotto, parte per prepararsi a modellare il monumento a FRANCESCO SFORZA, ma più ancora assillato dalla superba aspirazione di schiudere alle peregrinazioni umane l'ambito sconfinato dei cieli, di aprire ai mortali quella via, sino allora sbarrata, benchè, quasi per ironia, si presenti come la più sgombra ed aperta.

Ora per raggiungere l'intento, a cui non erano bastate le ali di ICARO, scambio di prender le mosse da considerazioni prettamente meccaniche o da quegli aprioristici principî metafisici che, di deduzione in deduzione, trassero taluno alla ridicola conclusione che gli uccelli non possono volare, LEONARDO partì dal fatto inoppugnabile della realtà di tale volo e si propose il problema di vedere perchè e come esso avvenga. Da ciò, durante il suo soggiorno a Milano, egli fu tratto alle vaste e profonde investigazioni sulle traiettorie descritte da certi volatili (specialmente dal pipistrello e dal nibbio) e sulla struttura delle loro ali, delle quali esistono frammenti numerosi ed importantissimi nei fogli da lui relitti, e che raggiunsero tale ampiezza da permettergli di tracciare con mano ferma almeno il piano di un completo *Trattato sul volo degli uccelli*.

Tali ricerche, per non dir altro, condussero quel Grande a riconoscere che il peso, anzichè costituire, come potrebbe a prima giunta sembrare, un impedimento al volo, è condizione necessaria affinchè esso possa avere luogo, essendo l'ostacolo a che l'uccello si trovi in completa balia del vento. Basandosi sopra tali conclusioni, in una prima fase delle sue fatiche aviatorie, pensò LEONARDO che l'uomo potesse librarsi nell'aria agitando violentemente le braccia, previamente munite di ali potenti, modellate su quelle dei più robusti uccelli da preda, e forse tradusse in atto tale idea in qualche modello che, per nostra disgrazia, non si é sottratto all'ingiuria del tempo.

Ma, incontentabile come era, critico spietato dell'opera propria, non

Digitized by Google

tardò ad avvedersi come tali mezzi fossero troppo modesti per assicurare l'agognata conquista, ed allora si avviò per un'altra strada, del tutto diversa, che lo guidò a concepire il primo velivolo che meriti un ricordo nella storia dell'aeronavigazione. Dai disegni tuttora esistenti dell'ala e dell'apparato motore da lui immaginati emerge che, quale forza motrice, veniva da LEONARDO utilizzata l'energia somministrata da due poderose molle e che l'insuccesso dell'audacissimo tentativo deve ascriversi soltanto all'essere tale forza troppo esigua allo scopo. Tuttavia è generalmente riconosciuto che quel genio sovrumano ha per primo formulata con rigore e chiarezza la teoria scientifica del volo. Ed è indubitato che, ove le sue idee genialmente rivoluzionarie non fossero rimaste durante parecchi secoli sepolte in fogli inaccessibili a chi sarebbe stato in grado di comprenderle, la conquista dell'aria sarebbe stata un fatto compiuto molto tempo prima della nascita dei fratelli WRIGHT.

LEONARDO, adunque, anche in questo ubertosissimo campo lasciò ad altri il raccogliere i frutti dati dal terreno da lui dissodato. Quasi a parziale compenso di siffatto insuccesso la sorte volle che le sue ricerche aerodinamiche venissero in dominio universale dopo che era ormai superato quell'oscuro periodo di latente preparazione, durante cui il pubblico era talmente scettico intorno alla possibilità di volare, che guardava con compassione o copriva col proprio disprezzo coloro che si dedicavano alla navigazione aerea, giungendo persino a chiamarli candidati al manicomio. LUCA BELTRAMI (l'eminente cultore degli studi vinciani a cui, nella sua patria, io invio un reverente saluto), facendo nota questa importantissima faccia della poliedrica mentalità di LEONARDO soltanto dopo che il celebre «circuito areonautico di Brescia» aveva dimostrata la risolubilità del grande problema, provvide ottimamente a che il sommo pensatore non offrisse in sè stesso un novello argomento a sostegno nella tesi, tanto sconsolante, che afferma l'indissolubile connubio di Genio e Follia.

8. — Da quanto, Signori, ebbi l'onore di esporvi emerge che LEONARDO divenne profondo conoscitore di segreti della Natura nella nobilissima ambizione di rendere esattamente conformi al vero le proprie opere d'arte; così egli fu naturalmente guidato ad approfondire uno fra i più ponderosi e seducenti problemi di tutta la Meccanica, cioè di quella fondamentale disciplina che egli reputava *il paradiso delle scienze matematiche, perchè con essa si viene al frutto di queste.*

Siffatta occupazione non era, d'altronde, nuova per lui che, sin dal suo primo soggiorno in Firenze, coltivò col massimo impegno tutti i rami dell'Ingegneria. A quell'epoca, infatti, risale il progetto arditissimo, da lui presentato alle competenti autorità, di sollevare il tempio di

Digitized by Google

S. Giovanni, insigne ornamento della città del Giglio, per sottomettervi le scalee senza rovinarlo. Il progetto rimase tale per la pavida prudenza che caratterizza i governanti di tutti i tempi e di tutti i paesi; ma al nostro immortale compatriota resta la gloria di avere offerto il primo disegno di trasporto integrale di un edificio, operazione colossale nei risultati, ma nella esecuzione delicatissima, di cui oggi sembrano vantare il monopolio gli ingegneri della grande Confederazione nord-americana.

Inoltre quando, appena trentenne, egli offerse i propri servigi allo Stato di Milano, nella lettera di auto-candidatura includeva, fra le mansioni che sentivasi in grado di disimpegnare, tutte quelle che oggi si affidano agli ingegneri civili e industriali, navali e militari, e i suoi manoscritti, riboccanti di schizzi di macchine e di piani di svariatissime costruzioni, stanno a provare come egli non presumesse troppo di sè quando cercò occupazione presso LODOVICO IL MORO e tanto meno quando, fatto costui prigioniero del Re di Francia, egli profferse l'opera propria alla Repubblica di Venezia.

9. — Volgevano allora tempi non lieti, per la gloriosa Regina dell'Adriatico. La sconfitta da essa subita allo Zonchio per mano dei Turchi la poneva nell'assoluta necessità di correre sollecitamente ai ripari.

A tal fine LEONARDO, non appena assunta la carica di consultore tecnico della Repubblica, suggerì due ordini di provvedimenti: difensivi gli uni, gli altri offensivi.

Consistevano i primi nel rafforzare il confine orientale dello Stato veneto col trasformare l'Isonzo in un'insormontabile barriera acquea. Ora quando verrà narrata con ogni particolare la storia della titanica lotta che noi stiamo oggi sostenendo, onde realizzare il sogno di vedere sventolare il vessillo tricolore sopra la torre di S. Giusto, si vedrà che quell'idea genialissima, se non potè venire completamente utilizzata a tutela della piccola gloriosa Repubblica, lo fu, quattro secoli appresso, dalla grande Italia nel corso della sua ultima guerra per la redenzione nazionale.

10. — Gli altri provvedimenti suggeriti dall'immortale pensatore avevano, invece, per loro fondamento la creazione e l'impiego di una squadra di palombari aventi la triplice missione di distruggere la flotta nemica, di danneggiare i porti dei Turchi e di affrancare i prigionieri veneziani, allora in grande numero detenuti a Lepanto. Gli archivi del misterioso Governo veneto, per quanto lungamente interrogati, nulla rivelarono intorno all'accoglienza che tale ardita proposta ricevette da parte di chi avrebbe dovuta applicarla. Per converso quale fosse l'armatura dei guerrieri subacquei immaginata da LEONARDO risulta da alcune im-

Digitized by Google

portantissime pagine da lui vergate e di recente interpretate. Esse attestano eziando come a quel sommo non fossero sfuggite le enormi difficoltà della progettata impresa e come egli avesse escogitati artifici ingegnosissimi per superarle. Ma queste pagine provano ancora come la fiducia del geniale stratega sull'efficienza bellica della nuova arma era talmente completa che egli intendeva riserbarne l'uso esclusivamente contro gl'infedeli. Infatti fra i suoi scritti superstiti si trova il sommario di una descrizione della vita sottomarina che egli aveva in animo di scrivere, nel quale si leggono le frasi seguenti, che è impossibile non producano su tutti una profonda commozione ed un'ammirazione senza limiti:

Come non si può star sotto l'acqua, se non quanto si può ritenere lo alitare. Come molti stieno con istrumenti alquanto sotto l'acqua. Come e perchè io non scrivo il mio modo di star sotto l'acqua quanto io posso star senza mangiare; e questo non pubblico e devolgo per le male nature degli òmini, li quali userebbero li assassinamenti ne' fondi de' mari col rompere i navili in fondo, e sommergerli insieme colli òmini che vi sono dentro.

O anima profetica! immaginavi tu forse, scrivendo tali parole, che le armi terribili, che balenavano dinnanzi al tuo spirito, quattro secoli più tardi sarebbero usate, non soltanto contro marinai e soldati combattenti, ma anche contro uomini inermi, deboli donne e fanciulli innocenti, neppur rispettando coloro che si dibattevano negli spisimi dell'agonia?

11. — Mentre le frasi surriferite rivelano in Leonardo l'uomo di cuore, ansioso di temperare le asprezze di quel flagello, che egli non esitava a qualificare per *pazzia bestialissima*, ogni pagina degli scritti da lui vergati fa fede del culto sconfinato che egli professava per le ricerche di carattere dottrinale.

Non vedi tu, egli scriveva fra l'altro, *che il tesoro per sè non loda il suo cumulatore dopo la sua vita, come fa la scienza. La quale è sempre testimonia e tromba del suo creatore, perchè ella è figliola di chi la genera e non figliastra come la pecunia?*

A tale concetto altissimo dell'investigazione disinteressata del vero fa splendido riscontro il metodo di ricerca rigoroso a cui egli ognora scrupolosamente si attenne, assumendo come sua guida l'esperienza, di cui si proclamava discepolo, rifiutando cieca fede all'autorità dei maggiori e sforzandosi di applicare in ogni occasione il numero e la misura, convinto come egli era che *nessuna umana investigazione può dimandarsi vera scienza se non passa per le matematiche dimostrazioni.*

Ora chi non ravvisa in siffatti principii i canoni fondamentali dell'indagine scientifica moderna? Tali conclusioni, a cui conduce l'esame accurato di tutti gli studi condotti a termine del sommo italiano, ricevet-

Digitized by Google

tero inconfutabili conferme da un gran numero di frasi, assai significanti, sparse nei suoi manoscritti, le quali, nel loro insieme, formano i cardini, non soltanto della sua, ma anche della nostra filosofia scientifica.

Così in un punto egli scrisse: *Nello studio delle scienze collegate alle matematiche quelli che non consultano la natura, ma gli autori, non sono figli della natura, ma direi, ne sono i nepoti. Essa sola infatti è la maestra dei geni.*

E altrove: *Bisogna consultare l'esperienza variandone le circostanze, sino a che non siasi riusciti a dedurne delle regole generali, perchè è essa che somministra le regole.*

E aggiunse: *L'interprete della natura è l'esperienza; essa non inganna mai; è il nostro giudizio che inganna, perchè si aspetta degli effetti a cui l'esperienza si rifiuta.* D'accordo con tutto ciò è la sua convinzione che *ogni nostra cognizione comincia dai sentimenti.*

In un altro punto egli saviamente ammonisce: *chi può andare alla fonte non vada al vaso;* ed insorgendo contro certi eruditi che affettavano verso lui, uomo di poche lettere, un altezzoso compatimento (erano i numerosi umanisti parolai del suo tempo) esclama: *Me inventore disprezzano; quanto maggiormente loro, non inventori, ma trombetti e recitatori delle altrui opere, dovranno essere biasimati.*

Tale franca dichiarazione non deve però interpretarsi come sintomo in LEONARDO d'irragionevole spregio per i lavori degli antichi; chè egli lasciò scritto: *Felici son quelli che presteranno orecchio alle parole de' morti;* e d'altronde le citazioni di scrittori grandi, mediocri e piccoli sparse a piene mani ne' suoi appunti stanno a dimostrare come egli li avesse amorosamente cercati e rispettosamente consultati, non già per ripeterne pappagallescamente le asserzioni, ma spinto dalla sua insaziabile bramosia di tutto conoscere e per determinare con precisione il punto donde gli conveniva di prendere le mosse nei titanici sforzi che egli andava facendo per accrescere il nostro patrimonio scientifico.

Anzi, paragonando l'opera propria a quella dei predecessori, con bonaria modestia scriveva: *Perchè li òmini innanzi a me nati hanno preso per loro l'utili e necessari temi, farò come colui il quale per povertà giunge l'ultimo alla fiera, e non potendo d'altro fornirsi, piglia tutte le cose, già da altri viste, e non accettate per la loro poca valetudine. Io questa dispregiata e rifiutata mercanzia, rimanente de' molti compratori, metterò sopra la mia debole soma e con quella, non per le grosse città, ma povere ville, andrò distribuendo e pigliando tal premio, qual merita la cosa da me data.*

12. — La costante libertà nel pensare e l'indomabile indipendenza nel giudicare, delle quali diede sempre prova LEONARDO, vanno rilevate «con le ginocchia della mente inchine»; chè — vi prego di tenerlo

Digitized by Google

presente, Signori — egli viveva in un'epoca di oscurità e torpore intellettuali, nella quale la parola di ARISTOTELE teneva tuttora il posto dell'investigazione originale, onde alle massime fondamentali della scolastica dovevano uniformarsi supinamente tutti gli scrittori del tempo, non fosse altro per evitare le gravissime pene minacciate ai dissenzienti dalle autorità del tempo. E chi ricorda le epiche lotte contro i moderni Peripatetici che, un secolo più tardi, dovette sostenere GALILEO onde assicurare il trionfo della libertà del pensiero, vedrà come con piena ragione venga considerato e proclamato araldo dell'êra moderna, colui che ebbe l'inaudito coraggio di respingere la Teorica degli elementi di PLATONE, di negar fede all'armonia delle sfere celesti affermata da PITAGORA e persino di dichiarare impossibile il Diluvio universale, descritto con tanto lusso di particolari nella Sacra Bibbia.

Corazzato dall'abito di una critica senza vincoli, tormentato giorno e notte dal dubbio veramente provvidenziale per chi è intento a scoprire la verità, reso familiare con ogni sorta di esperimenti, all'incomparabile pensatore fu concesso di distinguere, con acume sorprendente, le questioni e le discipline meritevoli di studio, da quelle che debbono giudicarsi sogni di menti ammalate.

Così egli non nascose il proprio giustificato disprezzo pei verbosi filosofastri tanto numerosi al tempo suo; così egli potè scoprire plausibili ragioni per affermare l'impossibilità del moto perpetuo e della quadratura del circolo; e non si peritò di ascrivere fra i *discorsi umani stoltissimi di bugiardi interpreti della natura* quelli che aveva uditi da cultori dell'Astrologia e della Necromanzia: anzi, di fronte all'universale favore di cui godevano tali spudorati impostori, gridò: *o matematici, fate lume a tale errore.*

Per converso professò e manifestò la più sincera fede nell'Alchimia in cui egli ravvisò la genitrice di una disciplina straordinariamente importante: LAVOISIER, dando vita tre secoli più tardi alla Chimica, offrì alla previsione vinciana la più luminosa conferma.

13. — Grazie all'azione concorde del potentissimo suo genio e dell'ottimo metodo da lui creatosi per la ricerca della verità, Leonardo procedette, durante tutta la propria vita, di scoperta in scoperta, di invenzione in invenzione.

L'elevato piacere ed il costante conforto che a lui procurava lo studio, anche nei periodi di maggiore agitazione, erano così intensi che egli lasciò scritto: *Nella contemplazione delle cose sta la calma serena e il piacere della vita.*

Nè questa è la sola dichiarazione di tale tipo che s'incontri ne' suoi manoscritti.

Digitized by Google

Infatti, un giorno, in cui senza dubbio egli aveva raccolta una messe singolarmente abbondante di verità, quasi volgendosi ai neghittosi che incautamente sperperano un capitale che all'uomo è vietato di accrescere, sentenziava: *La vita bene spesa lunga è* e *Chi non stima la vita non la merita.* Ed altrove, antecipando col pensiero il bilancio finale, che tutti dovremo redigere quando si protenderà sopra di noi la grande ombra della morte, scriveva: *Come una giornata bene spesa dà lieto dormire, così una vita bene usata dà lieto morire.*

Errerebbe però chi credesse che Leonardo, lasciandosi inebbriare dai costanti successi che coronavano le sue assidue fatiche per impossessarsi della verità, si cullasse nella dolce ma traditrice lusinga di essere riuscito a penetrare nell'intima essenza delle cose; infatti una volta, forse numerando con doloroso sconforto gli infruttuosi suoi conati per raggiungere la ragione vera, profonda, ultima di tutti i fenomeni e constatando onestamente come all'uomo sia dato soltanto di percorrere le rive di un mare sconfinato e misterioso, con l'animo abbattuto scriveva: *La natura è ripiena di infinite ragioni che non furono mai in esperienza.*

Umiliante constatazione dei limiti insormontabili posti da chi può ciò che vuole alla sfera del conoscibile umano, non dissimile da quello che Shakespeare doveva porre più tardi sulle labbra di AMLETO, facendogli esclamare: « O Orazio! esistono in cielo e sulla terra assai più misteri di quanto sogni la nostra filosofia ».

14. — Fu abitudine costante di LEONARDO, durante tutta la sua vita, di portare seco un taccuino nel quale accuratamente registrava tutti i pensieri che gli balenavano alla mente, tutti i fenomeni che lo colpivano, tutti gli avvenimenti di cui era spettatore ed attore, illustrando le sue note con argute osservazioni e con disegni in cui non si sa se meglio ammirare la fedeltà scrupolosa o la straordinaria vivezza. Questo meraviglioso zibaldone fa fede che in lui l'abitudine della meditazione era una seconda natura e che non interruppero i viaggi i suoi lavori, non essiccarono le traversie la sua vena, non ammollirono i piaceri il suo vigore. Esso costituisce l'opera più sincera, più originale, più meravigliosa che presenti la storia del pensiero umano; il campo abbracciato include tutto il sapere del tempo, sicchè ben a ragione LEONARDO avrebbe potuto porvi come epigrafe il notissimo verso di TERENZIO: *Homo sum: humani a me nihil alienum puto.*

Percorrendo questo fedele processo verbale di un soliloquio durato mezzo secolo e le innumerevoli altre pagine scritte da questo inesauribile seminatore di idee, si assiste commossi al sorgere di ogni problema da lui trattato ed ai primi tentativi da lui fatti per risolverlo, vengono svelate le vie tentate e poi abbandonate, le incertezze, i dubbi, gli scon-

Digitized by Google

forti di quell'anima irrequieta e finalmente si ammirano i trionfi dell'infaticabile investigatore.

Giunto al termine della sua operosa esistenza, egli, misurando con lo sguardo acuto del morituro quale immensa ricchezza si trovasse sepolta nei suoi quaderni, li legò in eredità al più fedele dei suoi discepoli. E questi li trasportò di Francia in Italia col fermo proposito di riordinarne il contenuto, per poi diffonderlo nel mondo.

Fu irreparabile sciagura che a tanto non bastassero gli anni di vita che a lui furono concessi e sciagura ancor maggiore che i suoi discendenti non abbiano saputo misurare il valore dell'aurea miniera di cui una bizzarria del caso li aveva resi depositari. Da tale ignoranza ebbe origine la non mai abbastanza lamentata dispersione subìta dai cimeli leonardiani, sulla quale, per carità di patria, reputo opportuno di non diffondermi.

15. — E' soltanto da circa cent'anni che si è cominciato a comprendere e valutare il danno subìto dalla scienza e dalla civiltà per effetto dei misfatti commessi. Da quel momento l'umanità, assalita da ben giustificato rimorso, ci si presenta nell'attitudine del fanciullo inesperto, il quale, dopo di avere, in un accesso d'ira e di dispetto o in un istante di sbadataggine, spezzato il filo di sostegno in una preziosa collana, preso da tardivo pentimento si affanna a raccogliere le perle disperse, che miracolosamente si sottrassero alla minacciata distruzione. Chè allora appunto venne iniziata la grande impresa, non ancora compiuta, di raccogliere, interpretare e pubblicare quanto scrisse l'immortale artista-scienziato, ed il mondo degli studiosi assistè meravigliato allo spettacolo della risurrezione di LEONARDO come pensatore ed alla sua completa apoteosi.

16. — Le straordinarie difficoltà che presenta il porre gli scritti vinciani a disposizione di tutti fa sì che, oggi ancora, soltanto una parte ne sia stata diffusa col mezzo della stampa coadiuvata dai più perfetti metodi di riproduzione foto-meccanica, ed anche i lavori usciti dall'inedito si può dire costituiscano il monopolio di pochi privilegiati. Ed io, che a tale classe non ho la fortuna d'appartenere, trovandomi di recente a Roma per doveri d'ufficio, approfittai della favorevole occasione per prendere conoscenza diretta della miglior parte della produzione leonardiana.

Quale intensa gioia intellettuale io abbia provata nell'ideale colloquio con quella grande anima, non tenterò nemmeno di descrivere. Le ore si succedevano alle ore senza che io ne avvertissi la rapida vicenda, mentre le pagine fosforescenti di quel Sommo sfavillavano dinnanzi al mio occhio stupefatto. I problemi che affaticavano allora gli scienziati del

Digitized by Google

tempo, i più decisivi avvenimenti di quell'epoca fortunosa, un grande numero di scritti di più antica data sfilarono così a me dinnanzi, quasi proiettati in un originalissimo schermo cinematografico, illuminati da considerazioni genialmente strane e curiose, tramezzati da massime profonde o da osservazioni biricchine, da favole e da allegorie, illustrato il tutto da schizzi di ogni specie, capaci di rendere ancor maggiore la già grandissima rinomanza del pittore della *Gioconda*.

Tale nuovissimo spettacolo produsse in tutto il mio essere uno stato di ebbrezza mai prima provata. E quando le ombre della sera, scendendo sull'eterna città, gittarono in una violacea semi-oscurità le sale in cui io aveva trascorsa l'intera giornata, parvemi ad un tratto che da essa improvvisamente emergesse il profilo dolce e severo dell'immortale pensatore e che egli bonariamente mi accennasse di seguirlo attraverso le grandi stanze formanti la biblioteca che mi ospitava.

Tale invito essendo stato da me premurosamente accettato, parvemi che egli andasse cercando di scaffale in scaffale le opere moderne ove trovansi svolti, sia pure inconsciamente, gli innumerevoli fecondi germi da lui deposti. La raccolta fu estremamente abbondante! Le più importanti fra le scienze pure ed applicate (e non soltanto le più antiche, quali l'Idraulica e la Meteorologia, ma anche quelle di cui va con ragione orgogliosa l'epoca nostra, come la Paleontologia e l'Oceanografia) erano rappresentate nella variopinta collezione: opere speciali, celebri od oscure, atti di grandi e piccole accademie, riviste scientifiche, tutto vi si trovava.

Che dire poi della mia meraviglia vedendo il grande Scienziato scegliere fra gli *Atti dell'Università* a cui mi onoro di appartenere il volume nel quale è inserita la notissima memoria *Sopra la fillotassi* di un ligure illustre, FEDERICO DELPINO, ed accennarmi che egli pure erasi assiduamente occupato della legge che governa la distribuzione delle foglie sui tronchi degli alberi. E quando, trovato un numero recente di un periodico quotidiano nel quale è narrato come fosse piacere favorito del terzo NAPOLEONE il camminare sull'acqua con l'aiuto di appositi calzari, mi fece notare, in un passo delle proprie opere, la descrizione di un apparato da lui mmaginato e costruito col medesimo scopo.

Il mio stupore poi non ebbe più limiti quando, quasi per darmi la prova tangibile d'una versatilità senza esempio, egli, additandomi la collezione di dizionari di ogni dimensione che stanno oggi a disposizione di chi scrive in italiano, mi segnalò le innumerevoli litanie di vocaboli da lui pazientemente trascritti per comporre l'allora desideratissimo Vocabolario del volgare eloquio.

17. — La chiusura della biblioteca ospitale fugò la dilettosa visione e troncò l'istruttivo quanto seducente conversare. Ed io, mentre abbaci-

Digitized by Google

nato dalla lunga teoria di sfolgoranti tesori da me ammirati, percorrevo le vie della vetusta metropoli, quasi involontariamente numeravo gli archi, le colonne e le altre superbe ruine che mi si paravano innanzi, quali indistruttibili attestazioni della gloria, del senno, della potenza dell'antica Roma. E contemplando da lungi il profilo imponente della Cupola di S. Pietro ed i severi contorni delle Logge vaticane, mi compiacevo nel riandare con la mente le orme indelebilmente gloriose impresse dalla razza latina nelle arti e nelle scienze, nel diritto e nella civiltà. Giunto nella mia mentale rassegna all'epoca nostra, pensando con legittimo orgoglio ai prodigi di ardimento, di coraggio, di genio di recente compiuti sui campi di battaglia che si stendono dal Trentino a Verdun, dall'Isonzo alla Somme, ne traevo argomento per concludere che i rappresentanti di certe pretese scienze erano corsi troppo affermando l'irreparabile decadenza della razza latina e giungendo persino a proclamare essere ormai giunto l'istante di celebrarne i funerali.

No o Signori, i continuatori della grande civiltà che ebbe per culla la città dei sette colli; i nipoti di DANTE, di LEONARDO DA VINCI, di CRISTOFORO COLOMBO, debbono ancora compiere nel mondo una nobile e grande missione e dispongono di forze abbastanza potenti per condurla a termine, e l'Italia, soddisfacendo il voto formulato un secolo fa da GIUSEPPE MAZZINI, deve sorgere dall'attuale conflagrazione *gigante, angelo di vita, iniziatrice di un'epoca nuova.*

18. — Ma per ciò è indispensabile che gli Italiani, contemplando le grandi opere condotte a termine dai gloriosi antenati, non solo nelle epoche di maggior potenza, ma anche in quelle politicamente più squallide, si formino una salda coscienza della propria forza e del proprio valore, onde trarne l'indomabile coraggio, che è condizione necessaria per ogni magnanima impresa, per formarsi l'incrollabile persuasione che quanto fece uno straniero *può* fare anche un Italiano e *deve* anzi farlo meglio, onde non legittimare implicitamente il rinnovarsi, sotto qualunque forma, dell'antico nostro servaggio: *ogni viltà convien che qui sia morta.* Questo alfieriano volere venga da noi manifestato abbandonando per sempre l'antipatriottico sistema di mascherare sotto marchio ultramontano i prodotti della mente e della mano degli Italiani; bandendo per sempre ogni vocabolo forestiero da *l'idioma gentil sonante e puro;* ponendoci sempre alla testa di ogni sforzo inteso a far divampare più ardente e pura la fiamma della ricerca della verità; infine imponendo che il codice governatore della novella civiltà, veramente degna di tal nome, che sorgerà ben presto dalle rovine fumanti del militarismo teutonico, venga dettato dagli eredi legittimi, dai continuatori diretti della cultura romana.

Digitized by Google

Se, o Signori, col dirigere il vostro pensiero e la vostra ammirazione sopra una delle più meravigliose personalità di cui va giustamente superba la Patria nostra, sopra uno di quegli insigni campioni che dimostrano quali inesauribili risorse di altissima genialità si trovino ognora latenti nella gente latina, io avrò contribuito a rendere più gagliarda la vostra fede nel nobile e grande compito storico che ancora deve assolvere l'Italia e più robusta la vostra volontà di cooperare con tutte le forze al raggiungimento del patriottico scopo: io potrò, per avventura, felicitarmi dell'audacia che ho dimostrato nell'accettare l'invito sommamente onorevole di fare udire la modesta mia voce da questa cattedra resa illustre da tanti insigni oratori.

XXXI.

UNA MASSIMA DI ABEL

Discorso pronunciato a Livorno addì 26 Settembre 1923 in occasione del Congresso della « Mathesis ».

1. — Ventidue anni sono ormai trascorsi dal giorno in cui la vecchia « Mathesis » chiamò a raccolta in questa ospitale città i matematici di tutta Italia. Nel frattempo questo benemerito sodalizio subì due radicali metamorfosi che gradatamente ampliarono la sua sfera di azione, epperò ne accrebbe considerevolmente il numero dei soci: ma, per ineluttabile forza di cose, subì anche irreparabili e lamentatissime perdite. Ed in quest'ora sacra ai ricordi, con dolore profondo io avverto i vuoti prodotti nelle nostre file per la scomparsa degli eminenti colleghi DEL PRETE, VAILATI e VERONESE, che allora parteciparono attivamente ai nostri lavori; e mentre invio alla loro memoria un commosso saluto, mi rallegro nel ritrovarmi con commilitoni a me caramente diletti: mi sia lecito, senza enumerarli, impersonarli nell'infaticabile presidente del Comitato organizzatore dell'attuale come del precedente convegno, l'egregio ed ottimo prof. LAZZERI.

Ma se il mio pensiero dalle persone si volge alle cose, mi è forza riconoscere nell'animo dei convenuti un mutamento profondo e che, senza reticenze e pietosi eufemismi, debbo dichiarare deplorevole.

Allora noi, modesti epigoni dei sommi che seppero assicurare all'Italia risorta una posizione eminente fra le nazioni cultrici delle scienze esatte, noi, dico, eravamo tutti compresi dell'imprescindibile dovere che su di noi incombeva di escogitare e sostenere presso le autorità costi-

Digitized by Google

tuite provvedimenti intesi a migliorare i nostri ordinamenti scolastici, i quali non debbono irrigidirsi in forme antiquate, ma debbono fedelmente seguire l'incessante progresso della scienza; in particolar modo studiavamo i mezzi per assicurare ai professori di matematica una sempre migliore preparazione all'alto ufficio ad essi affidato dall'odierna società.

Oggi, invece, siamo giustamente angustiati e anticipatamente addolorati dalla prospettiva che la Patria nostra, appunto nel momento in cui, pel valore di capi e per volontà ed eroismo di popolo, esce trionfante da titaniche lotte, cessi di essere preparata a sostenere, col buon successo d'un tempo, il paragone con altre nazioni, che, abbiano esse combattuto al nostro fianco o contro di noi, cercano affannosamente di conquistare, in tutti i campi, le posizioni più eccelse.

A ciò si aggiunge la legittima preoccupazione che i professori di scuole medie, angosciati per l'incertezza dell'indomani ed assorbiti dal dovere orientare la propria mentalità verso regioni ad essi sconosciute o mal note, non possano in avvenire arrecare alla matematica ed ai suoi metodi d'insegnamento contributi paragonabili a quelli che diedero in passato e di cui vanno giustamente superbi.

Con fervido cuore io auguro che tali perturbatrici preoccupazioni si mostrino in realtà, se non del tutto, almeno in gran parte esagerate; che le persone in questo storico momento detentrici del potere si rendano esatto conto della terribile responsabilità che assumono di fronte alla civiltà, distruggendo ordinamenti maturati lentamente al sole di reiterate esperienze e che, malgrado innegabili imperfezioni, resero possibile la preparazione culturale di personalità di primo ordine, che furono o sono vanto e decoro d'Italia.

2. — Fidando che il nostro tradizionale buon senso impedisca all'Italia di precipitare nell'abisso che le si spalanca dinanzi, io voglio cullarmi nella speranza che prima di sostituire l'enciclopedismo alla specializzazione si rifletterà essere quello inconciliabile con il portentoso sviluppo di cui sono orgogliose tutte le scienze positive, non dimenticando che il più grande enciclopedico che ricordi la storia — LEONARDO DA VINCI —, appunto perchè tale, non potè raggiungere nell'arte il livello a cui giunsero MICHELANGELO e RAFFAELLO, nè arrecare alla scienza contributi paragonabili a quelli che assicurarono l'immortalità a GALILEO GALILEI.

Così, o Signori, lasciatemi sperare che la progettata svalutazione delle scienze positive non sia che uno dei periodici vani attacchi di cui esse di quando in quando sono vittime da parte di persone che parlano di matematica basandosi sul ricordo di quanto qualche vecchio maestro insegnava loro nelle scuole elementari, che trinciano giudizi sulla fisica

Digitized by Google

moderna dopo avere compulsato ARISTOTELE e credono conoscere le scienze naturali per avere sfogliata l'enciclopedia compilata da PLINIO il VECCHIO duemila anni prima che vedessero la luce DARWIN e PASTEUR.

Sono attacchi del tipo di quello che indusse, parecchi lustri or sono, uno sconsigliato a proclamare il fallimento della scienza. Oggi come allora, anzi ancor più di allora, si può con sicura coscienza affermare che non esiste al mondo alcuna cambiale protestata, che rechi la firma della scienza. Questa nulla promette, ma, con regale munificenza, colma l'uomo dei suoi benefici; da tempo essa, con illuminata modestia, ha rinunciato alla speranza di scoprire il *perchè* dei fenomeni; ma, limitandosi a cercare e riuscendo spesso a scoprire *come* essi si verifichino. ha, per corso naturale di eventi e per universale consenso, assunta la carica di sovrana regolatrice dell'umano consorzio. Cosicchè, senza tema di errare, si può affermare che, se vi è qualche ragione che ci permetta di proclamarci superiori ai nostri antenati, gli è solo per effetto di quanto da secoli si va maturando nella quiete operosa dei gabinetti scientifici. Infatti la nostra morale non si può dire superi quella degli antichi popoli; i nostri costumi politici presentano una desolante identità con quelli descritti dagli storici di Atene e Roma; letterati ed artisti nostri sono sospinti incessantemente dall'ambizione di uniformarsi ai modelli che ci lasciarono OMERO e VIRGILIO, PRASSITELE e VITRUVIO. Ma, per converso, soltanto ai tempi nostri l'uomo giunse ad asservire forze cieche e misteriose della natura; in conseguenza l'elettricità ed il vapore impressero una nuova fisonomia al consorzio sociale; l'igiene, assurta a dignità di scienza, prolungò la vita umana; telescopio e microscopio ci permisero di spingere il curioso nostro sguardo tanto negli spazi interplanetari, quanto nei più profondi recessi della materia. Che più? L'analisi spettrale ci permise di scoprire la costituzione di corpi celesti situati a milioni di chilometri di distanza dalla terra e ciò appunto nel momento in cui un filosofo di grido — AUGUSTO COMTE — paternamente consigliava gli astronomi di cessare dal volgere lo sguardo al cielo, chè, secondo lui, tale contemplazione era destinata a riuscire perennemente sterile e vana.

3. — Tuttavia, nell'incertezza della sorte riserbata alle discipline positive dai futuri ordinamenti scolastici, io penso che alla nostra Associazione sia affidata una missione oltre ogni dire alta e nobile, quella cioè di adoperarsi a che nella benemerita schiera degli insegnanti italiani non venga a spegnersi la sacra fiamma della disinteressata ricerca scientifica. Specie a coloro che appartengono ai gradi più elevati della gerarchia professionale, a noi insegnanti universitari, incombe l'obbligo di mantenere con i nostri antichi discepoli quelle cordiali relazioni cominciate nelle aule degli Atenei, incoraggiandoli, sospingendoli ed eventualmente gui-

Digitized by Google

dandoli ancora nell'aspro cammino dell'investigazione scientifica, affinchè non vadano perdute per la coltura e per la patria preziose energie, in particolare *provvedendo a che spiccate intelligenze non si sprechino in isforzi fatalmente sterili.*

Che un siffatto pericolo incomba, oggi come ieri, sovra chi coltiva l'algebra e la geometria si apprende compulsando le eterne pagine della storia delle scienze, non per cercarvi aridi dati biografici e bibliografici od aneddoti piccanti, ma con quell'acuto spirito di libera critica, grazie a cui soltanto la storia può trasformarsi in maestra della vita.

4. — Ed invero scorrendo i primi capitoli di quel gran libro noi troviamo registrata una serie di dolorose sconfitte subite da matematici che tentarono di far piena luce sopra uno dei più importanti, ma, nello stesso tempo, dei più imperfetti capitoli della geometria elementare. Voi tutti, Signori, avete già compreso che intendo alludere alla «teoria delle parallele», che, circa due secoli or sono, il D'ALEMBERT non esitava a dichiarare «la croix et le scandale des éléments de la géométrie».

Che EUCLIDE stesso siasi accorto essere il concetto di parallela la chiave di volta di tutta un'ala del grande edificio che andava costruendo, risulta dal fatto che egli tenne accuratamente distinte le proprietà delle figure che da quel concetto sono indipendenti, da quelle che lo presuppongono. Che durante il periodo aureo della geometria greca sia stata avvertita la necessità di più profonde investigazioni sull'argomento, è pressochè indubitabile; ma verrebbe dimostrato dalla scoperta di nuovi documenti atti a completare quanto sappiamo intorno all'antica matematica, in particolar modo dalla scoperta dei commenti agli **Elementi** di EUCLIDE dovuti ad APOLLONIO PERGEO e che scomparvero lasciando vivissimo desiderio di sè.

Nell'attesa di siffatte augurate scoperte possiamo constatare come perfezionamenti di tal genere alle basi della geometria siano stati tentati, prima ancora che, diradate le tenebre medioevali, l'Europa volgesse di nuovo uno sguardo investigatore ai campi schiusi da PITAGORA ed EUCLIDE.

Ed infatti, ad un geometra prodotto dallo stupefacente popolo che primo raccolse l'eredità dei Greci e primo seppe far rifiorire e fruttificare l'antica pianta, cioè all'arabo NASIR ED DIN, si deve il più antico tentativo oggi noto per dimostrare il postulato delle parallele; il ragionamento da lui all'uopo congegnato è generalmente noto grazie al WALLIS, che lo inserì in uno dei suoi mastodontici in-folio.

Poco dopo un analogo, ma assai men noto conato venne compiuto da un pensatore nato in Provenza e vissuto alla corte di Avignone, nell'epoca in cui quella piccola città fungeva da capitale del mondo catto-

Digitized by Google

lico; parlo di LEVI BEN GERSON, il geniale investigatore che PICO della MIRANDOLA designava come « vir insignis et celeber mathematicus, quasi veteribus par », e che, dopo secoli d'immeritato oblio, trovò ai dì nostri in Germania chi ponesse in luce l'eccezionale forza ed originalità di pensiero, di cui la natura avevalo dotato.

5. — Il tempo che mi è concesso e la presente occasione non consentono che io esponga qui una nuova volta il museo teratologico costituito dagli artifici immaginati per strappare il nèo che brutta gli *Elementi* di EUCLIDE; artifici di cui alcuni attestano un grande ingegno da parte di chi li immaginò, mentre altri sono pietosi attentati contro i precetti della logica; artifici germogliati di preferenza in Inghilterra ed in Italia, i due paesi che in ogni occasione assunsero l'ufficio di tutrici del rigore geometrico minacciato da procedimenti troppo disinvolti, a cui altrove veniva accordata la preferenza. Siami lecito soltanto ricordare le geniali investigazioni del SACCHERI e del LEGENDRE, i quali giunsero entrambi alla soglia di un nuovo mondo, ma si arretrarono spaventati dalla prospettiva di avventurarsi in una terra incognita.

Ora se si cerca la ragione per cui invece GAUSS, LOBACEVSKI e GIOVANNI BOLYAI riuscirono ad aggiungere nuove provincie al regno della geometria, non si tarda a scoprirla nel fatto che essi abbandonarono un problema insolubile — quello di dedurre il postulato delle parallele, od altro equivalente, da principii anteriormente ammessi — ed invece si chiesero se, rinunziando a quel postulato, fosse possibile elevare una costruzione geometrica capace di gareggiare, riguardo a grandezza e solidità, con quella rappresentata dalla classica geometria. Nessuno di voi ignora i memorabili risultati che diede siffatto ben ispirato mutamento d'indirizzo; il piano di quegli invocati edifici venne elaborato in ogni sua parte e si è arrivati a convincersi che gli edifici stessi si potranno forse contemplare il giorno in cui il campo delle nostre esperienze non sarà più limitato, come ora è, alla dantesca « aiuola che ci fa tanto feroci ».

Tutto ciò è divenuto così familiare agli studiosi che quel mutamento d'indirizzo sembra oggi naturale, non meno di quanto parve ai commensali di CRISTOFORO COLOMBO l'esperienza grazie a cui l'ardito viaggiatore seppe assicurare stabile equilibrio all'uovo divenuto poi proverbiale (1). Ma deve avere richiesto un eroico strappo mentale se si rifiutarono di compierlo, non soltanto il gesuita SACCHERI, per abitudini mentali propenso ad inchinarsi sempre al principio d'autorità, ma anche il LEVI BEN GERSON, che i biografi ci dipingono come mente aperta alle più rivoluzionarie innovazioni.

(1) Altri fa il BRUNELLESCHI protagonista di questo aneddoto.

Digitized by Google

6. — Questo fenomeno psicologico rivelato dalla storia della geometria non euclidea non è l'unico del genere che si trovi registrato nei fasti della nostra scienza.

Per convincersene giova rammentare che i geometri Greci erano in grado di sciogliere le equazioni di 1° e 2° grado; LEONARDO PISANO, applicando espedienti di cui non ci sono note nè le basi dottrinali nè i particolari algoritmici, giunse a risolvere con una precisione meravigliosa un'equazione numerica di 3° grado. Ma i matematici arabi del suo tempo non esitarono a dichiarare *impossibile* la risoluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche letterali, se non per via geometrica. E questa opinione fu abbracciata da LUCA PACIOLI, il quale, in un passo della sua celebre *Summa*, dichiarò similmente impossibile risolvere due equazioni biquadratiche in cui erasi imbattuto. Ma, poco dopo, i nostri immortali algebristi del secolo XVI mostravano la falsità di siffatte opinioni, assegnando le formole risolutrici delle equazioni di 3° e di 4° grado. Nessuna ragione essendovi per ritenere che l'algebra avesse in conseguenza raggiunta l'ultima Tule a cui le è dato pervenire, i matematici posero ben presto all'ordine del giorno il problema di risolvere le equazioni algebriche letterali di 5° grado. Si iniziò così una nuova serie d'infruttuosi tentativi, alcuni dei quali dovuti a matematici eminenti, il cui insultante ripetersi fece sorgere in PAOLO RUFFINI e nell'ABEL, prima il dubbio che si cercasse quanto in realtà non esisteva, e poi l'idea di stabilire l'irresolubilità algebrica delle anzidette equazioni, idea così originale ed ardita che, come risulta da documenti pubblicati dal prof. BORTOLOTTI. l'Istituto di Francia si rifiutò di prenderla in considerazione, quasi fosse terrorizzato dall'idea di farsi complice di un delitto non meno nefando di quelli che avevano insanguinato la Francia all'epoca del Terrore. Ciò non ostante, non esistendo argini capaci di arrestare lo fatale andare del pensiero umano, quell'idea riuscì a trionfare, ed i ragionamenti usati dai grandi surricordati finirono per divenire classici, tanto più quando si scoperse che la loro prima radice è da cercarsi nelle opere di LAGRANGE.

Oggi, dopo che le equazioni di 5° grado vennero risolute col mezzo di funzioni ellittiche e quelle del 6° con l'aiuto di funzioni iperellittiche, si è in grado di vedere chiaramente perchè gli algebristi posteriori a TARTAGLIA e CARDANO lottavano, non solo contro difficoltà eccedenti le loro forze, ma contro ostacoli insuperabili. In conseguenza il problema della risoluzione delle equazioni algebriche letterali si considera adesso come consistente principalmente nella determinazione della specie delle funzioni più semplici che si debbono usare per risolvere quelle di determinato grado. E' un problema ben determinato e che, a parte le difficoltà, certamente imponenti, insite in esso, potrà un giorno o l'altro risolversi,

Digitized by Google

mentre il problema di esprimere mediante un numero finito di operazioni algebriche le radici di un'equazione a coefficienti letterali non lo poteva, perchè il suo enunciato conteneva una condizione restrittiva alla quale non è dato soddisfare.

7. — Da siffatti esempi emerge la profonda indiscutibile verità della massima di ABEL che io mi sono proposto di illustrare e che quel grande enunciava con le parole: *bisogna porre qualunque problema sotto forma tale da poterlo sempre risolvere*; in altri termini è necessario scegliere un enunciato tale che le difficoltà che esso presenta siano *subbiettive*, cioè relative a chi si accinge a risolverlo, non *obbiettive*, vale a dire insormontabili qualunque sia la scienza e l'intelligenza di chi lo affronta.

Per meglio stabilire il carattere e la portata di quell'aureo principio si può osservare come da esso scaturisca la spiegazione della secolare presenza nella matematica di questioni enigmatiche, quali ragionevolmente non dovrebbero esistere in una scienza di puro ragionamento.

Uno di tali fatti misteriosi s'incontra negli elementi della stereometria. Nel piano, usando una semplicissima procedura, si stabilisce la relazione che intercede fra un triangolo ed un parallelogramma aventi la stessa base ed eguali altezze. L'analogia, che in tanti casi sussiste fra il piano e lo spazio ordinario, trascinò ad ammettere che un'argomentazione dello stesso genere potesse guidare alla scoperta del rapporto che passa fra i volumi di una piramide e d'un prisma aventi pure la medesima base ed eguali altezze. Ma, con somma meraviglia, si vide che EUCLIDE (il quale facevasi in questo caso eco fedele di EUDOSSO da CNIDO) conseguì l'indicato scopo facendo appello al concetto di infinito. E poichè questo parve a ragione essere un elemento estraneo alla questione, cominciò una gara fra i geometri per riuscire ad emanciparsene; ma, come a tutti è noto, sempre indarno. Attualmente sappiamo che quel concetto è inevitabile a chiunque intenda dimostrare la proposizione fondamentale della volumetria: oggi, quindi, si è in possesso della spiegazione di quei numerosi insuccessi. Proponendosi di dimostrare quel teorema *con il vincolo di non ricorrere a considerazioni infinitesimali*, i geometri si trovavano di fronte ad un problema malamente enunciato, in quanto conteneva un'imposizione restrittiva, che nulla assicurava potersi soddisfare; la condizione espressa dalla massima abeliana non essendo soddisfatta, non deve meravigliarsi se si finì col trovarsi al cospetto di un ostacolo insormontabile.

Osservazioni del tutto analoghe possono ripetersi riguardo ai problemi classici della geometria elementare; domandando di duplicare il cubo, di trisecare un angolo, di quadrare il cerchio *servendosi esclusivamente della*

Digitized by Google

riga e del compasso, si enunciavano questioni con un numero esuberante di condizioni, epperò fatalmente insolubili.

8. — I mirabili progressi compiuti in mille direzioni dalla matematica nel corso di quest'ultimo secolo possono indurre a pensare che ormai la massima abeliana sia da collocarsi nel museo degli strumenti fuori d'uso. Nulla di più contrario al vero, egregi Colleghi! Mi sia lecito, per dimostrar ciò, richiamare alla vostra memoria alcune questioni importanti dinanzi a cui la scienza odierna china umilmente la superba sua fronte, mormorando: *Ignoramus*.

Una venne suggerita dai cartografi, i quali osservarono come, per colorire qualunque carta geografica in modo che riescano nettamente distinti « ad oculos » i confini tra due qualisivogliano stati contigui, siano sufficienti quattro tinte. Nacque così nell'Analysis situs il cosidetto « problema dei quattro colori », il quale consiste nella ricerca di un'argomentazione atta a stabilire la verità generale di quel frutto dell'esperienza (1). Problema di traditrice semplicità, il quale in fatto presenta tali e tante difficoltà che i lavori di coloro che si proposero di risolverlo costituiscono una discreta biblioteca. Tuttavia non uno dei ragionamenti proposti resistette alle prove a cui venne sottoposto dall'inflessibile logica odierna; cosicchè il « problema dei quattro colori » appartiene alla categoria delle questioni tuttora insolute.

Siccome il teorema che si agogna di dimostrare non è che il risultato di esperienze, sia pure numerose, ma di un tipo uniforme, eseguite in base agli aggruppamenti politici stabiliti sino ad ora, e siccome nulla assicura che la diplomazia, visti gli infelici risultati dei provvedimenti che essa va escogitando per assicurare un po' di pace al genere umano, non finisca per orientarsi verso concetti direttivi totalmente nuovi, così, in omaggio al precetto abeliano, scambio di ostinarsi a voler dimostrare l'enunciato *teorema*, il quale può eventualmente risultare falso, è da consigliarsi ai futuri studiosi della materia di proporsi il *problema*, certamente solubile, di « determinare il numero di tinte necessarie per colorire una carta geografica, qualunque ne sia la struttura ».

9. — Altro esempio per illustrare la stessa massima è offerto dalle Opere di GRASSMANN; non parlo dei metodi di calcolo geometrico che, grazie alle svariate elaborazioni e metamorfosi che subirono in seguito

---

(1) La più recente esposizione dello stato della questione trovasi nell'articolo di H. R. BAHANA intitolato appunto *The Four-Colour Problem* (The American math. Monthly, luglio-agosto 1923); importanti sviluppi sull'argomento leggonsi nella dissertazione dottorale di A. ERRERA, *Du coloriage des cartes et de quelques questions d'Analysis situs* (1921).

Digitized by Google

all'impulso impresso dal professor PEANO, hanno ormai conseguita una perfezione veramente invidiabile; alludo invece alle costruzioni, basate sopra allineamenti di punti e intersezioni di rette o piani, mediante i quali quell'originale geometra ha insegnato a costruire innumerevoli curve e superficie algebriche. Ebbene, mentre riguardo agli *ordini* degli enti generati niun dubbio può nascere intorno alla possibilità di raggiungere qualunque limite, ben giustificata è la titubanza relativamente alla *generalità* delle figure ottenute. Nel piano la cosa è evidente per il 2° ordine, mentre per il 3° venne stabilita incontrovertibilmente dal CLEBSCH, con un'elegante applicazione della teoria delle funzioni ellittiche; ma per i gradi superiori, nel piano e nello spazio, si brancola ancora in tenebre perfette; e poichè ci troviamo di fronte ad una questione che è facile enunciare sotto forma rispettosa per la massima di ABEL, così è provvedere agli interessi della geometria l'esortare i matematici ad abbandonare l'attitudine di sdegnosa indifferenza che sinora assunsero di fronte ad essa.

10. — Ben diversa è la situazione riguardo alla stessa massima del più celebre e tormentoso enigma che abbia presentato e tuttora offra la matematica, cioè dell'ultimo teorema di FERMAT. Come a tutti è noto, scopo di esso è dimostrare la impossibilità di trovare una quaterna di numeri interi e positivi che soddisfino l'equazione.

$$x^n + y^n = z^n. \tag{1}$$

Tale impossibilità venne affermata dall'immortale matematico francese in una nota posta in margine dell'esemplare da lui posseduto dell'*Aritmetica* di DIOFANTO, con le seguenti storiche parole: «Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet».

Ora malgrado i milioni di quintali di carta che vennero fabbricati in questi ultimi tre secoli, essi non bastarono a supplire alla scarsità lamentata dal sommo aritmetico tolosano. Eppure i tentativi nel senso indicato non sono mancati, specialmente a partire dal giorno in cui un appassionato cultore della matematica promise al tanto invocato Edipo il premio di centomila marchi (che allora rappresentavano ben più della modesta somma a cui oggi essi equivalgono). E' però estremamente interessante la circostanza che gli sforzi fatti allo scopo da insigni matematici, se anche non permisero di toccare l'agognata mèta, hanno rinnovato il fenomeno offerto da CRISTOFORO COLOMBO, il quale, cercando una nuova via per toccare le Indie, giunse inopinatamente a porre il piede su un nuovo continente; giacchè portarono a scoperte di primo or-

Digitized by Google

dine, ad intere importantissime teorie, le quali hanno conquistato un posto da nessuno contestato nell'aritmetica superiore e che conserveranno anche il giorno in cui sarà sciolto l'enigma legato ai posteri da FERMAT; da quel giorno tale teorema non avrà più probabilmente che un interesse storico e si presenterà all'occhio dei posteri simile a certi esseri del mondo animale che scompaiono nell'istante nel quale assicurano la continuazione della specie.

Volendo ora esaminare il grande teorema di FERMAT al lume della massima abeliana è indispensabile tener presente che ad esso il prelodato geometra pervenne partendo dalla notissima equazione pitagorica

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

e generalizzandola nel modo che riesce palese dal paragone delle formule (1) e (2). Di più, tutto fa credere che egli sia giunto al surriferito enunciato dimostrando l'irresolubilitá dell'equazione (1) per i primi valori di n (tutti coloro che hanno percorsa l'*Algebra* di EULERO sanno che ciò non è difficile per i valori 3 e 4). E poichè è noto che quel sommo aveva l'abitudine di non usare la penna che rarissimamente e di ragionare e calcolare a memoria, così non è recare offesa alla sua venerata memoria l'emettere l'ipotesi che egli siasi lasciato trasportare un po' troppo ammettendo, senza sufficienti ragioni, la generalizzabilità dei ragionamenti da lui congegnati per $n = 3$ o 4. Dopo di lui il teorema venne stabilito per un grande numero di valori dell'esponente, in particolare per tutti i valori di n non superiori a 100. Da tali risultati la generalità dei matematici trasse la convinzione incrollabile che l'enunciato di FERMAT sia conforme al vero. Ora, secondo il mio modesto parere, è questa una generalizzazione affrettata, conseguenza dell'abitudine invalsa di paragonare, anzi equiparare la serie dei numeri naturali ad una successione di punti equidistanti di una retta indefinita; si ammette così che la serie costituita dai numeri interi positivi sia un tutto omogeneo, mentre, all'opposto, ogni suo elemento gode di proprietà che lo differenziano da tutti gli altri, cosicchè sarebbe ben più proprio lo stabilirne il paragone con la serie dei corpi semplici, di cui la chimica insegna essere composti tutti gli esseri esistenti in natura; scelto questo punto di vista, chi può farsi garante che non esista, nello sconfinato ambiente numerico, una quaderna di numeri che soddisfi l'equazione di FERMAT? Chi condivide tal modo di vedere è quasi forzato e suo malgrado condotto ad ammettere la possibilità che *l'enigma legato da Fermat non venga* MAI *sciolto*; giacchè, se quel teorema non è vero, la dimostrazione non se ne potrà mai scoprire e, d'altronde, gli eventuali numeri soddisfacenti la equazione (1) sono talmente grandi (si ricordi che l'esponente è certamente superiore a 100)

Digitized by Google

che il verificare che godano dell'indicata proprietà è compito probabilmente superiore alle forze di qualunque abile calcolatore (1).

Tale dubbio — che io manifesto timidamente perchè temo non sia per essere condiviso da tutti coloro che mi fanno l'onore d'ascoltarmi — si rafforza osservando che la equazione di FERMAT è *una*, ma non l'*unica* generalizzazione immaginabile dell'equazione pitagorica. Per conto mio preferisco riguardare come estensione della (2) l'equazione

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3, \tag{3}$$

la quale ammette infinite soluzioni, essendo noto, se non prima, almeno sino dai tempi di BACHET DE MÉZIRIAC, che la somma di due cubi è sempre esprimibile come differenza di due altri. Proseguendo poi nella stessa via si è condotti ad occuparsi dell'equazione

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = x^n; \tag{4}$$

e, spingendo più oltre la generalizzazione, a queste altre

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = x^n; \tag{5}$$

ora se si riuscisse a provare che, quando l'esponente n è superiore a 2, altrettanto vale del numero m del termini del primo membro, l'ombra di FERMAT sarebbe finalmente placata.

Avanzandosi ulteriormente nella medesima strada si è naturalmente condotti alla più generale equazione

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = x, \tag{6}$$

lo studio della quale rappresenta uno dei punti più importanti della cosidetta Aritmetica addittiva, capitolo dell'odierna Teoria dei numeri la cui importanza è stabilita dalla serie di brillanti teoremi di cui è già ricca. Il più noto è quello dimostrato per la prima volta da LAGRANGE, secondo cui « ogni numero è esprimibile come somma di quattro quadrati » (alcuni dei quali eventualmente nulli). Segue ad esso l'altra insigne verità, scoperta da WARING e solo di recente dimostrata con rigore, « ogni numero è rappresentabile al più come somma di nove cubi » ; allo stesso geometra devesi l'analoga proposizione, sinora non dimostrata « ogni numero è rappresentabile mediante somma di un numero di biquadrati non superiore a 19 » , e l'ipotesi da lui formulata che, per ogni valore dell'esponente n, la precedente equazionc sia risolubile, purchè m si scelga non inferiore ad un minimo, il quale non dipende dal numero x che si vuole decomporre, venne ai dì nostri stabilita da una schiera di vigorosi investigatori, capitanati da DAVIDE HILBERT.

Emerge da questi sviluppi come l'ostinarsi a cercare una dimostrazione dell'ipotetica equazione di FERMAT probabilmente prepari nuove

(1) Si noti che 2^{101} è già un numero di non meno di trenta cifre.

Digitized by Google

dolorose delusioni, epperò possa riuscire forse più di pregiudizio che di vantaggio al progresso dell'Aritmetica. Invece, con una ragionevole applicazione della massima di ABEL, si dovrebbe sostituire alla sospetta irresolubilità della equazione (2) la determinazione dei valori del coefficiente μ per cui è risolubile l'equazione

$$x^n + y^n = \mu z^n, \tag{7}$$

se fra essi non si incontrerà il valore 1, la gloria di FERMAT brillerà di novello splendore!

11. — Abuserei del vostro tempo e della benevola pazienza vostra, Signori, se volessi segnalare tutte le questioni su cui giova proiettare la luce che emana dalla saggia massima di ABEL. Così, ispirandosi ad essa, invece di cercare la risoluzione o l'abbassamento di grado di una data equazione algebrica, si investigherebbero le relazioni a cui debbono soddisfare i coefficienti di un'equazione di detta specie, affinchè la ricerca delle sue radici si possa fare dipendere da quella di altro grado meno elevato; così all'affannosa ricerca di artifizi che permettano l'integrazione di qualche nuova equazione differenziale o la riduzione a quadrature di un'equazione differenziale di tipo conosciuto, si sostituirà la metodica investigazione di criteri atti a decidere, con un numero finito di saggi, se la cosa sia possibile. E verrebbe abbandonato il pericoloso sistema di estendere automaticamente allo spazio ordinario, e poi a tutti gli spazi, proposizioni valide nel piano, sistema che condusse a sterili conati, ben noti, ad esempio, a coloro che si occuparono della geometria del tetraedro, sbocciata prolungando il campo in cui aveva prosperato la geometria del triangolo.

12. — Prima di finire concedetemi, o Signori, che io aggiunga due osservazioni. La prima è che non deve recare meraviglia se la massima di ABEL, la quale ad alcuni può apparire per un *truism* di lapalissiana evidenza, sia stata formulata soltanto in epoca a noi così vicina. Non deve recare meraviglia, anzitutto, perchè si tratta di un frutto che giunse a maturità in seguito ad un immenso numero di esperienze compiute dai matematici a proprie spese. Non deve poi recare meraviglia perchè è prerogativa dei tempi nostri la lodevole abitudine di far precedere alla risoluzione di un problema la ricerca se esso sia o meno risolubile. E fra mille fatti che potrei citare a riprova di questa lacuna esistente nella mentalità dei nostri progenitori scientifici scelgo uno che mi è offerto dall'istruttivo quanto divertentissimo libro che NICOLÒ TARTAGLIA intitolò *Quesiti et inventioni diverse*. Ivi si legge, come proposta dal famigerato TONINI da COI, la seguente questione: « Nel triangolo che ha per lati 13, 14, 15 si conducono due altezze; si conosce la lunghezza 3 di uno dei segmenti in cui queste si dividono scambievolmente; si tratta di

Digitized by Google

determinare altri segmenti che compaiono in figura ». Il problema è evidentemente più che determinato epperò, in generale insolubile, perché dati che siano i lati di un triangolo, sono in conseguenza virtualmente dati tutti i segmenti ad esso collegati; onde quell'enunciato poteva offrire al TARTAGLIA una buona occasione per una sfuriata contro quell'instancabile proponitore e, dato il carattere del rozzo figlio del cavallaro di Brescia, ci si poteva attendere uno squarcio di prosa certamente non conforme ai precetti che, appunto in quel tempo, Monsignor DELLA CASA aveva codificato nel suo immortale *Galateo*. Invece il TARTAGLIA, con imperturbabile serenità, afferma che la questione insieme ad altra contemporaneamente propostagli potrebbe sciogliere in un'ora di tempo, e poi cambia discorso. Cosicchè se quel problema era un tranello teso al grande bresciano, bisogna riconoscere che egli non l'ha saputo scoprire, che anzi vi è caduto a capo fitto.

L'altra osservazione che reputo opportuno di esporre, finendo, é che il campo di applicabilità della massima abeliana sembra essere limitato alla matematica pura, giacchè il mondo dei fenomeni fisici prepara quotidianamente sorprese che esorbitano da qualsiasi previsione umana. Così quella massima non avrebbe potuto prestare alcun servigio per decidere se coloro che, nel secolo scorso, si affaticavano a risolvere il problema della navigazione aerea fossero pionieri animati da doti profetiche, oppure infelici da affidarsi alle cure di illuminati psichiatri. Altrettanto può ripetersi riguardo alle domande se fosse possibile vedere attraverso un involucro opaco o comunicare a distanza senza l'aiuto di un veicolo materiale. In conseguenza non è ragionevole fare assegnamento sugli effetti di un pellegrinaggio alla tomba di ABEL per comporre il momentaneo dissidio di recente stabilitosi fra matematici e fisici per effetto della Teoria della Relatività.

13. — Signori. Nell'istante in cui sto per chiudere questa mia chiacchierata ripensando alle molte questioni irresolute su cui vi ho intrattenuto, mi assale il dubbio di venire giudicato piuttosto come un tiepido ammiratore che come un fervido esaltatore della scienza a cui tutti noi dedichiamo le nostre forze, essendomi dilungato di preferenza a descrivere i campi in cui si svolgeranno le future battaglie per la scoperta del vero matematico, che a farvi ammirare i trofei delle conseguite vittorie. Ora, se voi credeste di ravvisare in me un complice recondito e compiacente di chi s'industria a svalutare quanto costituisce la più pura gloria dello spirito umano, pronuncereste un giudizio fondamentalmente errato. Se mi dilungai a segnalarvi le regioni della nostra scienza che più urgentemente richieggono le cure di abili coltivatori,

Digitized by Google

gli è che mia convinzione si è che il primo passo verso la risoluzione di una quistione è mosso da colui che la enuncia esattamente, giacchè il riconoscere onestamente la presenza di ostacoli che sinora s'irrisero di coloro che tentarono di superarli è indirettamente spingere alla creazione di nuove e più potenti armi; d'altronde, guai alla scienza che non sia più assillata e sospinta dall'ansia di risolvere nuovi problemi, di sormontare nuove difficoltà!

Perciò nell'intenzione profonda, se non forse nell'esterna apparenza, le mie parole sono ispirate al più caldo entusiasmo per la scienza, all'incrollabile fede nel suo più radioso avvenire: quell'entusiasmo e quella fede che mi scuotevano ed animavano quando, giovinetto, mi fecero scegliere la più aspra ed accidentata delle strade che mi si schiudevano dinanzi e che mai subirono diminuzioni ed eclissi; quell'entusiasmo e quella fede che stupisce gl'infelici che ignorano il perenne fascino che emana dalla contemplazione dei numeri e delle figure: quell'entusiasmo e quella fede che, oggi, in età matura, in faccia a denigratori posti in alto ed in basso, mi fa gridare: Evviva la Scienza!

XXXII.

LA FUNZIONE SOCIALE DELLA SCIENZA

Conferenza tenuta in Genova addì 10 marzo 1924, sotto gli auspici della Società Ligustica di Scienze e Lettere.

1. — In molti di voi, Signori, sarà ancor vivo il ricordo delle discussioni appassionate ed ardenti che si accesero in tutto il mondo dei pensatori il giorno in cui un reputato letterato francese, oggi defunto (1), credette affermare, con sicura baldanza, essere ormai giunto il momento di dichiarare il fallimento della scienza. Egli giustificava tale audace proposizione asserendo, credendo anzi di dimostrare, che non erano state mantenute le promesse da essa imprudentemente fatte, quasi fossero in giro cambiali protestate provenienti da quella rispettabilissima dama. Ad una voce, con mirabile accordo, i cultori delle discipline positive replicarono che, al contrario, questa nulla aveva imprudentemente preannunziato, ma lasciando alla filosofia la ricerca del *perchè* delle cose e limitandosi ad investigare *come* avvengono i fenomeni, aveva, con generosità senza esempio, colmata l'umanità di benefici tali che, in conseguenza, la fac-

(1) F. BRUNETIÈRE.

Digitized by Google

cia del mondo era stata radicalmente mutata. Ed aggiungevano che, se il CONDORCET, circa un secolo e mezzo fa, sosteneva essere la scienza l'unico mezzo posto a disposizione dell'uomo agognante a migliorare la propria sorte, si può ben dire che, in cospetto della morte che lo minacciava e che poi stoicamente affrontò, egli si mostrava dotato di ammiranda visione profetica, giacchè le posteriori fatiche dei sereni ricercatori dei misteri della natura, mentre non condussero alla scoperta di alcun mezzo più potente di quelli che si andavano giornalmente costituendo nei gabinetti degli scienziati, posero in luce sempre più chiara quanto tali mezzi fossero svariati e potenti.

2. — All'affermazione dianzi ricordata il CONDORCET giunse mentre stava redigendo il bilancio del patrimonio scientifico dell'umanità, che egli compieva per occupare gli ozi di una snervante auto-prigionia, bilancio che, dato alle stampe dopo la sua scomparsa, rappresenta un testamento scientifico ben degno di recare la sua firma.

Ora se, seguendo l'esempio dello sventurato girondino, noi pure compiamo una mentale rapidissima rassegna dell'evoluzione attraverso i secoli del pensiero scientifico e dell'influenza da esso esercitata sulla vita sociale, non tarderemo a riconoscere come siasi in diritto di proclamare che non esiste osservazione di fatti naturali, per quanto modesta, che non sia stata sfruttata dall'uomo a vantaggio proprio e dei propri simili.

Per convincervene, Signori, volgete il pensiero al fenomeno, osservato sino dall'infanzia della civiltà, della propagazione della luce secondo una linea rigorosamente retta (almeno quando ci si limiti a distanze relativamente piccole, per cui non si facciano sentire l'influenza della rifrazione atmosferica od altre di recente segnalate dall'EINSTEIN). Ebbene, da quanti secoli e da quanti popoli essa non fu utilizzata per stabilire comunicazioni a distanza! Nell'*Agamennone*, ESCHILO pone in scena la sentinella messa a guardia del castello di ATREO, in ansiosa attesa della fiammata che deve annunciare la caduta di Troja; ed altri passi, in grande numero di opere tramandateci dall'antica Grecia, porgono prove inconfutabili della sapiente organizzazione che aveva trovata sopra il sacro suolo dell'Ellade questa forma primitiva di telegrafia senza fili(1).

I Romani, eredi diretti della greca civiltà, adottarono su larga scala e perfezionarono in alcuni particolari tecnici questo metodo di comunicazione del pensiero; ed è indubitato che se dal Campidoglio si poteva seguire la marcia vittoriosa di CESARE nelle Gallie, gli è grazie a savie leggi regolatrici dell'uso di esso, quali potevansi ragionevolmen-

(1) Anche gli abitanti del Messico si servivano di telegrafia ottica prima di essere stati scoperti dagli Europei: v. G. CALLEGARI, *L'antico Messico* (Rovereto. 1907, p. 70).

Digitized by Google

te attendere dal popolo che seppe governare tutto il mondo allora conosciuto, con ammiranda profondità ed insuperata saggezza.

Ed è notevole che a quell'elementare fenomeno abbiano ricorso un tempo anche popoli extra-europei, che vantano coltura autoctona. Assicurasi, infatti, che allorquando un viaggiatore toccava una città di confine per penetrare nel Celeste Impero, il funzionario di guardia chiedeva al governo centrale il relativo « nulla osta » col mezzo di ben congegnati segnali ottici, i quali agivano con tanta regolarità e speditezza nei due sensi che brevissimo era il periodo di attesa per il viandante.

Inventata che fu la polvere da fucile, a questo metodo di trasmissione del pensiero non tardò a sostituirsene altro di un tipo un po' differente, basato sulla conoscenza di un altro fenomeno, ma non meno efficace: l'acustica prese il posto dell'ottica, con non minore successo. Ne è prova il fatto che il MONTAIGNE, autore di un volume di celebratissimi *Saggi*, viaggiando in Italia durante l'ultimo decennio del secolo XVI, notò che la parte settentrionale della costa adriatica era cosparsa di torri e castella a difesa dalle incursioni dei pirati, allora numerosi ed audacissimi, ed apprese dagli abitanti del luogo che, non appena era avvistata una vela sospetta, il soldato di guardia ne avvertiva con uno sparo i fortilizi vicini, i quali, a loro volta davano con lo stesso mezzo l'allarme ai successivi e così via, di maniera che in breve ora, da Ancona a Venezia venivano approntate ai temuti assalitori con degne accoglienze.

3. — Con il progredire ed il diffondersi della ricerca del vero la società umana riconobbe sempre più chiaramente la varietà di applicazioni che potevano trovare i risultati a cui continuamente perveniva la scienza. A sostegno di tale affermazione potrei citare quella pagina nella quale PLINIO il vecchio narra la morte di TULLO OSTILIO, fulminato per la sua incuria nell'eseguire le cerimonie grazie a cui NUMA, suo predecessore, obbligava la folgore a scendere dal cielo; me ne astengo perchè, volendo dedurre da ciò la conoscenza *ab antiquo* del parafulmine e la sua utilizzazione in servigio del culto, dovrei porre il piede sul piano inclinato delle congetture, percorrendo il quale sovraincombe il pericolo di sdrucciolare assai più oltre di quanto si vorrebbe e dovrebbe. Mantenendomi invece sul terreno solido dei fatti storicamente documentati, richiamerò la vostra benevola attenzione sopra uno degli avvenimenti più clamorosi e decisivi che si trovino registrati nella storia universale; esso ci è offerto dalla cosmologia dei Greci.

E' generalmente noto che ai tempi di OMERO ed ESIODO si soleva assimilare il pianeta che ci ospita ad un disco galleggiante sul gran fiume Oceano, quasi fosse una crosta di pane dimenticata da qualche

Digitized by Google

Nume smemorato in una colossale tazza di the: concezione infantile e ristretta, la cui origine si spiega agevolmente quando si rifletta che i primi viaggiatori non avevano percorsa che quella piccola parte del bacino Mediterraneo che circonda il Peloponneso e le isole donde erano partiti. Essa però non ebbe lunga durata, giacchè, circa duemilacinquecento anni or sono, PITAGORA con quell'ardire di pensiero che caratterizza i veri geni, affermò essere la Terra sferica ed abitata anche nell'emisfero opposto a quello ove trovasi la Grecia. Quale affermazione più teorica di questa, quale massima di apparenza più lontana da ogni pratica applicazione! Orbene, o Signori, gli è da essa che prese le mosse Cristoforo Colombo nelle elucubrazioni che lo condussero a porsi la questione di scoprire una via per raggiungere le Indie, elucubrazioni che diedero come ultimo sfolgorante risultato la scoperta di un novello continente. E se noi percorriamo la storia, non soltanto della Spagna che, con pieno diritto, sfruttò per prima le terre, ove col ferro e col fuoco aveva dato agli aborigeni un saggio della civiltà europea, ma quella di tutti i paesi dell'antico continente, non si tarda a riconoscere come nessuno dei rapporti economici e politici stabilitisi poi e ben pochi, fors'anche nessuno, degli avvenimenti posteriori si possono giudicare indipendenti dalla scoperta compiuta dall'ardito genovese e, risalendo più su nel corso della storia, dal dogma della rotondità della Terra proclamata dall'immortale filosofo di Samo. Ammiranda potenza del genio, le cui concezioni attraversano i secoli senza perdere la loro perenne benefica energia!

E notate non essere questo un fatto isolato a carattere sporadico. Chè allo spettacolo offerto da KEPLERO, il quale trova nell'*opus magnum* di APOLLONIO PERGEO il fondamento dottrinale indispensabile per giungere a formulare le leggi fondamentali della meccanica celeste, fa splendido riscontro l'EINSTEIN a cui il calcolo differenziale assoluto serve per formulare la sua famosa Relatività generale; e, similmente, GALILEO il quale sfrutta la regolarità del moto degli astri per congegnare un procedimento onde determinare la longitudine in alto mare, offre un'impressionante analogia con GUGLIELMO MARCONI quando, per giungere alla telegrafia senza fili, fa proprio punto d'appoggio le concezioni prettamente teoriche dell'HERTZ.

4. — La penetrazione pacifica della scienza in ogni campo in cui svolgesi l'umana attività, iniziatasi al tempo dei tempi, quando lo studio dei movimenti celesti insegnò all'agricoltore il regolare avvicendarsi delle stagioni, al navigante come l'impassibile corso degli astri offrisse un mezzo sicuro per orientarsi nel momento in cui egli trovasi in balia dell'elemento infido, ed al sacerdote criteri sicuri per fissare le da-

Digitized by Google

te delle feste periodiche, continuò senza fretta e senza posa, ma con un meraviglioso « crescendo » degno di ROSSINI, non incontrando ostacoli e barriere se non quelle fragilissime elevate da irriducibili misoneisti.

Tuttavia l'arte — come genitrice di opere di pura fantasia — parve un tempo irridersi di ogni tentativo di assoggettamento, proclamandosi sorella, non ancella della fredda ricercatrice del vero; se non che, primi i pittori dovettero riconoscere che, per ritrarre al vero l'apparenza esterna delle cose, fosse indispensabile da parte loro uno studio preliminare accuratissimo dei fenomeni collegati alla funzione visiva: così ebbe vita una nuova nobilissima branca della scienza applicata, la Prospettiva, a cui diede basi di solidità incrollabile la gloriosa triade costituita da PIER DELLA FRANCESCA, LEON BATTISTA ALBERTI e LEONARDO DA VINCI. Dal canto loro gli scultori non tardarono ad avvedersi che soltanto una profonda conoscenza anatomica del corpo umano poteva porre in grado chi maneggia lo scalpello di dare vita ad opere capaci di sostenere il paragone con quelle che giornalmente produce l'inesauribile natura: i numerosi quaderni anatomici lasciati dal pittore della *Gioconda* documentano nel miglior modo la necessità, da parte di chi opera sul marmo, di conoscere, in tutti i suoi minuti particolari, la struttura del nostro involucro terreno. E finalmente chi può negare che il costituirsi ed il prosperare del « naturalismo » in letteratura non sia dovuto alla travolgente influenza del pensiero scientifico, reso sempre più popolare nel corso del secolo XIX, il secolo scientifico per eccellenza? Se anche oggi, per effetto di uno di quei fenomeni di chiaroscuro non infrequenti nella storia letteraria, vi è chi si compiace di proclamare l' irreparibile bancarotta della scuola per lunghi anni capitanata da EMILIO ZOLA, è vano negare come la scrupolosa considerazione di documenti illustratori sia attualmente considerata doveroso fondamento di qualsiasi opera avente per iscopo la descrizione di un ambiente, la pittura di un carattere o la ricostruzione di uno stato di cose ormai tramontato.

Che siffatto nuovo orientamento della forma letteraria debba da tutti giudicarsi degno di plauso, epperò riguardarsi come dotato di carattere permanente, è dimostrato dalla scomparsa dalle opere di fantasia di affermazioni compassionevoli o risibili quali pur troppo s'incontrano anche in opere ritenute classiche. Tale è quella che leggesi nella *Tempesta* di SHAKESPEARE, ove Milano viene collocata sulla riva del mare; tale l'altra di cui è colpevole WALTER SCOTT, il quale fa sorgere la luna nella regione nord-ovest del cielo; e che dire del nostro GOLDONI, il quale fa che un suo personaggio (1) ordini alla propria domestica di servirsi

(1) Vedi la commedia *La Villeggiatura*.

Digitized by Google

di una barca per trasportarsi da Livorno al Montenero, il celebre santuario che sorge nel retroterra della simpatica città labronica?

Superfluo avvertire che il letterato deve ben guardarsi dal cadere in Cariddi per evitare Scilla, deve, cioè, evitare con ogni cura di fare un inutile stoggio di nozioni scientifiche, assumendo quell'antipatico aspetto di chi si pone sulla punta dei piedi per apparire di statura più alta di quanto non sia. Il «fren dell'arte», in questa come in altre circostanze, servirà a lui di infallibile antidoto; una serena spassionata auto-critica lo avvertirà quindi, come sarebbe di pessimo gusto il ricorrere allo «zero assoluto» per dare un'idea della freddezza di una bella insensibile; o il servirsi di colori d'anilina per caratterizzare le varie tinte di un paesaggio; e certamente morirebbe sepolto sotto un monte di ridicolo un PETRARCA del secolo XX, il quale nell'atto di cantare le lodi della propria LAURA, aspirando a ringiovanire e modernizzare una vieta figura retorica, memore di un surrogato che tanto ci afflisse durante la recente nostra guerra, scrivesse «O Madonna bella, le tue labbra sono dolci come una pastiglia di saccarina!».

I benefici effetti dello studio rigoroso dei fenomeni naturali sopra le arti del pennello, dello scalpello e della penna, di cui feci menzione, non sono per fermo gli unici che esso diede sino ad oggi; chè fra l'altro, esso ha offerti all'arte drammatica, non chiesti, ma preziosissimi servigi.

Ed in questo momento si riaffaccia alla mia mente uno dei più piacevoli ricordi di viaggio, e vi chiedo licenza di porvene a parte, chè così facendo non mi allontano dal tema che vado svolgendo.

A Londra io ebbi una sera la fortuna di assistere, in occasione di un solenne Congresso internazionale, ad una rappresentazione dell'*Amleto*, protagonista uno dei più grandi tragici inglesi; ora non è l'abilità certamente straordinaria di quell'artista che io intendo in questo momento di glorificare, chè essa non è per fermo superiore a quella che alcuni nostri celebri sovrani del palcoscenico hanno manifestato sotto le spoglie del dolorante principe di Danimarca; quello che intendo (e credo con ragione) vantare è l'ingegnoso intreccio di luci ed ombre a cui gli spettatori assistettero nel momento in cui, sugli spalti di Elsinora, appare il defunto genitore di AMLETO, intreccio grazie al quale la scena venne a perdere quel non so che di urtante, direi quasi di ridicolo, che assume quando la parte di spettro viene affidata ad un fantoccio e peggio ancora ad un uomo in carne e ossa. Col sapiente ordigno messo in gioco nel corso dello spettacolo a cui io mi trovavo presente, la commovente scena, di cui è protagonista l'ombra dello sventurato re di Danimarca, assunse tutta l'imponente tragicità che per fermo era balenata agli occhi della

Digitized by Google

mente dell'immortale drammaturgo britanno. Perciò ottica e meccanica in tal caso si erano schierate al suo fianco quali inattese, ma preziose ausiliatrici.

5. — Delle radicali metamorfosi che possono esercitare sul civile consorzio i prodotti che dà l'ingegno umano intento a scrutare l'universo dei fenomeni, ebbero chiaro concetto i governi ed i governatori che a ragione godono di più alta rinomanza. La storia di Venezia ce ne offre una prova impressionante in un episodio riboccante di utili ammaestramenti.

Addì 21 agosto 1609 GALILEO GALILEI invitava il Consiglio dei Dieci della gloriosa Repubblica a salire sul campanile di S. Marco per constatare *de oculo* il meraviglioso potere di uno strumento da lui di recente costruito: si trattava del primo modello di cannocchiale che reca oggi ancora il nome del celebre fisico fiorentino. E quegli eccelsi magistrati, rilevando con dolce sorpresa come il novello apparecchio permettesse di scorgere, quasi fossero a portata di mano, non soltanto le isole di Fusina e Marghera, ma anche Chioggia e Treviso e persino la facciata della Chiesa di S. Giustina di Padova, non si limitarono a elogi di convenienza al geniale inventore, ma, radunatisi d'urgenza, deliberarono di assicurarsi per sempre i servigi di un tanto uomo e lo nominarono professore a vita del glorioso Ateneo di cui egli era già lustro e decoro. Tale decisione di profonda saggezza fu senza dubbio ispirata dall'intendimento di tributare doveroso omaggio a chi aveva offerto un mezzo sicuro per ringagliardire l'organo visivo, sì da poter scoprire quanto avviene in lontanissime regioni terrestri e celesti. Ma ad essa non fu certamente estranea la considerazione che, per il Governo Veneto, era prerogativa della massima importanza l'avere ai propri servigi chi aveva, prima col compasso geometrico-militare e poi col cannocchiale, mostrato di poter rendere alla regina dell'Adriatico aiuti oltre ogni dire preziosi in pace ed in guerra. E chi ricorda i sentimenti di pretto imperialismo da cui era animato il Governo Veneto, ed ha poi presenti le lotte per l'egemonia sulle terre e sui mari d'Oriente che allora dibattevansi fra gli Stati in cui era spezzata la nostra patria, non sarà per equiparare tale congettura ad un' insinuazione cervellotica, destituita di base.

Quello che guidò in tal occasione il tenebroso Consiglio dei Dieci è un concetto politico non dissimile dal movente ispiratore di un altro congenere fatto più recente, nel quale troviamo come protagonisti NAPOLEONE BONAPARTE ed ALESSANDRO VOLTA. Narrano, infatti, i biografi dell'immortale fisico di Como come il Primo Console della Repubblica francese, avuta notizia delle mirabili esperienze sopra l'elettricità di contatto compiute nell'Università di Pavia, volle fossero dall'autore ripetute in

Digitized by Google

presenza di una Commissione costituita dai più illustri fisici che sedevano allora nell'Istituto di Francia. Egli stesso, allontanandosi momentaneamente dai più gravi ed urgenti affari di Stato, assistette all'ultima seduta di quello storico convegno, pose la propria firma alla dichiarazione che documentava la gloria del nostro immortale connazionale, e vinte, grazie alla propria imponente autorità, le obbiezioni di chi si mostrava troppo ligio ai precedenti e spaventato dall'idea di crearne di nuovi, fece solennemente decretare all'inventore della pila la massima onorificenza conosciuta, cioè una medaglia d'oro. Grazie a tale attitudine il grande condottiero — il quale (ricordatelo Signori) vantavasi di essere alieno da qualsiasi ideologia dottrinaria — porse una solenne dimostrazione dell'avere, col suo sguardo d'aquila, misurata l'enorme influenza teorica e pratica, di cui erano gravide le esperienze che aggiungevano una nuova energia naturale a quelle che l'uomo aveva già asservito ai propri bisogni. Ora, chi conosce l'ufficio altissimo che disimpegnano elettricità e magnetismo nell'odierna società, dovrà riconoscere come tutti gli onori che NAPOLEONE tributò al VOLTA erano, non soltanto un solenne riconoscimento delle benemerenze di un genio, ma anche un mezzo eccellente per segnalare all'umanità che essa era giunta in possesso di una miniera inesauribile di forze da utilizzarsi, sia per iscopi pacifici, sia nel momento di un sovrastante pericolo nazionale.

6. — Siffatte considerazioni inducono naturalmente a tener parola di un aspetto della ricerca scientifica che, durante la recente conflagrazione mondiale, diede materia a sfoghi violenti da parte di denigratori sistematici di quanto costituisce una delle glorie più pure del genere umano. Si è detto, cioè: se la scienza insegna a creare e consiglia ad usare strumenti di offesa e difesa così barbari quanto quelli che vennero adoperati contro i nostri fratelli combattenti, sia benedetta l'ignoranza degli avi!

Ora tutti siamo d'accordo nel riconoscere come altamente deplorevole il fatto che invenzioni e scoperte di cui l'umanità va giustamente orgogliosa siano state sfruttate a soddisfazione di istinti feroci e disonorevoli. E' però doveroso, in omaggio alla verità, riconoscere come lo sdegno verso armi di novello conio sia fenomeno che s'incontra ad ogni pagina della storia; a provarlo, mi basti ricordare la violenta invettiva dell'ARIOSTO, il quale, al vedere in azione le armi da fuoco, concitatamente esclamava:

> Come trovasti, o scellerata, o brutta
> Invenzïon, mai loco in uman core?

parole che molti certamente sarebbero tentati di applicare ai deplorevo-

Digitized by Google

li e deplorati mezzi bellici recentemente offerti dalla chimica agli eserciti contro cui l'Italia si trovò a combattere.

Nè può nè deve esser taciuto che l'usare, per assicurarsi la vittoria, tutti i mezzi posti a disposizione dei belligeranti non sia affatto sistema che costituisca una triste prerogativa dell'epoca moderna; al contrario è un fatto che si è sempre verificato e che, probabilmente, si ripeterà ogni qual volta sopra un uomo sovraincomberà la terribile responsabilità della salvezza della propria patria.

Così quando leggiamo nella *Vita di Marcello*, scritta da PLUTARCO, la descrizione dei complicatissimi ordigni escogitati da ARCHIMEDE per difendere Siracusa dal minaccioso esercito romano, ci si forma la convinzione che, se il grande scienziato avesse conosciuti i gas lagrimogeni ed asfissianti, non avrebbe esitato un istante a servirsene per la salvezza dei propri concittadini.

Una consimile conseguenza si trae leggendo nella *Gerusalemme Liberata* che GOFFREDO DI BUGLIONE (il pio BUGLIONE!) non si fece alcuno scrupolo di usare le catapulte e le altre macchine belliche, allora in uso, contro gl'infedeli che gli contendevano il possesso del Sepolcro di Cristo; in tal modo egli assicurò a sè stesso la massima gioia a cui agogna qualunque capitano, quella cioè di udire

> . . . tutte le squadre il grido alzare
> Della vittoria altissimo festante.

Sembra, pertanto, accettata, almeno da tutti gli uomini d'arme, la opinione che l'ARIOSTO manifestò bonariamente asserendo:

> Fu il vincer sempremai laudabil cosa,
> Vincasi per fortuna o per ingegno.

Da queste mie dichiarazioni non affrettatevi, o Signori, a trarre la conclusione di avere a voi dinnanzi un apologista dalla guerra, barbarie che costituisce una macchia che brutta da secoli l'umanità; attitudine che sarebbe ben strana in chi, con tutta probabilità, scenderà nella tomba senza avere sulla coscienza neppure la vita di uno spaurito passerotto. Ma poichè, anche chi è ripugnante ad ammettere la sconfortante massima secondo cui la guerra sarà per durare sinchè esisteranno due uomini sulla terra, deve onestamente riconoscere che il tramonto di quell'incivile sistema, se si verificherà, avrà luogo in un avvenire di imprevedibile lontananza da noi, così, nella coscienza dell'inanità di ogni sforzo inteso ad interrompere lo fatale andare del pensiero umano, sembra imprescindibile dovere di tutti coloro che son tratti a scendere in campo, di conoscere tutti, tutti senza eccezione, i mezzi che possono assicurargli la vittoria, sia per poterli usare nel momento di un supre-

Digitized by Google

mo pericolo, sia per evitare ne traggano profitto, a suo danno, coloro che gli stanno di fronte.

D'altra parte, se facciamo violenza a squisiti sentimenti umanitari e togliamo lo sguardo da campi insanguinati, da ospedali che accolsero membra doloranti, da gelidi sepolcreti ove trovarono riposo migliaia di eroiche vittime innocenti, e pensiamo invece con gioia ed orgoglio alla sicurezza raggiunta dall'Italia dopo che essa toccò i termini sacri che natura pose, alle nostre navi che solcano con legittima padronanza lo specchio dell'Adriatico non più «amarissimo» ed ascoltiamo i canti di tripudio dei nostri fratelli finalmente liberi da un obbrobrioso servaggio, saremo portati a ripetere malinconicamente con un nostro simpatico scrittore (1): «La civiltà è una terribile pianta, che non vegeta e non fiorisce se non è inaffiata di lacrime e di sangue».

7. — I detrattori delle scienze positive si compiacciono di esporre, con ricchezza di particolari, i problemi dinnanzi a cui esse onestamente riconoscono la propria impotenza, attardandosi anzi, con fine perfidia, sopra quelli dalla cui soluzione l'umanità da secoli attende difese contro minacce perenni. Cotali problemi, se da un lato costituiscono l'incessante tormento dell'investigatore coscienzioso, d'altra parte assicurano vita all'indagine dottrinale, chè un qualunque ramo dello scibile, il quale non sia assillato e sospinto da nuove incognite è, non un organismo vivente, ma un cadavere in procinto a dissolversi. Ora, fra i problemi che vengono, con maligna insistenza, più di frequente citati a scherno della vantata potenza delle scienze d'osservazione, due ricorrono con fastidiosa frequenza.

Uno consiste nella determinazione della struttura interna del globo che abitiamo, determinazione che viene ogni giorno ad alte grida richiesta nella speranza di dedurre dati certi sopra la causa dei terremoti, e procedimenti sicuri per attutirne le disastrose conseguenze. Ebbene, malgrado siasi già dato un nome altisonante alla scienza destinata ad insegnarci che cosa accada nelle viscere della terra, devesi francamente dichiarare che la sismologia non è che un ammasso di osservazioni slegate, tenute insieme a fatica da ipotesi destinate ad avere vita effimera, perchè sciolgonsi, qual neve al sole, di fronte ad un esame coscienzioso e profondo. E' questo un fatto che non può nè deve stupire chi guardi le cose con occhio severo di una critica spassionata.

Ed invero le esplorazioni compiute sino ad oggi dalla superficie verso il centro della terra non superano la profondità di duemila metri, mentre il diametro della terra è all'incirca di dodici mila chilo-

(1) ARTURO GRAF.

Digitized by Google

metri. Emerge da ciò, che le osservazioni a cui si è giunti sono di entità paragonabili all'intaccatura che potrebbe produrre l'unghia di una mano gentile in un cocomero colossale dell'approssimativo diametro di un metro. Ora chi mai potrebbe affacciare la pretesa che tale superficiale operazione sia capace di rivelare che il popolarissimo cucurbitaceo, dopo l'epidermide, presenta un considerevole strato bianco e poi un nucleo rosso, cosparso di semi? Consegue da tale paragone che, dati i mezzi meccanici a nostra disposizione, la scienza ben poco può attendere da scavi, anche un po' più profondi di quelli a cui sinora si spinsero i minatori. Non essendo, d'altra parte, serio e consigliabile attendere aiuti dagli espedienti creati dall'inesauribile fantasia di JULES VERNE per giungere al centro della terra, si sarebbe tentati a dichiararsi scoraggiati, in presenza di un mistero destinato a non venire mai rivelato ai mortali. Ma lo scienziato degno di tal nome, anche se rifugge da

Sogni d'infermi e fole di romanzi,

ricordando come siano stati di recente scoperti raggi luminosi di nuova specie, i quali permettono di scorgere quanto avviene nell'interno di recipienti chiusi, pensa con fiducia ed invidia che gli investigatori che verranno dopo di lui riusciranno a conoscere l'esistenza e le proprietà di nuove specie di luci, grazie a cui sarà possibile lo scoprire, attraverso imponenti involucri rocciosi, l'intima struttura della nostra abitazione terrena ed anche il vedere in azione le forze che si agitano in seno della madre terra.

L'altra fondamentale questione di fronte a cui la scienza odierna rimane incerta e muta concerne le leggi che governano i movimenti dell'atmosfera, questione riconosciuta di fondamentale importanza sino dal giorno in cui una nave si abbandonò in balia delle onde, ma che assunse un carattere di assoluta urgenza dopo che, il sogno di ICARO essendo divenuto realtà, il campo delle esplorazioni umane, che estendevasi in due sensi, acquistò una terza dimensione. Infatti quante vite di naviganti sul mare e nel cielo sarebbero risparmiate da una conoscenza, non dico esatta e completa, ma anche soltanto approssimativa della meccanica dei temporali! Sgraziatamente, malgrado le migliaia di bollettini che gli osservatori di tutto il mondo diramano regolarmente a mezzo della stampa come frutti di uno spionaggio sapientemente organizzato, su questo argomento è forza dichiarare che brancoliamo in tenebre perfette. Secondo il mio modesto avviso anche su questo tema le nostre odierne pretese sono assolutamente esagerate, giacché la regione in cui si svolgono le nostre osservazioni e le nostre esperienze é estremamente ristretta, mentre, d'altra parte, nulla autorizza ad escludere che i movimenti del-

Digitized by Google

l'aria che respiriamo non siano determinati dallo sprigionarsi di energie provenienti da fonti che lo sguardo nostro non può percepire e che gli strumenti di cui disponiamo non sono in grado di rivelarci. E per mostrarvi, o Signori, che il campo sottoposto alle nostre osservazioni è di ampiezza trascurabile di fronte all'immensità degli spazi celesti, ricorderò che la massima altezza raggiunta dai piloti dell'aria è di circa undicimila metri, altezza che viene a ragione vantata come un mirabile *record*. Ma che sono mai undici chilometri paragonati alle distanze valutate dagli astronomi! Quantunque la luce si propaghi con la inconcepibile velocità di trecento mila chilometri al minuto secondo (distanza di poco minore di quella che passa fra la terra e la luna) la stella polare, la silenziosa fedelissima guida dei marinai, é così lontana da noi che è possibile essa siasi spenta da più di trent'anni senza che noi abbiamo ancora cessato di riceverne il luminoso messaggio. Ed è appunto per esprimere agevolmente fenomeni, che hanno per teatro località di così smisurata ampiezza, che fisici ed astronomi si accordarono nell'usare come unità di misura l'anno-luce, cioè il cammino percorso da un corpuscolo luminoso durante un intero anno solare: è una lunghezza che è malagevole indicare a parole, perché si esprime in chilometri con un numero risultante da 8 seguito da dodici cifre significative. Tale perturbante immensità del creato e la notizia che gli astronomi accertarono l'esistenza di corpi celesti, la cui intensità luminosa è un milione di volte lo splendore del sole, produrrà in molti un senso di sgomento non scompagnato da invincibile scoraggiamento, potendo molti essere tratti a sentenziare che la fiducia di riuscire, presto o tardi, a giungere a conoscere che cosa accada negli spazi ultraplanetari è una follia, in cui rispecchiasi l'inestinguibile orgoglio dell'uomo.

Che tale sconfortante conclusione, se tratta, debba dichiararsi precipitata, è dimostrato dal fatto che noi siamo già in grado di determinare la costituzione chimica di corpi esistenti a milioni di miliardi di chilometri dalla terra; fu l'analisi spettrale che ha compiuto questo miracolo. Incoraggiato da tale portentosa conquista, il meteorologista ritorna di buona lena al barometro, al termometro, all'igrometro, suoi quotidiani strumenti di lavoro, animato dalla speranza che, in un giorno non lontano, nell'agone scientifico appaia qualche ardito argonauta dello spirito, il quale produca nella fisica celeste un tale colpo di scena che renda possibile segnalare, con piena sicurezza, l'ora ed il giorno in cui gli aviatori possano spiccare il volo con certezza d'incolumità. A cullarmi in tale rosea previsione io mi sento incoraggiato, direi anzi autorizzato, dalla parola autorevole di GALILEO, il quale scrisse un giorno a BENEDETTO CASTELLI non potersi imporre limiti all'ingegno umano perchè nessuno è in diritto di

Digitized by Google

affermare (per usare le sue parole) *essersi saputo tutto quello che è al mondo di scibile.*

8. — I confini che oggi trova la ricerca nel campo dei fenomeni naturali, ha consigliato e consiglia a tutti coloro che vi si dedicano il contegno più riguardoso e modesto, il quale offre uno stridente contrasto con l'attitudine orgogliosa preferita da studiosi di altre specialità. In conseguenza la superba concezione antropocentrica dell'universo fu abbandonata per far posto a quella secondo cui l'uomo è semplice spettatore di quanto avviene per un volere che sfugge ad ogni ricerca positiva; ed alla stolta utopia che spingeva l'uomo a spiare il segreto del proprio avvenire nel corso degli astri e nel volo degli uccelli, è subentrata la persuasione, molto più seria ed utile, che l'uomo è in gran parte responsabile delle proprie azioni ed artefice della propria sorte.

Questa attitudine di francescana umiltà non toglie che la scienza misuri, con legittimo orgoglio, come le modificazioni benefiche da essa arrecate a tutto l'andamento della società siano di vastissima portata e si accrescano di giorno in giorno. Così essa constata con ben giustificato compiacimento come la meccanica abbia notevolmente alleviate le aspre fatiche degli operai e non abbia negato una inattesa collaborazione alla società protettrice degli animali, sostituendo la torturante trazione a cavalli con l'uso metodico degli oli minerali; come, d'altra parte, essa abbia diminuito il carico e la responsabilità dei contabili offrendo loro macchine calcolatrici, non soggette a distrazioni e stanchezza.

D'altra parte non è forse l'analisi della polvere diffusa in tutti i nostri ambienti che condusse il PASTEUR a fugare il pregiudizio della generazione spontanea e porgere così un solido fondamento teorico alle previdenze asettiche ed antisettiche a cui debbono la vita milioni di pazienti? E, passando al campo industriale, non è forse frutto di studi a carattere prettamente teorico prima l'aggiunta, nell'elenco dei combustibili, alla legna e dal carbone vegetale, del carbone conservato per entro la crosta terrestre e poi lo sfruttamento delle risorse idriche di cui è così ricca la patria nostra? E poichè tutto fa credere non lontano il giorno in cui potremo utilizzare anche l'immensa energia riposta nelle acque del mare, nulla vieta di pensare che noi stessi potremo assistere ad un nuovo trionfo della scienza, la quale, dopo aver fatto dono all'umanità del *carbone nero* e del *carbone bianco*, deponga ai piedi di questa la miniera inesauribile del *carbone azzurro*.

Nell'attesa di questo giorno immancabile, possiamo già riconoscere con giusto compiacimento come la fisica abbia reso possibile la conservazione, non solo dei lineamenti, ma anche della voce di persone care ed abbia ridotto oltremodo facili e rapide le comunicazioni fra popoli

Digitized by Google

lontanissimi; cosicchè, paragonando lo stato attuale delle relazioni fra paese e paese, con quanto accadeva un secolo fa, si arriva alla conclusione che la scienza giunse a rimpiccolire il pianeta che ci ospita; non è infatti un'impressione di tal fatta che si riceve quando, a mo' d'esempio, dopo aver letta la descrizione del viaggio da Roma a Vienna compiuto dal METASTASIO (viaggio così disastroso e accidentato che il buon abate non ebbe mai il coraggio di rifarlo in senso inverso), ci viene data la notizia che la navigazione aerea sta per raggiungere la velocità di 500 chilometri all'ora? Cosicchè, in circa sessanta minuti, si potrà trasporsi da Piazza Deferrari a Piazza Colonna, e qualche onorevole della prossima legislatura potrà, dopo consumato in casa il suo pasto meridiano imbarcarsi su un'areoplano per assistere ad una seduta della Camera e ritornare a passare la sera in famiglia.

Questi indiscutibili trionfi della scienza sono ad un tempo conseguenza e cagione dell'entusiasmo quasi ascetico e dell'incrollabile fede che anima tutti i ricercatori del vero e che ha condotto ad atti di meraviglioso eroismo, di fronte a cui impallidiscono quelli registrati nelle storie di Atene e Roma. Ed in vero non è forse «di poema degnissimo e di storia» l'esempio dato dal fisico GAY LUSSAC, il quale, gravemente offeso alla vista da uno scoppio prodotto dal potassio, ritorna imperturbabile nel suo laboratorio ed è nuovamente vittima dello scoppio di un pallone di idrogeno carburato? Nè meno grande ci si presenta il PASTEUR, quando, incurante del gravissimo pericolo a cui si esponeva, si serve di animali affetti di idrofobia per giungere alla scoperta del provvidenziale siero antirabbico. E quando sorgerà un poeta che canti la vostra epopea, o eroici esploratori delle regioni polari, lontani da ogni prospettiva di prossima o lontana utilità, ma animati unicamente dall'insaziabile sete di sapere?

9. — Tanto preponderante essendo la funzione esercitata nel civile consorzio dalle scienze positive, così fervido e fattivo essendo lo slancio di cui danno prova coloro che vi si dedicano, che chi vive oggi nella completa ignoranza della loro essenza e della portata, si trova in una condizione umiliante, non dissimile da quella in cui è un viaggiatore che percorre un paese di cui ignora la lingua. Da ciò la spiegazione del fatto che i Governi di tutti i popoli usciti dalle barbarie curarono costantemente che, nei programmi che regolano il pubblico insegnamento, alle scienze venisse assegnato il posto che ad esse, di pien diritto, compete, mostrando così di essersi resi conto del fatto che si sarebbero macchiati di un delitto di lesa patria lasciando coloro che sono destinati a formare le classi dirigenti di domani nell'ignoranza di quanto costituisce la più potente arma di offesa e difesa, posta a disposizione

Digitized by Google

dell'uomo, destinato dalla nascita ad una guerra perenne. Tale fu l'attitudine assunta dall'antica Grecia, in conseguenza delle saggie direttive date da PLATONE che chiedeva che Aritmetica e Geometria venissero insegnate ai futuri reggitori della Repubblica; tale quella che offrì la Francia, nell'epoca tragica in cui, sullo scorcio del secolo XVIII, ai suoi confini si affollavano le armate alleate in difesa del trono e dell'altare; e non dissimile è quella (notatelo bene, o Signori) che attualmente si sforzano di assumere tutte le nazioni che, appena deposte le armi, sono con piena ragione angustiate dalla preoccupazione di doverle riprendere in un giorno che auguriamo lontano.

10. — L'Italia, anche nelle epoche politicamente più tristi, seppe conquistare e conservare un invidiabile primato, non soltanto in tutte le arti, ma anche nelle varie scienze. Un secolo prima che DANTE plasmasse la lingua caratteristica della stirpe, essa, per opera di LEONARDO FIBONACCI, faceva conoscere a tutta Europa l'uso delle cifre oggi ancora in uso ed i rudimenti dell'algebra, sicchè tale scienza per lungo volgere di secoli conservò un'impronta prettamente italiana; poco dopo, gli arditi esploratori che rispondono ai nomi di MARCO POLO e CRISTOTORO COLOMBO, con magnanimo ardire, allontanarono verso oriente e verso occidente i confini del mondo conosciuto; segue ad essi degnamente GALILEO GALILEI, vero continuatore ed erede del sommo Stagirita, il quale, malgrado la più ostinata opposizione di pretesi banditori del verbo aristotelico, col precetto e con l'esempio insegnò essere l'esperienza l'infallibile crogiuolo ove l'errore viene separato dalla verità. Finalmente gli è sotto il nostro cielo che GALVANI e VOLTA insegnarono a servirci di nuove e possenti energie, celate nei recessi della materia. Cosicchè, nelle terre ove volarono le aquile e ruggì il leone, dove furono spiegati al vento i gloriosi vessilli di S. Giorgio e di S. Marco, il nome d'Italia suonò, non soltanto come araldo di valore, ma anche come sinonimo di genio inesauribile.

Tali essendo le ininterrotte tradizioni scientifiche della patria nostra, è imprescindibile dovere delle nuove generazioni il mostrare che, uscita finalmente dal secolare travaglio con cui essa giunse a frangere secolari catene, nulla ha perduto di genialità e di attitudine alla ricerca scientifica.

Questo è il còmpito, oltre ogni dire nobile e grande, che la sorte assegna alle generazioni che oggi maturano.

A noi, cui lo Stato affida la grande ed altissima missione di preparare l'avvenire, spetta tracciare e spianare la strada a chi si avvia per l'aspro, ma luminoso cammino destinato a portare alla scoperta di nuovi veri. Ed io sono certo di interpretare il concorde pensiero dei

Digitized by Google

commilitoni, asserendo che nessun sacrificio ci parrà troppo grave pur di mostrarci degni della fiducia in noi riposta.

Ma dal canto suo chi detiene il potere, ha l'imprescindibile dovere di apprezzare a norma di giustizia ed utilizzare nel miglior modo tali intendimenti mostrando di sapere valutare a dovere i più fulgidi titoli di nobiltà della razza umana, col rifuggire, anche soltanto nell'apparenza, da manifestazioni svalutatrici della scienza e denegatrici del valore eminentemente formativo, dell'intelligenza e del carattere, che le viene riconosciuto in tutto il mondo da pensatori eminenti e di diverse tendenze; in una parola: ascoltando i taciti austeri ammonimenti, che attraverso le eterne pagine della storia, col loro esempio offrono ministri e principi fautori delle più ammirande ascensioni umane.

In tal modo a noi, che già volgiamo all'occaso della vita, sarà concessa la suprema gioia di sentire che il nostro posto sarà occupato da chi saprà rendere ognor più abbagliante l'aureola che constella la fronte dell'Italia scientifica; e riceverà nuove solenni conferme l'inesauribile fecondità nelle più elevate regioni del pensiero de'

L' itala gente dalle molte vite.

Digitized by Google

Digitized by Google

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. G. LORIA (1)

1. *Sur les différentes espèces de complexes du second degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre*; « Math. Annalen », T. XXIII, 1883 (in collaborazione con C. SEGRE).
2. *Ricerche sulla geometria della sfera e loro applicazione allo studio e alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all'infinito*; « Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino », II Ser. Volume XXXVI, 1884.
3. *Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazi*; « Giorn. di Matem. », T. XXII, 1883.
4. *Geometrischer Beweis der bekanntesten Eingenschaften einer binären cubischen Form*; « Zeitschr. f. Math. u. Physik », 1884.
5. *Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale*; « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XIX, 1884.
6. *Nuovi studi sulla geometria della sfera*: « id. », Vol. XX, 1885.
7. *Ueber einer von Steiner entdeckten Satz und einige damit verwandten Eigenschaften der Flächen zweiten Grades*; « Zeitschr. f. Math. u. Physik », 1885.
8. *Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito*; « Rend. della R. Acc. di Napoli », 1885.
9. *Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completi*; « Rend. del R. Ist. Lomb. », 1885.
10. *Intorno ad alcune relazioni fra distanze*; « Period. di matem. », 1886.
11. *Rappresentazione su un piano delle congruenze* $(6, 2)_2$ *e* $(7, 2)$; « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XXI, 1886.
12. *Remarques sur la géometrié des cercles d'un plau*; « Quart. Journ. of Mathem. », 1886.
13. *Studi sulla teoria delle coordinate triangolari e sulla geometria analitica di un piano nello spazio*; « Giorn. di matem », T. XXIV, 1886.

(1) Non sono registrate in questo Elenco le questioni proposte o risolte nell'*Intermédiaire des mathématiciens*, le recensioni pubblicate in vari periodici, le brevi comunicazioni fatte in seno alla Sezione ligure della Mathesis, le Relazioni fatte in qualità di segretario della Società ligustica di scienze e lettere e gli articoli inseriti nell'*Enciclopedia italiana*.

Digitized by Google

14. *Nota sulla moltiplicazione di due determinanti*; « Jornal di Teixeira », T. V. 1886.
15. *Su una proprietà del determinante di una sostituzione ortogonale*; « Ivi ».
16. *La definizione di spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio, secondo le ricerche di Giorgio Cantor*; « Giorn. di matem. », T. XXV, 1887.
17. *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*; « Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino », II Ser., Vol. XXXVIII, 1887. Trad. polacca di S. Dickstein; trad. tedesca di F. Schütte; II ed. Torino 1897; III ed. ivi, 1907; IV ed., Padova, CEDAM 1931.
18. *Su gli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica*; « Giorn. della Soc. di Lett. e Conv. scientif. di Genova », 1886; « Giorn. di matem. », T. XXIV, 1886.
19. *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque*; « Id. », T. XXVI, 1888.
20. *Notizie storiche sulla geometria numerativa*; « Bibl. mathem. », II Ser. T. 2, 1888.
21. *Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a n-1 dimensioni*; « Rend. Circ. matem. di Palermo », 1888.
22. *Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni*; « Giorn. di matem. », T. XXVI, 1888.
23. *Nota su una classe di determinanti*; « Ivi ».
24. *Zur Eliminationstheorie*; « Zeitsch. f. Math. u. Physik », 1888.
25. *I poligoni di Poncelet*; Torino, 1889.
26. *Rassegna di alcuni dei suoi scritti sui poligoni di Poncelet*; « Bibl. mathem. », II Ser. T. 3, 1889.
27. *L'opera scientifica di Ettore Caporali*; « Giorn. di matem. », T. XXVII, 1889.
28. *Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie*; « Ivi ».
29. *Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie*; « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1890.
30. *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere uno*; « Rend. del R. Ist. Lomb. », 1890.
31. *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine*; « Atti della R. Accad. delle scienze di Torino », 1890.
32. *Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche*; « Rivista di matematica », T. I, 1891 e T. II, 1892.
33. *Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati*; « Bibl. mathem. », II Ser. T. V, 1891 e Rend. Circ. matem. Palermo, T. V, 1891.
34. *Esame di alcune ricerche relative all'esistenza di radici nelle equazioni algebriche* « Bibl. mathem. », II Ser., T. V, 1891, e T. VII, 1893.
35. *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*; « Atti della R. Università di Genova », 1892.
36. *Sulla teoria della curvatura delle superficie*; « Rivista di matem. », T. 2, 1892.
37. *Congetture e ricerche sull'aritmetica degli antichi Egiziani*; « Bibl. mathem. », II Ser. Vol. VI, 1892.
38. *Nota su due applicazioni algebriche dell'eliminazione*; « Jornal di Teixera », T. IX, 1892.
39. *L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte*; « Atti del V Congresso stor. ital. », 1892; Bibl. mathem. T. VII, 1893.
40. *Un nuovo documento intorno alla logistica greco-egiziana*; « Bibl. mathem. », II Ser. T. VII, 1893.
41. *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento secondario*; « Period. di matem. », T. VIII, 1893.

Digitized by Google

42. *Intorno a la vita e le obere di Gaetano Giorgini*; « Giorn. di matem. », T. XXX, 1892.
43. *Le funzioni* sigma *di Weierstrass e le curve di genere uno*; « Ivi ».
44. *Le scienze esatte nell'antica Grecia*; « Mem. dell'Acc. di Modena », Ser. III, Vol. X e seguenti; II ed. Milano 1914.
45. *A few Remarks on the Syllabus of Modern plane Geometry issued by the A. I. G. T.*; Bedford 1893.
46. *Studi intorno alla logistica greco-egiziana*; « Giorn. di matem. », T. 32, 1895.
47. *La logique mathématique avant Leibniz*; « Bull. des sciences mathèm. », II Ser. T. XVII, 1895.
48. *Articoli Euclide e Matematica nel* « Dizionario illustrato di pedagogia ».
49. *Sur les courbes gauches auto-corrélatives*; « Bull. de la Soc. mathém. de France », T. XXIII, 1895.
50. *Per Leon Battista Alberti*; « Bibl. Mathem. », II Ser. T. IX, 1895.
51. *Desargues e la geometria numerativa*; « Ivi ».
52. *I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali*; « Prager Sitzungsber. », 1896.
53. *Integrali Euleriani e spirali sinusoidi*; « Ivi ».
54. *Une courbe oubliée*; « Mathésis », 1897.
55. *Identité de la strophoïde avec la focale à noeud; son application à l'optique géométrique*; « Nouv. Ann. de mathém. », 1897.
56. *Versiera, visiera e pseudo-versiera*; « Bibl. mathem. », II Ser. T. XI, 1897.
57. *Di alcuni nuovi documenti relativi a J. Steiner*; « Giorn. di matem. », T. XXXVI, 1827.
58. *Sopra certi determinanti i cui elementi sono funzioni trigonometriche*; « Period. di matem. », T. XII, 1897; Prager Sitzungsber. 1897.
59. *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva*; « Rend. R. Accademia dei Lincei », Dicembre 1897.
60. *Aperçu sur le développement historique des courbes planes*; « Verh. des I Mathem. Kongr. » 1897. Trad. Polacca di S. Dickstein.
61. *Per la storia di alcune curve piane. La strofoide*; « Boll. di bibl. e storia ecc. », T. I, 1898.
62. *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario*; « Period. di matem. », T. XIV, 1898.
63. *La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice*; « Mathésis », 1898.
64. *La fusione della planimetria con la stereometria. Una pagina di storia contemporanea*; « Period. di matem. » T. XV, 1899.
65. *Osservazioni sopra le coordinate polari*; « Ivi ». Trad. in francese, tedesco e polacco.
66. *Un problema de aritmetica que se encuentre en el studio de las rodoneas*; « Progresso matématico », 1899.
67. *Généralisation d'un problème de minimum classique*; « Mathésis », 1899.
68. *Il « Giornale de' Letterati d'Italia » di Venezia e la « Raccolta Calogerà » come fonti per la storia delle matematiche nel Secolo XVIII*; « Abhandl. z. Geschichte der Mathem. », IX Heft., 1899.
69. *Un trattato sulle curve piane pubblicato senza nome d'autore*; « Bibl. mathem. » II Ser. T. XIII, 1899.
70. *Le ricerche inedite di E. Torricelli sopra la curva logaritmica*; « Bibl. math. III » T. I, 1900.
71. *Sui metodi di compilazione dei Cataloghi bibliografici*; « Boll. di bibl. e storia ecc. », T. III, 1900.

Digitized by Google

72. *Les courbes parallèles aux astéroïdes sont-elles toujours des astéroïdes?*; « Mathésis » 1899.
73. *Intorno alle radiali delle curve piane*; « Rend. del Circ. matem. di Palermo », Vol. XII, 1899.
74. *Le trasfigurazioni di una scienza*; « Ann. della R. Univ. di Genova », 1900-01.
75. *La radiale di una curva algebrica*; « Period. di matem. », Vol. XVII, 1901.
76. *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte.* Leipzig 1902; II ed. in due vol. Leipzig 1910-11; I ed. italiana in due vol. Milano 1930-31.
77. *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*; « Bibl. mathematica », III Serie T. II 1501.
78. *L'oeuvre scientifique d'Ernest de Jonquières*; « Id. », T. III, 1902.
79. *Pseudo-versiera e quadratrice geometrica*; « Ivi ».
80. *Le curve panalgebriche*; « Prager. Sitzungber. » 1901; « Le matem. pure e applicate », T. 2, 1902.
81. *Transformation des coordonnées projectives*; « L'enseign. mathém. », T. IV, 1902.
82. *Donne matematiche*; « Atti R. Acc. Virgiliana di Mantova », 1901; trad. frances. in Revue scientifique 1903.
83. *G. B. Caraccioli*; « Boll. di bibliogr. e storia ecc. », 1903.
84. *Fondamenti geometrici della fotogrammetria*; « Giorn. di matem. », T. XLI, 1903.
85. *Sopra la risoluzione grafica delle equazioni di secondo grado*; « Boll. di matem. », T. 2, 1903.
86. *In qual modo ed in quale misura la storia delle scienze matematiche, fisiche e naturali possa costituire oggetto di un corso universitario. Relazione*; « Atti del II. Congr. intern. di scienze storiche », Vol. XII, 1903.
87. *Un'impresa nazionale di universale interesse*; « Ivi ».
88. *Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva.* « Period. di matem. » Ser. III, Vol. I, 1903.
89. *Sui fondamenti della teoria projettiva delle curve algebriche sghembe*, « Rend. Circ. mat. Palermo » 1903.
90. *Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare*; « Bibl. mathem. » III Ser. T. IV, 1903.
91. *Commemorazione di L. Cremona*; « Atti della Soc. Ligust. di scienze nat. e geogr. », Vol. XV, 1904.
92. *P. Paci. Cenno necrologico.* « Ann. della R. Univ. di Genova », 1904-05.
93. *L. Cremona et son oeuvre mathématique*; « Bibl. mathem » III Ser. Vol. V, 1904.
94. *Verso una lingua universale?* « Rivista ligure », 1904.
95. *Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à trois ou quatre dimensions*; « Arch. f. Math. u. Phys », III Ser. T. II, 1904.
96. *Pour une histoire de la géométrie analytique*; « Verh. des II intern. Mathem. Kongress », 1904.
97. *Sur l'enseignement des mathématiques en Italie.* « Ivi ».
98. *Programmi del passato e programmi per l'avvenire*, « Rivista ligure ». 1905 trad. ted. 1906.
99. *Unicuique suum*; « Boll. di bibliogr. e storia ecc. » T. VII, 1904.
100. *Sopra una trasformazione ideata da Fermat*; « Bibl. mathem. » III Ser. T. IV, 1905; « Oeuvres de Fermat », T. IV.
101. *Per la storia della teoria delle trasformazioni di contatto*; « Id. » T. VII, 1906.
102. *Scienza e stile scientifico*; « Rivista ligure », 1906.
103. *La riforma della scuola media in Germania*, « Ivi ».

Digitized by Google

104. *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens.* « L'enseign. mathém. » T. VIII, 1906.
105. *Sulle riforme scolastiche da compiersi e in particolare su quelle relative all'insegnamento della matematica*; « Boll. di matem. » T. V, 1906.
106. *Matematica e matematici del Giappone*; » Boll. di bibl. e storia », T. IX, 1906.
107. *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* « I Th. Leipzig 1907 » ; II Th. id. 1913.
108. *Esiste lo spazio a quattro dimensioni?* Atti della Soc. Ligustica di scienze natur. e geogr. » T. XVIII, 1907.
109. *Sur la courbure d'une ligne plane dans un point quelconque* ; « Ann. Acad. Porto », T. II, 1097.
110. *La spirale de Pappus*; « Arch. f. Mathem. u. Physik », III. Ser. T. XII, 1907.
111. *Le trasformazioni pedali ed antipedali nel piano e nello spazio*; « Per. di matem. » 1907.
112. *Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens*; « Bibl. mathem. » III Ser T. VII, 1907.
113. *Perspektive und darstellende Geometrie* (nel Vol. IV, di M. CANTOR, « Vorl. über Geschichte der Mathem. », Leipzig 1908).
114. *Sopra certi inviluppi di sfere*; « Mathem. Annalen », T. 64, 1907.
115. *Raggi di scienza in canti studenteschi ultramontani*; « Rivista ligure ». 1907.
116. *Le tradizioni matematiche dell'Italia* ; « Atti del IV Congr. intern. dei matematici », 1908.
117. *Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques* ; « ivi » oppure Arch. f. die Gesch. der Naturwiss. und der Technik, vol. I. 1908.
118. *La geometrografia e le sue trasfigurazioni* ; « Period. di matem. » T. XXIV, 1908.
119. *L'opera geometrica di A. Mannheim.* « Rend. del Circ. mat. di Palermo », Vol. XXIV, 1908.
120. *Notice sur G. Vailati*; « Enseignement mathématique », T. IX, 1909.
121. *Metodi di geometria descrittiva*, « Milano 1909 »; II ed. 1919; III ed. 1925.
122. *In memoria di Evangelista Torricelli. Discorso*; « Rivista ligure » 1909.
123. *Développements rélatifs au projet d'un « Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques ».* « Bibl. mathem. » III Ser. T. IX, 1909.
124. *Per la storia della geometria descrittiva: T. Olivier*; « Arch. f. die Gesch. der Naturwiss. und Technik ». 1909.
125. *Topologia delle curve di Lamè e delle spirali sinusoidi*; « Atti dell'Accademia Pontaniana », 1909.
126. *Sopra un antico tentativo per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche*; « Boll. di bibl. e storia ecc. » T. IX, 1909.
127. *La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo*; « Atti del V Congr. della « Mathesis », 1909.
128. (Con A. PADOA) *Preparazione degli insegnanti per le scuole medie*; Relazione; « Ivi ».
129. *G. Schiaparelli quale storico dell'antica astronomia*; « Bibl. mathem. » III Ser. T. X, 1910.
130. *Metodo matematico e metodo statistico*; Atti della R. Acc. Virgiliana di Mantova », Nuova Ser. T. III, 1911.
131. *Osservazioni intorno alla topologia delle curve e delle superficie trascendenti*; « Rend. del R. Ist. Lomb. », II Ser. T. XLIII, 1910; « Giorn. di matem. T. XLVIII », 1910.
132. *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva*; Milano 1911.
133. *Matematica e realtà*; « Bollettino della Mathesis », 1911.
134. *C. Méray*; « Ivi ».
135. *Sopra una proprietà delle reti di sfere*; « Period. di matem. », T. XXVI, 1910.

Digitized by Google

136. *Sopra un'estesa categoria di superficie trascendenti*; « Rend. del R. Ist. Lomb. », II. Ser. T. XLIV, 1911.
137. *Sur la détermination de la courbure d'une ligne plane considérée comme enveloppe de ses tangentes*; « L'enseignement mathém. », T. XIII, 1911.
138. *Sopra una relazioue che passa fra due antiche soluzioni del problema di Delo*; « Bibl. mathem. » III Ser. T. XI, 1911.
139. *Intorno alla trigonometria degli antichi Greci*; « Boll. della Mathesis », 1912.
140. *Emile Lemoine*; « Ivi ».
141. *Intorno allo stato attuale e alla sorte futura di una bibliografia matematica*; « Boll. di bibl. e storia ecc. », T. XIV, 1912.
142. *Sur la topologie des courbes interscendantes*; « L'enseign. mathém. », T. XIV, 1912.
143. *Projezione centrale e omotetia*; « Period. di matem. », T. XXVIII, 1912.
144. *Sulle origini della teoria dei poliedri semi-regolari*; « Bibl. mathem. », III Ser. T. XIII, 1912.
145. *La storia delle scienze è una scienza?*, « Atti del VII Congresso della Soc. Ital. Per il progresso delle scienze », 1912.
146. *Eccentricità e misteri dei numeri*; « Atti del II Congr. della Mathesis »; trad francese *in* « L'enseign. mathem. », T. XV, 1913.
147. *Cultura classica e scienza moderna*; Discorso, Ann. della R. Univ. di Genova.
148. *C. M. Piuma*; « Id. », 1912-13.
149. *P. Tardy*; « Id. », 1914-15.
150. *Intorno ai metodi usati dagli antichi Greci per estrarre le radici quadrate*; « Proc. of the V intern. Congress of Mathem. », Cambridge 1912.
151. *G. L. Lagrange nella vita e nelle opere*; « Annali di matem. », Ser. III, Vol. XX, 1914.
152. *Lagrange e la storia delle matematiche*; « Bibl. mathem. », III Ser. III, 1913.
153. *Le glorie matematiche della Granbretagna*; « Isis », T. I.; trad. inglese *in* « The. mathem. Gazette » 1914-15.
154. *Relazione su una memoria di G. Mancini*; « Mem. della R. Acc. dei Lincei », Classe di sc. mor. Vol. XIV, 1913.
155. *Sopra la determinazione delle parti visibili di un poliedro rappresentato graficamente*; « Zeitschr. f. Math. u. Physik », III ser. T. LXIII, 1914.
156. *Sur l'opération « transport des segments rectilignes » dans les constructions de géométrie descriptive*; « L'enseign. mathém. », T. XVI, 1914.
157. *Zum Andenken von Prof. F. Schütte*; « Jahresber. der Deutschen Math., Ver. » T. XXIII, 1914.
158. *Sur un paradoxe algébrique apparent*; « The Amer. math. Monthly », T. XXI, 1914.
159. *Construction plane des spiriques de Perseus*; « Ann. Acad. Polyt. de Porto », 1915.
160. *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici dell'Antichità*; « Scientia », 1915.
161. *Guida allo studio della storia delle matematiche*; Milano, 1916.
162. *The physician J. B. Porta als a geometer*; « Bull. of the Amer. math. Society », 1916.
163. *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici moderni anteriori al secolo XVIII*; « Id. », 1916.
164. *I doveri dei simboli matematici*; « Boll. della Mathesis », 1916.
165. *L'enigma dei numeri immaginari attraverso i secoli*; « Id. », 1917.
166. *Lo spettro dell'immaginario in geometria*; « Ivi ».
167. *Il « Philosophical Magazine » e la storia delle matematiche*; « Riv. di storia critica delle scienze mediche » 1916; trad. inglese in « The Mathem. Gazette », 1917.
168. *Per la biografia di Giovanni Ceva*; « Rend. del R. Ist. Lomb. », II Ser. T. 48, 1916.

Digitized by Google

169. *Spezielle ebene alg. Kurven von einer Ordnung höher als der vierten*; « Encyklopädie der mathem. Wissenschaften.
170. *Scienze e scienziati nel periodo della rivoluzione francese*; « Conferenze e Prolusioni », 1915.
171. *Leonardo da Vinci e la genialità latina*; « Id. », 1917.
172. *Intorno allo stato attuale degli studi sulla storia delle matematiche*; « Atti della Soc. Ital. per il progresso delle Scienze », 1916.
173. *Le matematiche nell'estremo Oriente*; « Rend. del Seminario matematico di Roma », Vol. IV, 1916-17.
174. *Commemorazione di P. Tardy*; « Rend. della R. Acc. dei Lincei », Marzo 1915.
175. *Note sulla storia delle matematiche in Italia*; « Id. », Marzo 1916.
176. *Guglielmo Libri come storico della scienza*; « Atti della Soc. Ligustica di scienze nat. e geogr. », Vol. XXVII, 1916.
177. *Le cubiche gobbe aventi ciascuna all'infinito tre punti reali e distinti*; « Scritti offerti a E. d'Ovidio », Torino, 1918.
178. *Le matematiche in Ispagna ieri ed oggi*; Scientia 1919.
179. *Le matematiche in Portogallo: ciò che furono, ciò che sono*; « Ivi ».
180. *Veicoli al servizio dei calcolatori*; « Id. », 1920.
181. *Che cosa debbono le matematiche ai Cinesi?* « Boll. della Mathesis », 1920.
182. *Per la storia del Newtonianesimo in Italia*; « Atti della Soc. ital. per il progresso delle scienze », 1919.
183. *H. G. Zeuthen*; « Archivio di storia della scienza ». 1919.
184. *Per una storia delle matematiche nel Secolo XX*; « Ivi ».
185. *Sur le folium double*; « Revue de mathém. spéciales », 1920.
186. *Panegirico d'un eroe.* « Commemorazione di E. E. Levi », Genova 1919.
187. *E. E. Levi — 1883-1917* (con G. Fubini). « Boll. di bibl. e storia ecc. » 1919.
188. *Les noms et les choses*; *remarques sur la nomenclature mathématique.* L'Enseignement mathém. » T. XX, 1918-19.
189. *Opere di Evangelista Torricelli* « ed. da G. Loria e G. Vassura » Faenza 1919.
190. *Newton*, « profilo », Roma 1920.
191. *Prefazione all'opera*: J. W. Young, « I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria, trad. D. Mercogliano »; Napoli 1919.
192. *Per la gloria scientifica della Liguria*; L. B. Alberti e G. Saccheri. « Gazzetta di Genova », 1920.
193. *C. Alasia. In memoriam*; « Boll. della Mathesis » 1919.
194. *E. Torricelli nella storia della geometria.* « Rend. della R. Acc. dei Lincei » 1919.
195. *Remarques sur la construction des courbes gauches, avec application à la parabole cubique.* « L'eseign. mathém. » T. XX, 1918.
196. *Necrologia di F. G. Monteverde*; « Ann. della R. Univ. di Genova », 1919.
197. *Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane*; « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1919.
198. *Come venne scoperto il teorema di Pitagora?* « Bollettino della Mathesis » 1919.
199. *L'insegnamento della matematica nelle scuole industriali secondarie dei principali paesi del mondo*; « Boll. della Mathesis », 1919.
200. *On certain construction of descriptive geometry.* « The Amer. math. Monthly », 1919.
201. *La preparazione degli insegnanti medi di matematica.* Relazione. Period. di matem., IV Ser. T. I, 1921.
202. *Su gli asintoti e i piani asintotici di una linea gobba.* « Ivi ».
203. *Dante e la scienza del suo tempo.* « Conferenze e Prolusioni », 1921.
204. *Huygens, Gauss e ... Pitagora.* « Ivi » T. II, 1922.

Digitized by Google

205. *Commemorazione di O. Tedone*, « Ivi ».
206. *Sopra un problema di geometria*, « Ivi ».
207. *Leonardo Fibonacci*; « Gli scienziati italiani », Vol. I, 1921.
208. *Ulisse Dini*, « Ivi ».
209. *Evangelista Torricelli*, « Ivi ».
210. *Storia della geometria dalle origini sino ai nostri giorni*, Milano 1921.
211. *Un'accademia scientifico-letteraria in Genova*. Gazzetta di Genova, 1921.
212. *Quando divenni professore*; « Ivi ».
213. *Les contributions des différents peuples au développement des mathématiques*; « Scientia 1921.
214. *Philip E. B. Jourdain, matematico e storico della scienza*; « Arch. di stor. della scienza », T. II, 1921.
215. *Osservazioni relative alla rappresentazione analitica dei sistemi elementari di coniche o quadriche*. « Atti della Soc. Lig. di scienze e lettere », T. I, 1922.
216. *Descartes e la teoria dei numeri*; « Boll. di matematica ». 1923.
217. *Deux grands historiens des mathématiques : M. Cantor et H. G. Zeuthen*, « Scientia » 1922.
218. *Qu'est-ce que la géométrie analytique?* « L'enseign. mathém. » T. 23, 1923.
219. *Applicazioni geometriche di una formola di Siacci*; « Boll. Union. matem. ital. » 1923.
220. *Psicologia dei matematici*; « Scientia », 1924.
221. *La funzione sociale della scienza*; « La parola », 1924.
222. *L'opera geometrica di C. Segre*; « Ann. di matem. » 1924.
223. *Il periodo galileiano nella storia delle scienze*; « Scientia ». 1925.
224. *Una massima di Abel*; « Period. di matem. », Ser. IV, Vol. IV, 1925.
225. *Complementi di geometria descrittiva*; Milano 1924.
226. *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*; Due vol., Bologna 1925.
227. *Sulle curve le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare*; « Giorn. di matem. » T. XLIII, 1925.
228. *Pagine di storia della scienza*, Torino 1925.
229. *Une nouvelle (?) trisectrice*; « Mathésis » 1925.
230. *Sopra las geodetigas de un cono de revolucion*. « Riv. matem. hispano-amer. » 1925.
231. *En relisant un mémoire de Plücker*. L'enseignement mathémat. » T. XXV, 1926.
232. *Pref. al T. IV dei* « Mémoires scientifiques di P. Tannery. Paris », 1926.
233. *La legge d'evoluzione propria delle matematiche*; « Scientia » 1927.
234. *Sicilia matematica*; « Atti del Congresso di chimica », Palermo 1927.
235. *La scienza del Secolo XVIII*, « Scientia » 1928.
236. *Archimede*, nella collezione « I curiosi della natura », Milano 1928.
237. *Matematiche greche e matematiche arabe*; « Archeion » 1928.
238. *Storia delle matematiche*. Vol. I, Torino 1929; II; 1931; III, 1933.
239. *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité hellénique*, Paris 1929.
240. *Lo sviluppo delle matematiche pure durante il secolo XIX*; « Scientia » 1929.
241. *Dalla tavola Pitagorica alle equazioni integrali*. Schizzo storico inserito nel Vol. III dell'opera « l'Europa nel Secolo XIX », Padova, 1929.
242. *Paul Tannery et son oeuvre d'historien*; « Archeion », 1929.
243. *Ce qui nous apprirent et ce que nous attendons des manuscrits arabes relatifs aux mathématiques*, « Ivi ».
244. *Una curva speciale ideata da V. Viviani*; » Boll. di matem. » T. XXV, 1929.
245. *Risposta a una questione*; « Boll. Union. matem. ital. » 1929.
246. *Per la storia dell'algebra nei Secoli XV-XVI*; « Period. di matem. », 1930.

Digitized by Google

247. *Come giunse a Firenze il manoscritto arabo dei Libri V-VII delle Coniche di Apollonio*; « Archeion », 1930.
248. *La réponse de Frénicle au premier défi de Fermat*; « Bull. des sciences math. », 1930.
249. *Intorno alla frequenza dei numeri primi*; « Atti della Soc. Lig. di sc. e lett. », 1930.
250. *Elogio del Libro*; « Id. », 1931.
251. *L'ininterrotta continuità del pensiero matematico italiano*; « Period. di matem. », 1931.
252. *Le matematiche nei quaranta secoli della loro storia*; « Atti della Soc. Lig. di sc. e lett. » 1932.
253. *Di alcuni aspetti sotto cui presentansi le ricerche storiche nel campo matematico*; « Archeion », 1932.
254. *Les mathématiques chez les anciens Egyptiens*; « Bull. des sciences math. », 1932.
255. *Sopra una poco nota costruzione del pentagono regolare*; « Boll. di matem. », 1932.
256. *Quo vadimus?* « Atti del Congresso intern. dei matem. », T. VI, 1930.
257. *Bombelli e Diofanto*; « Ivi ».
258. *A. Cauchy nella storia della geometria analitica*; « Verhandl. des Math. Kongresses », Zürich 1932; trad. inglese in « Scripta mathem. », Vol. I.
259. *Sur l'équation de la surface du 2. ordre déterminée par trois droites*; « L'enseignement mathém. », T. XXXI, 1932.
260. *Dimostrazione di una formola di Cayley*; « L'Archimede », 1933.
261. *La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Rapport général*; « L'enseignement mathématique », 1933.
262. *Commemorazione di E. d'Ovidio*; « Rend. della R. Acc. dei Lincei », 1933.
263. *Per la storia della prospettiva nei Secoli XV e XVI*; « Boll. di matem. », 1933.
264. *Considerazioni e notizie intorno alla storia delle matematiche*; « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1934.
265. *Métamorphose d'une solution ancienne du problème de Délos*; « Mathésis », 1933.
266. *La geometria degli altari eretti in onore di Brahma*; « Archeion », 1934.
267. *A. Mannheim-soldier and mathematician*; « Scripta mathematica », 1934.
268. *Metodi matematici; essenza, tecnica, applicazioni*; Milano 1935.
269. *Contributi matematici dati da d'Alembert all'Encyclopédie méthodique*; « Actes du III Congrès d'histoire des sciences », Lisboa 1935.
270. *Una questione di priorità: Eulero o i Neo-Pitagorici?* « Scritti in onore di S. Ortu-Carboni », Genova 1935.
271. *Triangles sphériques particuliers*; « Mathésis », 1935.
272. *Le mathématicien J. Liouville et ses oeuvres*, Archeion, 1936.
273. *Michele Chasles e la teoria delle coniche*; « Osiris », T. I, 1936.
274. *Lagrange nelle Accademie di Berlino e Parigi*; « nel volume in onore di A. M. Lorgna pubblicato dall'Acc. di Verona », 1936.
275. *Curve*; « Rend. del Seminario matem. di Milano », 1936.
276. *Per la storia della geometria descrittiva*; « Boll. di matematica », 1936.
277. *La Società ligustica di scienze e lettere dal 1922 al 1935*; « Atti della Soc. di sc. e-lett. di Genova », 1937.
278. *Descartes géomètre;* Revue de métaphysique et de morale, 1937.

Digitized by Google

Digitized by Google